KOMMUTATIVE ALGEBRA UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

ENTWURF, STAND: 7. Januar 2024

JÜRGEN HAUSEN UND MILENA WROBEL

Inhaltsverzeichnis

1. Kommutative Ringe und Ideale

1.1. **Kommutative Ringe.**

Erinnerung 1.1.1. Ein *kommutativer Ring mit Eins*, im folgenden kurz *K1-Ring* genannt, ist eine Menge R mit Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \mathrm{add}\colon R\times R\to R, &\qquad (a,b)\mapsto a+b,\\ \mathrm{mult}\colon R\times R\to R, &\qquad (a,b)\mapsto ab \end{aligned}$$

(üblicherweise Addition und Multiplikation genannt), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) (R,add) ist eine *abelsche Gruppe*, d.h.,
- es gilt stets $a+(b+c)=(a+b)+c$,
- es gilt stets $a+b=b+a$,
- es gibt ein Element $0=0_R\in R$ mit $0+a=a$ für alle $a\in R$,
- zu jedem $a\in R$ gibt es ein Element $-a\in R$ mit $a+(-a)=0$.

(ii) (R,mult) ist ein *abelsches Monoid*, d.h.,
- es gilt stets $a(bc)=(ab)c$,
- es gilt stets $ab=ba$,
- es gibt ein Element $1=1_R\in R$ mit $1a=a$ für alle $a\in R$,

(iii) Es gilt $a(b+c)=ab+ac$ für alle $a,b,c\in R$.

Ein *Homomorphismus* von K1-Ringen R und S ist eine Abbildung $\varphi\colon R\to S$, sodass stets gilt

$$\varphi(1) \;=\; 1, \qquad \varphi(a+b) \;=\; \varphi(a)+\varphi(b), \qquad \varphi(ab) \;=\; \varphi(a)\varphi(b).$$

Ein *Monomorphismus (Epimorphismus, Isomorphismus)* ist ein injektiver (surjektiver, bijektiver) Homomorphismus.

Erinnerung 1.1.2. Eine *Einheit* eines K1-Ringes R ist ein Element $a\in R$, sodass $ab=1$ mit einem $b\in R$ gilt; in diesem Fall ist b eindeutig bestimmt und man schreibt $b=a^{-1}$. Die Menge $R^*\subseteq R$ aller Einheiten von R bildet zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

Ein Element $a\in R$ heißt *Nullteiler*, falls $ab=0$ mit einem $0\neq b\in R$ gilt. Einen K1-Ring nennt man *Integritätsring*, falls $1\neq 0$ in R gilt und es keine *echten Nullteiler* in R gibt, d.h., $ab=0$ stets $a=0$ oder $b=0$ impliziert. Ein *Körper* ist ein K1-Ring $\mathbb{K}$ mit $1\neq 0$ und $\mathbb{K}^*=\mathbb{K}\setminus\{0\}$.

Erinnerung 1.1.3. Es seien R ein K1-Ring, und $S\subseteq R$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

$$0,1\in S, \qquad a,b\in S \;\Rightarrow\; a\pm b\in S, \qquad a,b\in S \;\Rightarrow\; ab\in S.$$

Man nennt S zusammen mit den Verknüpfungen $(a,b)\mapsto a+b$ und $(a,b)\mapsto ab$ einen *Unterring* von R und bezeichnet das Paar $S\subseteq R$ auch als *Ringerweiterung.*

Es seien R ein K1-Ring, $S\subseteq R$ ein Unterring und $A\subseteq R$ eine Teilmenge. Dann *erzeugt* A einen Unterring über S:

$$S[A] \;\;:=\;\; \left\{\sum_{i=1}^{n} s_{i1}\cdots s_{im_i};\; n,m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\;\; s_{ij} \;\in\; S\cup A\right\}$$

mit $S\cup A\subseteq S[A]$. Gilt $A=\{a_1,\ldots,a_r\}$ mit Ringelementen $a_1,\ldots,a_r\in R$, so schreibt man auch $S[a_1,\ldots,a_r]$ anstelle von $S[A]$.

Bemerkung 1.1.4 (Rechnen mit Polynomen)**.** Aus der Analysis sind wir den Umgang mit Polynomen in mehreren Variablen gewohnt:

$$\begin{aligned} (T_1T_2+3T_1) \;+\; (T_1+2T_2-1) &\;=\; T_1T_2+4T_1+2T_2-1,\\ (T_1T_2+3T_1)\cdot(T_1+2T_2-1) &\;=\; T_1^2T_2+2T_1T_2^2-T_1T_2+3T_1^2+6T_1T_2-3T_1\\ &\;=\; T_1^2T_2+2T_1T_2^2+3T_1^2+5T_1T_2-3T_1. \end{aligned}$$

Konstruktion 1.1.5 (Polynomring)**.** Es sei R ein K1-Ring. Ein *Polynom* in den Variablen $T_1, \ldots, T_n$ über R ist ein Ausdruck

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu T^\nu, \quad T^\nu := T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n},\ a_\nu \in R,\ a_\nu \neq 0 \text{ für nur endlich viele } \nu \in \mathbb{Z}^n.$$

Dabei nennt man $a_\nu T^\nu$ mit $a_\nu \neq 0$ einen *Term* und a_ν seinen *Koeffizienten*. Ein *Monom* ist ein Term der Form $T^\nu = 1T^\nu$.

Zwei Polynome $\sum a_\nu T^\nu$ und $\sum b_\nu T^\nu$ sind nach Definition genau dann gleich, wenn $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ gilt. Mit den Operationen

$$\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} b_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu,$$

$$\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} b_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\nu T^\nu, \qquad \text{wobei } c_\nu := \sum_{\nu = \mu + \kappa} a_\mu b_\kappa,$$

wird die Menge aller Polynome in den Variablen $T_1, \ldots, T_n$ über R zu einem K1-Ring, dem *Polynomring*, bezeichnet mit $R[T_1, \ldots, T_n]$. Die neutralen Elemente sind

$$0_{R[T_1,\ldots,T_n]} = 0_R T^0, \qquad 1_{R[T_1,\ldots,T_n]} = 1_R T^0.$$

Bemerkung 1.1.6. Es sei R ein K1-Ring. Für das Produkt zweier Terme aT^ν und bT^μ in $R[T_1, \ldots, T_n]$ gilt

$$(aT^\nu) \cdot (bT^\mu) = abT^{\nu+\mu} = abT_1^{\nu_1+\mu_1} \cdots T_n^{\nu_n+\mu_n}.$$

Insbesondere gilt $T^\nu = (T_1)^{\nu_1} \cdots (T_n)^{\nu_n}$, und man erhält das Produkt zweier Polynome $\sum a_\nu T^\nu$ und $\sum b_\mu T^\mu$ einfach durch formales Ausmultiplizieren.

Bemerkung 1.1.7. Es sei R ein K1-Ring. Dann ist der Polynomring $R[T_1, \ldots, T_n]$ als Ring über R durch die Variablen $T_1, \ldots, T_n$ erzeugt.

Bemerkung 1.1.8. Aus der Analysis wissen wir, wie man den Wert eines Polynoms, etwa $f = T_1T_2 + 3T_1$, in einem Punkt, etwa $a = (2, -1)$ berechnet:

$$f(a) = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4.$$

Für zwei Polynome gilt dabei stets $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(fg)(a) = f(a)g(a)$. Das Auswerten von Polynomen ist also homomorph.

Satz 1.1.9 (Universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** *Es sei R ein K1-Ring. Dann hat man einen kanonischen Monomorphismus*

$$\imath\colon R \to R[T_1, \ldots, T_n], \qquad a \mapsto aT^0.$$

Ist $\varphi\colon R \to S$ ein Homomorphismus von K1-Ringen und sind $s_1, \ldots, s_n \in S$, so erhält man durch

$$\Phi\colon R[T_1, \ldots, T_n] \to S, \qquad \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu T^\nu \mapsto \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \varphi(a_\nu) s^\nu, \text{ wobei } s^\nu := s_1^{\nu_1} \cdots s_n^{\nu_n},$$

einen Homomorphismus; dieser besitzt folgende Eigenschaften und ist dadurch eindeutig bestimmt:

(i) *Es gilt $\Phi(T_i) = s_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$,*

(ii) *das folgende Diagramm ist kommutativ*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\imath"'] & & S \\ & R[T_1, \ldots, T_n] \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Tatsache, dass $\imath\colon R \to R[T_1, \ldots, T_n]$ ein Homomorphismus ist ergibt sich direkt aus den Definitionen von Addition und Multiplikation in $R[T]$:

$$\imath(a+b) \;=\; (a+b)T^0 \;=\; aT^0 + bT^0 \;=\; \imath(a) + \imath(b),$$
$$\imath(ab) \;=\; (ab)T^0 \;=\; aT^0 \cdot bT^0 \;=\; \imath(a) \cdot \imath(b).$$

Um die Injektivität des Homomorphismus $\imath\colon R \to R[T]$ zu erhalten, machen wir uns klar, dass er trivialen Kern besitzt: Es gilt

$$\imath(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; aT^0 = 0T^0 \;\Leftrightarrow\; a = 0.$$

Die Tatsache, dass $\Phi\colon R[T] \to S$ ein Homomorphismus ist, ergibt sich mit Bemerkung 1.1.6; wir führen den Beweis auch noch explizit:

$$\Phi(1T^0) \;=\; \varphi(1)s^0 \;=\; 1,$$

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu + \sum_\nu b_\nu T^\nu\right) &= \Phi\left(\sum_\nu (a_\nu + b_\nu) T^\nu\right) \\
&= \sum_\nu \varphi(a_\nu + b_\nu) s^\nu \\
&= \sum_\nu (\varphi(a_\nu) + \varphi(b_\nu)) s^\nu \\
&= \sum_\nu \varphi(a_\nu) s^\nu + \sum_\nu \varphi(a_\nu) s^\nu \\
&= \Phi\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu\right) + \Phi\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu\right)\left(\sum_\nu b_\nu T^\nu\right)\right) &= \Phi\left(\sum_\nu \left(\sum_{\mu+\kappa=\nu} a_\mu b_\kappa\right) T^\nu\right) \\
&= \sum_\nu \varphi\left(\sum_{\mu+\kappa=\nu} a_\mu b_\kappa\right) s^\nu \\
&= \sum_\nu \left(\sum_{\mu+\kappa=\nu} \varphi(a_\mu)\varphi(b_\kappa)\right) s^\nu \\
&= \left(\sum_\nu \varphi(a_\nu) s^\nu\right)\left(\sum_\nu \varphi(b_\nu) s^\nu\right) \\
&= \Phi\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu\right) \Phi\left(\sum_\nu b_\nu T^\nu\right).
\end{aligned}$$

Weiter sind die Eigenschaften (i) und (ii) klar nach Definition von Φ. Die Tatsache, dass Φ durch diese Eigenschaften festgelegt ist, folgt mit Bemerkung 1.1.7. □

Folgerung 1.1.10. *Es seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und R ein K1-Ring. Jedes Element $r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ definiert einen* Auswertungshomomorphismus

$$\varepsilon_r\colon R[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; R, \qquad f = \sum a_\nu T^\nu \;\mapsto\; f(r) := \sum a_\nu r^\nu.$$

Folgerung 1.1.11. *Es sei R ein K1-Ring. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\begin{aligned}
R[T_1, \ldots, T_n] &\;\to\; R[T_1, \ldots, T_{n-1}][T], \\
T_i &\;\mapsto\; \begin{cases} T_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ T, & i = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Folgerung 1.1.12. *Es sei R ein K1-Ring. Ist R ein Integritätsring, so ist auch $R[T_1, \dots, T_n]$ ein Integritätsring.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage bekannt. Für $n \geq 1$ ergibt sich die Aussage per Induktion aus Folgerung 1.1.11. □

Definition 1.1.13. Es sei R ein K1-Ring.

(i) Eine *R-Algebra* ist ein K1-Ring S zusammen mit einem Homomorphismus $\imath \colon R \to S$, genannt *Strukturhomomorphismus*.
(ii) Ein *Homomorphismus* von R-Algebren S und S' mit Strukturhomomorphismen $\imath \colon R \to S$ bzw. $\imath' \colon R \to S'$ ist ein Homomorphismus $\varphi \colon S \to S'$ von K1-Ringen mit $\varphi \circ \imath = \imath'$.

Beispiel 1.1.14. Es sei R ein K1-Ring. Der Polynomring $R[T_1, \dots, T_n]$ besitzt einen kanonischen Strukturhomomorphismus $R \to R[T_1, \dots, T_n]$, $a \mapsto aT^0$ und ist somit eine R-Algebra.

Beispiel 1.1.15. Es seien R ein K1-Ring und X eine Menge. Die Menge $\mathrm{Abb}(X, R)$ aller R-wertigen Abbildungen auf einer Menge X ist eine R-Algebra: Mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(x) \ := \ \varphi(x) + \psi(x), \qquad\qquad (\varphi \cdot \psi)(x) \ := \ \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

ist sie ein K1-Ring und der Strukturhomomorphismus $R \to \mathrm{Abb}(X, R)$ ordnet jedem $a \in R$ die konstante Abbildung $x \mapsto a$ zu.

Satz 1.1.16. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann hat man einen kanonischen Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren:*

$$\Phi \colon \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n] \ \to \ \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}), \qquad\qquad f \ \mapsto \ [x \mapsto f(x)].$$

Besitzt der Körper $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente, so ist der Homomorphismus Φ injektiv.

Beweis. Die obige Zuordnung Φ ist punktweises Auswerten und somit ein Homomorphismus. Die Injektivität von Φ erhält man durch Induktion über n:

Zum Fall $n = 1$. Es sei $f \in \mathrm{Kern}(\Phi)$. Da $\mathbb{K}$ unendlich ist, hat f unendlich viele Nullstellen. Das impliziert $f = 0$.

Zum Induktionsschritt $n - 1 \to n$. Es sei $f \in \mathrm{Kern}(\Phi)$. Dann kann man das Polynom f schreiben als

$$f \ = \ \sum f_i T_n^i, \qquad \text{wobei } f_i \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n-1}].$$

Wir müssen $f_i = 0$ für alle i nachweisen. Hätte man $f_j \neq 0$ für ein j, so gäbe es nach Induktionsvoraussetzung ein $a \in \mathbb{K}^{n-1}$ mit $f_j(a) \neq 0$. Damit hätte man

$$f(a, T_n) \ = \ \sum f_i(a) T_n^i, \ \neq \ 0 \ \in \ \mathbb{K}[T_n].$$

Der Fall $n = 1$ liefert dann ein $b \in \mathbb{K}$ mit $f(a, b) \neq 0$. Das steht im Widerspruch zu $f \in \mathrm{Kern}(\Phi)$. Daher müssen alle f_i verschwinden. □

Konstruktion 1.1.17 (Ring der Laurent-Polynome)**.** Es sei R ein K1-Ring. Ein *Laurent-Polynom* in den Variablen $T_1, \dots, T_n$ über R ist ein Ausdruck

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu T^\nu, \quad T^\nu := T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}, \ a_\nu \in R, \ a_\nu \neq 0 \text{ für nur endlich viele } \nu \in \mathbb{Z}^n.$$

Dabei nennt man $a_\nu T^\nu$ mit $a_\nu \neq 0$ einen *Term* und a_ν seinen *Koeffizienten*. Ein *Laurent-Monom* ist ein Term der Form $T^\nu := 1T^\nu$.

Zwei Laurent-Polynome $\sum a_\nu T^\nu$ und $\sum b_\nu T^\nu$ sind nach Definition genau dann gleich, wenn $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Mit den Operationen

$$\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} b_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} (a_\nu + b_\nu) T^\nu,$$

$$\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} b_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} c_\nu T^\nu, \qquad \text{wobei } c_\nu := \sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa,$$

wird die Menge $R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ aller Laurent-Polynome in den Variablen $T_1, \ldots, T_n$ über R zu einem K1-Ring. Die neutralen Elemente sind

$$0_{R[T_1^{\pm 1},\ldots,T_n^{\pm 1}]} = 0_R T^0, \qquad 1_{R[T_1^{\pm 1},\ldots,T_n^{\pm 1}]} = 1_R T^0.$$

Bemerkung 1.1.18. Es sei R ein K1-Ring. Der Ring $R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ der Laurent-Polynome wird durch den Strukturhomomorphismus $R \to R[T_1, \ldots, T_n]$, $a \mapsto aT^0$ zu einer R-Algebra.

Bemerkung 1.1.19. Es sei R ein K1-Ring. Dann ist die Menge der Laurent-Monome

$$\mathfrak{LM}(n) := \{T^\nu;\ \nu \in \mathbb{Z}^n\}$$

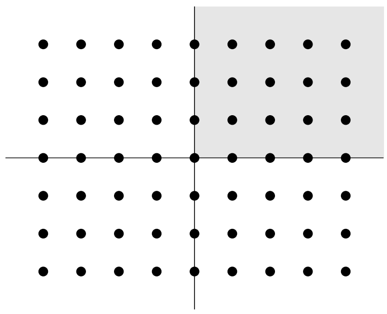
eine Untergruppe der (multiplikativen) Einheitengruppe $R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]^*$. Weiter hat zueinander inverse Isomorphismen abelscher Gruppen

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{LM}(n) & \longleftrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ \lambda\colon T^\nu & \mapsto & \nu, \\ T^\nu & \leftarrow\!\shortmid & \nu : \eta. \end{array}$$

Dabei bildet η das additive Monoid $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ auf das multiplikative Monoid der (üblichen) Monome ab:

$$\eta(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) = \mathfrak{M}(n) := \{T^\nu;\ \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}.$$

Damit lassen sich Laurent-Monome und Monome anschaulich als Gitterpunkte in $\mathbb{Q}^n$ darstellen:



Aufgaben zu Abschnitt 1.1.

Aufgabe 1.1.20. Es seien R ein K1-Ring, $S \subseteq R$ ein Unterring und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Zeige:

(i) $S[a_1, \ldots, a_n] \subseteq R$ ist der kleinste Unterring von R, der S und $a_1, \ldots, a_n$ enthält.
(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\Phi\colon S[T_1, \ldots, T_n] \to R$ mit $\Phi(s) = s$ für alle $s \in S$ und $\Phi(T_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
(iii) Der Homomorphismus Φ aus (ii) hat $S[a_1, \ldots, a_n]$ als Bild.

Aufgabe 1.1.21. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Welcher der folgenden Unterringe von $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ ist isomorph zu einem Polynomring über $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[T_1^2, T_2^2], \qquad \mathbb{K}[T_1 T_2], \qquad \mathbb{K}[T_1^2, T_1 T_2, T_2^2]\,?$$

Aufgabe 1.1.22. Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Zeige: Der kanonische Homomorphismus $\Phi\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, $f \mapsto [x \mapsto f(x)]$ ist surjektiv.

Aufgabe 1.1.23. Es sei R ein K1-Ring. Zeige: Ist R ein Integritätsring, so ist auch der Ring $R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ der Laurentpolynome ein Integritätsring.

Aufgabe 1.1.24. Es sei R ein Integritätsring. Zeige: Die Einheitengruppen in des Polynomrings bzw. des Ringes der Laurent-Polynome sind gegeben durch

$$R[T_1, \ldots, T_n]^* \;=\; \{aT^0;\ a \in R^*\}, \qquad R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]^* \;=\; \{aT^\nu;\ a \in R^*,\ \nu \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 1.1.25. Zeige, dass $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[T]$, $\sum a_\nu T^\nu \mapsto \sum \overline{a_\nu} T^\nu$ ein Homomorphismus von K1-Ringen ist, aber kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren.

Aufgabe 1.1.26. Jede R-Algebra S wird auf kanonische Weise zu einem R-Modul: Bezeichnet $\imath\colon R \to S$ den Strukturhomomorphismus, so definiert man die Skalarmultiplikation durch

$$R \times S \;\to\; S, \qquad (r, s) \;\mapsto\; rs \;:=\; \imath(r)s.$$

Es seien nun S, S' zwei R-Algebren und $\varphi\colon S \to S'$ ein Homomorphismus von K1-Ringen. Zeige, dass φ genau dann ein Homomorphismus der R-Algebren S und S' ist, wenn φ ein Homomorphismus der R-Moduln S und S' ist.

Aufgabe 1.1.27. Es seien R ein K1-Ring und M eine Menge. Der *freie R-Modul über M* ist der Untermodul

$$R[M] \;:=\; \{\alpha\colon M \to R;\ \alpha(u) = 0 \text{ für fast alle } u \in M\} \;\subseteq\; \mathrm{Abb}(R, M),$$

wobei die Verknüpfungen durch $(\alpha + \beta)(u) = \alpha(u) + \beta(u)$ und $(r\beta)(u) = r\beta(u)$ gegeben sind. Betrachte die charakteristischen Funktionen

$$\chi^u\colon M \to R, \quad v \mapsto \begin{cases} 1_R, & \text{für } v = u, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeige, dass jedes Element $\alpha \in R[M]$ sich mit $a_u := \alpha(u) \in R$ eindeutig darstellen lässt als

$$\alpha \;=\; \sum_{u \in M} a_u \chi^u.$$

Insbesondere bilden die charakteristischen Funktionen eine R-Basis $(\chi^u;\ u \in M)$ für M und wir haben

$$R[M] \;=\; \bigoplus_{u \in M} R\chi^u.$$

Aufgabe 1.1.28. Es seien M ein abelsches Monoid und $R[M]$ der freie R-Modul über R. Betrachte $R[M]$ mit der Multiplikation definiert durch

$$\left(\sum_{u \in M} a_u \chi^u\right) \cdot \left(\sum_{v \in M} b_v \chi^v\right) := \sum_{w \in M} c_w \chi^w, \quad \text{wobei } c_w := \sum_{w = u + v} a_u b_v$$

und die Abbildung $\imath\colon R \to R[M]$, $r \mapsto r\chi^{0_M}$. Zeige, dass $R[M]$ zusammen mit $\imath$ eine R-Algebra ist; man nennt $R[M]$ die *Monoidalgebra* über M. Beweise folgende Aussagen:

(i) Es gilt stets $\chi^u\chi^v = \chi^{u+v}$ und die neutralen Elemente von $R[M]$ sind $0_R\chi^{0_M}$ sowie $1_R\chi^{0_M}$.
(ii) Ist das Monoid M erzeugt durch die Teilmenge $A \subseteq M$, so ist die R-Algebra $R[M]$ erzeugt durch die Teilmenge $\{\chi^u;\ u \in A\} \subseteq R[M]$.
(iii) Ist $F\colon M \to M'$ ein Monoidhomomorphismus, so wird durch $\chi^u \mapsto \chi^{F(u)}$ ein Homomorphismus $\psi_F\colon R[M] \to R[M']$ definiert.
(iv) Sind $F\colon M \to M'$ und $H\colon M' \to M''$ Monoidhomomorphismen, so hat man $\psi_{H\circ F} = \psi_H \circ \psi_F$ für die zugehörigen Homomorphismen der Monoidalgebren.
(v) Man hat kanonische Isomorphismen $R[\mathbb{Z}^n_{\ge 0}] \cong R[T_1,\ldots,T_n]$, $\chi^u \mapsto T^u$ sowie $R[\mathbb{Z}^n] \cong R[T_1^{\pm 1},\ldots,T_n^{\pm 1}]$, $\chi^u \mapsto T^u$.

1.2. **Ideale.**

Erinnerung 1.2.1. Es sei R ein K1-Ring. Eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq R$ heißt *Ideal*, geschrieben $\mathfrak{a} \le R$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) Für je zwei $a, a' \in \mathfrak{a}$ gilt $a + a' \in \mathfrak{a}$.
(ii) Für jedes $r \in R$ und jedes $a \in \mathfrak{a}$ gilt $ra \in \mathfrak{a}$.

Die Teilmengen $\{0\} \subseteq R$ und $R \subseteq R$ sind stets Ideale in R. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gilt

$$\mathfrak{a} \ = \ R \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a} \cap R^* \ \neq \ \emptyset.$$

Über Bilder und Urbilder von Idealen unter einem Homomorphismus $\varphi\colon R \to S$ von K1-Ringen hat man folgende Aussagen:

(i) Ist $\mathfrak{b} \subseteq S$ ein Ideal, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq R$ ein Ideal.
(ii) Ist φ surjektiv und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq S$ ein Ideal.

Beispiel 1.2.2. Die Menge $2\mathbb{Z}$ der geraden Zahlen ist ein Ideal im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Allgemeiner gilt für eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{a} \ \le \ \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{a} \ = \ n\mathbb{Z} \text{ mit einem } n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

Konstruktion 1.2.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Das zugehörige *Verschwindungsideal* in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist

$$I(X) \ := \ \{f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n];\ f(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\} \ \le \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Beweis. Offenbar gilt $0 \in I(X)$. Sind weiter $f, g \in I(X)$ und $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben, so erhalten wir

$$(f+g)(x) \ = \ f(x) + g(x) \ = \ 0, \qquad\qquad (hf)(x) \ = \ h(x)f(x) \ = \ 0.$$

für jedes Element $x \in X$. Folglich liegen auch die Summe $f + g$ und das Produkt hf in $I(X)$. □

Erinnerung 1.2.4. Es sei R ein K1-Ring. Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq R$ *erzeugt* ein Ideal

$$\langle A \rangle \ := \ \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i;\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 1},\ r_i \in R,\ a_i \in A \right\} \ \le \ R$$

mit $A \subseteq \langle A \rangle$. Gilt $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, so schreibt man auch $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ für $\langle A \rangle$. Der Vollständigkeit halber setzt man $\langle \emptyset \rangle := \{0_R\}$.

Das von einem einzigen Element $a \in R$ erzeugte Ideal, auch das von a erzeugte *Hauptideal* genannt, ist gegeben durch

$$\langle a \rangle \ = \ Ra \ = \ \{ra;\ r \in R\}.$$

Beispiel 1.2.5. Für das von den ganzen Zahlen 4 und 6 erzeugte Ideal $\langle 4, 6 \rangle \le \mathbb{Z}$ haben wir

$$\langle 4, 6 \rangle \ = \ \langle 2 \rangle \ = \ 2\mathbb{Z}.$$

Dabei gilt offensichtlich $\langle 4, 6 \rangle \subseteq 2\mathbb{Z}$. Umgekehrt erhält man $2 = 6 - 4 \in \langle 4, 6 \rangle$, was $2\mathbb{Z} \subseteq \langle 4, 6 \rangle$ impliziert.

Definition 1.2.6. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Ideal $\mathfrak{a} \le \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ heißt *Monomialideal*, falls es von Monomen erzeugt wird, d.h., falls es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ gibt mit $\mathfrak{a} = \langle T^\mu; \mu \in M \rangle$.

Satz 1.2.7. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathfrak{a} \le \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Monomialideal und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

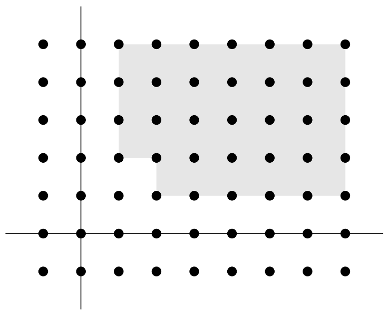
(i) *Es gilt $f \in \mathfrak{a}$.*
(ii) *Für jedes Monom T^ν von f gilt $T^\nu \in \mathfrak{a}$.*

Beweis. Es ist nur bei der Implikation "(i)⇒(ii)" etwas zu zeigen. Es sei $M \subseteq \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ eine Teilmenge, sodass $\mathfrak{a}$ durch die Monome T^μ, $\mu \in M$, erzeugt wird. Dann hat man eine Darstellung

$$f \quad = \quad \sum_{\mu \in M} g_\mu T^\mu$$

mit Polynomen $g_\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Ausmultiplizieren der rechten Seite und anschliessender Vergleich der Monome zeigt, dass jedes Monom von f Vielfaches eines T^μ mit $\mu \in M$ ist. □

Bemerkung 1.2.8. Satz 1.2.7 ermöglicht es, Monomialideale $\mathfrak{a} \le \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ zu veranschaulichen: Es genügt, die in $\mathfrak{a}$ vorkommenden Monome anzugeben.



$$\mathfrak{a} \ := \ \langle T^\mu;\ \mu \in M \rangle \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1, T_2], \qquad M \ := \ \{(2,1), (2,2), (1,2)\}.$$

Wir nennen $\lambda(\mathfrak{a}) := \{\mu \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0};\ T^\mu \in \mathfrak{a}\}$ die *Exponentenmenge* des Monomialideals $\mathfrak{a} \le \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Konstruktion 1.2.9. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, eine Familie von Idealen. Dann erhält man neue Ideale in R:

(i) Den *Durchschnitt* der Ideale $\mathfrak{a}_i$:

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i \quad \le \quad R.$$

(ii) Die *Summe* der Ideale $\mathfrak{a}_i$:

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \quad := \quad \left\{ \sum_{j \in J} a_j;\ J \subseteq I \text{ endlich},\ a_j \in \mathfrak{a}_j \right\} \quad \le \quad R.$$

(iii) Falls I endlich ist, das *Produkt* der Ideale $\mathfrak{a}_i$:

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i \quad := \quad \left\langle \prod_{i \in I} a_i;\ a_i \in \mathfrak{a}_i \right\rangle \quad \le \quad R.$$

Bemerkung 1.2.10. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, eine (erforderlichenfalls endliche) Familie von Idealen in R. Dann gilt

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \ = \ \left\langle \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \right\rangle, \qquad\qquad \prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i \ \subseteq \ \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i.$$

Beispiel 1.2.11. Für die von den ganzen Zahlen 4 bzw. 6 erzeugten Ideale $\langle 4\rangle$ bzw. $\langle 6\rangle$ in $\mathbb{Z}$ haben wir

$$\langle 4\rangle + \langle 6\rangle \;=\; \langle 4,6\rangle \;=\; \langle 2\rangle, \qquad \langle 4\rangle\langle 6\rangle \;=\; \langle 24\rangle \;\subsetneq\; \langle 12\rangle \;=\; \langle 4\rangle \cap \langle 6\rangle.$$

Man beachte dabei, dass $\langle 4\rangle + \langle 6\rangle$ von $2 = \mathrm{ggT}(4,6)$ erzeugt wird und $\langle 4\rangle \cap \langle 6\rangle$ von $12 = \mathrm{kgV}(4,6)$.

Beispiel 1.2.12. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ der Polynomring in den Variablen $T_1,\ldots,T_n$, und für $x \in \mathbb{K}^n$ bezeichne

$$\varepsilon_x\colon \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n] \;\to\; \mathbb{K}, \qquad f \;\mapsto\; f(x)$$

wie gewohnt den Auswertungshomomorphismus. Ist $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge, so gilt für deren Verschwindungsideal

$$I(X) \;=\; \{f \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n];\; f(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\} \;=\; \bigcap_{x\in X} \mathrm{Kern}(\varepsilon_x).$$

Konstruktion 1.2.13. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale. Der *Quotient* von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ ist

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \;:=\; \{r \in R;\; r\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\} \;\leq\; R.$$

Beweis. Offenbar gilt $0\mathfrak{b} = \{0\} \subseteq \mathfrak{a}$ und somit $0 \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$. Sind $r, r' \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ und $s \in R$ gegeben, so erhalten wir $r + r' \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ und $s \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ mit

$$(r + r')\mathfrak{b} \;\subseteq\; r\mathfrak{b} + r'\mathfrak{b} \;\subseteq\; \mathfrak{a}, \qquad (sr)\mathfrak{b} \;\subseteq\; s\mathfrak{a} \;\subseteq\; \mathfrak{a}.$$

□

Konstruktion 1.2.14. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $\mathfrak{a}$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \;:=\; \{r \in R;\; r^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \;\leq\; R.$$

Das *Nilradikal* von R ist $\mathfrak{n}_R := \sqrt{\{0\}}$. Falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gilt, so nennt man $\mathfrak{a}$ ein *Radikalideal*.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal ist. Offenbar gilt $\emptyset \neq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Sind $a, b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ gegeben, so gibt es $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $a^n, b^m \in \mathfrak{a}$. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(a + b)^k \;=\; \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^l.$$

Wählt man nun k genügend groß, so ergibt sich aus dieser Darstellung, dass $a + b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt. Sind $a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ und $r \in R$ gegeben, so gilt $a^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Damit folgt $(ra)^n = r^n a^n \in \mathfrak{a}$ und somit $ra \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Bemerkung 1.2.15. Es sei R ein K1-Ring. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gilt $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Konstruktion 1.2.16 (Faktorring)**.** Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a} \leq R$ ein Ideal. Die Menge $R/\mathfrak{a} := \{r + \mathfrak{a};\; r \in R\}$ ist zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (r + \mathfrak{a}) + (s + \mathfrak{a}) \;&:=\; (r + s) + \mathfrak{a}, \\ (r + \mathfrak{a})(s + \mathfrak{a}) \;&:=\; rs + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

ein K1-Ring, der *Faktorring* von R nach $\mathfrak{a}$. Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation in $R/\mathfrak{a}$ sind

$$0 + \mathfrak{a} \;\in\; R/\mathfrak{a}, \qquad 1 + \mathfrak{a} \;\in\; R/\mathfrak{a}.$$

Man hat einen kanonischen Epimorphismus mit Kern $\mathfrak{a}$ von dem K1-Ring R auf den Faktorring $R/\mathfrak{a}$:

$$\pi\colon R \ \to\ R/\mathfrak{a}, \qquad r \ \mapsto\ r+\mathfrak{a}.$$

Satz 1.2.17 (Homomorphiesatz)**.** *Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Homomorphismus von K1-Ringen, und es sei $\mathfrak{a} \le R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi\colon r\mapsto\varphi(r)"] \arrow[dr, "\pi\colon r\mapsto r+\mathfrak{a}"'] & & S \\
& R/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\overline{\varphi}\colon r+\mathfrak{a}\mapsto\varphi(r)"'] &
\end{tikzcd}$$

von wohldefinierten Homomorphismen zwischen K1-Ringen. Dabei ist der Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon R/\mathfrak{a} \to S$ durch $\varphi\colon R \to S$ und das obige Diagramm eindeutig bestimmt. Es gilt weiter

(i) *$\overline{\varphi}$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathrm{Kern}(\varphi)$,*
(ii) *$\overline{\varphi}$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ φ ist surjektiv.*

Satz 1.2.18. *Es seien R ein K1-Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die Projektion. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{l}\text{Ideale } \mathfrak{b} \subseteq R \\ \text{mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ideale } \mathfrak{c} \subseteq R/\mathfrak{a}\} \\
\mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\
\pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{c}.
\end{array}$$

Bemerkung 1.2.19. Es seien S, R zwei K1-Ringe und R eine S-Algebra mit Strukturhomomorphismus $\imath\colon S \to R$. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so ist $R/\mathfrak{a}$ eine S-Algebra mit Strukturhomomorphismus $\pi \circ \imath\colon S \to R/\mathfrak{a}$. Wie für Ringe hat man auch für Algebren einen Homomorphiesatz.

Definition 1.2.20. Es sei R ein K1-Ring. Ein Element $r \in R$ heißt *nilpotent*, falls $r^n = 0$ mit einem $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ gilt. Man nennt R *reduziert*, falls 0 das einzige nilpotente Element in R ist.

Bemerkung 1.2.21. Ein Element eines K1-Ringes R ist genau dann nilpotent, wenn es im Nilradikal $\mathfrak{n}_R = \sqrt{0}$ liegt. Insbesondere bilden die nilpotenten Elemente von R ein Ideal.

Satz 1.2.22. *Es seien R ein K1-Ring, $\mathfrak{n}_R \subseteq R$ sein Nilradikal und $\pi\colon R \to R/\mathfrak{n}_R$ die Projektion.*

(i) *Der Faktorring $R/\mathfrak{n}_R$ ist reduziert.*
(ii) *Ist $\varphi\colon R \to S$ ein Homomorphismus in einen reduzierten K1-Ring S, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon R/\mathfrak{n}_R \to S$ mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S \\
& R/\mathfrak{n}_R \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zum Nachweis von Aussage (i) sei $s \in R/\mathfrak{n}_R$ nilpotent. Dann gilt $s^n = 0$ mit einem $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Wir wählen ein $r \in R$ mit $\pi(r) = s$. Dann gilt $r^n \in \ker(\pi) = \mathfrak{n}_R$. Es folgt $r \in \mathfrak{n}_R$ und somit $s = 0$.

Für Aussage (ii) ist nach dem Homomorphiesatz 1.2.17 lediglich $\mathfrak{n}_R \subseteq \ker(\varphi)$ zu zeigen. Ist $r \in \mathfrak{n}_R$ gegeben, so gilt $r^n = 0$ mit einem $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Es folgt $\varphi(r)^n = \varphi(r^n) = 0$. Da S reduziert ist, erhalten wir $\varphi(r) = 0$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 1.2.

Aufgabe 1.2.23. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass Durchschnitt, Summe, Produkt und Quotient von Monomialidealen in $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ wieder Monomialideale in $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ sind.

Aufgabe 1.2.24. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte den Polynomring $\mathbb{K}[T_1,T_2]$ und darin die Monomialideale $\mathfrak{a} := \langle T_1^2T_2\rangle$ sowie $\mathfrak{b} := \langle T_1T_2^2\rangle$. Veranschauliche wie in Bemerkung 1.2.8 die Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$.

Aufgabe 1.2.25. Es seien $m,n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Beweise die folgenden Identitäten:

$$\langle m\rangle \cap \langle n\rangle \;=\; \langle \mathrm{kgV}(m,n)\rangle, \qquad \langle m\rangle + \langle n\rangle \;=\; \langle \mathrm{ggT}(m,n)\rangle,$$
$$\langle m\rangle\langle n\rangle \;=\; \langle mn\rangle, \qquad (\langle m\rangle : \langle n\rangle) = \langle m/\mathrm{ggT}(m,n)\rangle.$$

Aufgabe 1.2.26. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_i$, $i\in I$ und $\mathfrak{b}_j$, $j\in J$, Ideale eines K1-Ringes R. Beweise folgende Aussagen:

(i) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}$,
(ii) $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) \supseteq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$; Gleichheit gilt, falls $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{a}$ gilt,
(iii) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$,
(iv) $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$,
(v) $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$,
(vi) $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$,
(vii) $(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b}) = \bigcap_{i\in I}(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$,
(viii) $(\mathfrak{a}:\sum_{j\in J}\mathfrak{b}_j) = \bigcap_{j\in J}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_j)$.

Aufgabe 1.2.27. Es seien R und S K1-Ringe, $\psi\colon R\to S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subseteq R$ sowie $\mathfrak{c}\subseteq S$ Ideale. Beweise folgende Aussagen:

(i) $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}\cap\sqrt{\mathfrak{b}}$,
(ii) $\psi(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq \sqrt{\langle\psi(\mathfrak{a})\rangle}$,
(iii) $\psi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{c}}) = \sqrt{\psi^{-1}(\mathfrak{c})}$.

Aufgabe 1.2.28. Beweise die folgenden Isomorphien von K1-Ringen.

(i) $\mathbb{K}[T_1^{\pm1},T_2^{\pm1}] \cong \mathbb{K}[T_1,T_2]/\langle T_1T_2-1\rangle$,
(ii) $\mathbb{K}[T^2,T^3] \cong \mathbb{K}[T_1,T_2]/\langle T_1^3-T_2^2\rangle$, wobei $\mathbb{K}[T^2,T^3]\subseteq\mathbb{K}[T]$,
(iii) $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]/\langle aT_n-g\rangle \cong \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_{n-1}]$, wobei $a\in\mathbb{K}^*$ und $g\in\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_{n-1}]$.

1.3. Primideale und maximale Ideale.

Erinnerung 1.3.1. Es seien R ein Integritätsring und $a, b \in R$. Man nennt a einen *Teiler von* b, geschrieben $a \mid b$, falls $b = ra$ mit einem $r \in R$ gilt. Es gilt

$$a \mid b \iff b \in \langle a \rangle \iff \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle,$$

$$a \mid b \text{ und } b \mid a \iff \langle a \rangle = \langle b \rangle \iff b = ca \text{ mit einem } c \in R^*.$$

Ein Element $0 \neq p \notin R^*$ heißt *prim*, falls $p|ab$ mit $a, b \in R$ stets $p|a$ oder $p|b$ impliziert. Die positiven Primelemente von $\mathbb{Z}$ sind genau die Primzahlen.

Definition 1.3.2. Es sei R ein K1-Ring. Ein Ideal $\mathfrak{p} \leq R$ heißt *Primideal*, falls folgendes gilt:

(i) $\mathfrak{p}$ ist ein echtes Ideal in R, d.h., es gilt $\mathfrak{p} \neq R$;
(ii) sind $a, b \in R$ mit $ab \in \mathfrak{p}$, so gilt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$.

Satz 1.3.3. *Es seien R ein Integritätsring und $p \in R \setminus \{0\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *p ist ein Primelement;*
(ii) *$\langle p \rangle$ ist ein Primideal.*

Beweis. Zur Implikation "(i)⇒(ii)". Zunächst müssen wir zeigen, dass $\langle p \rangle \neq R$ gilt. Andernfalls hätten wir $1 \in \langle p \rangle$. Das bedeutet $1 = rp$ mit einem $r \in R$, und p müsste eine Einheit sein. Widerspruch zu p prim. Es seien nun $a, b \in R$ mit $ab \in \langle p \rangle$. Dann gilt $p \mid ab$. Da p prim ist, folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$, was wiederum $a \in \langle p \rangle$ oder $b \in \langle p \rangle$ liefert.

Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Nach Voraussetzung gilt $p \neq 0$, und wegen $\langle p \rangle \neq R$ kann p keine Einheit sein. Es seien nun $a, b \in R$ mit $p \mid ab$. Dann gilt $ab \in \langle p \rangle$. Da $\langle p \rangle$ ein Primideal ist, muss $a \in \langle p \rangle$ oder $b \in \langle p \rangle$ gelten. Damit erhalten wir $p \mid a$ oder $p \mid b$. □

Erinnerung 1.3.4. Es sei R ein K1-Ring. Ein *multiplikatives Monoid* in R ist eine Teilmenge $S \subseteq R$ mit $1 \in S$ sodass $a, b \in S$ stets $ab \in S$ impliziert.

Satz 1.3.5. *Es sei R ein K1-Ring, und es sei $\mathfrak{p} \leq R$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{p}$ ist ein Primideal.*
(ii) *$R \setminus \mathfrak{p}$ ist ein multiplikatives Monoid.*
(iii) *$R/\mathfrak{p}$ ist Integritätsring.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Wegen $\mathfrak{p} \neq R$ gilt $1 \in R \setminus \mathfrak{p}$. Weiter liefert die Definition des Primideals $ab \notin \mathfrak{p}$ für je zwei $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$.

Zu "(ii)⇒(iii)". Wegen $1 \in R \setminus \mathfrak{p}$ gilt $1 \neq 0 \in R/\mathfrak{p}$. Sind $a + \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p} \neq b + \mathfrak{p}$ in $R/\mathfrak{p}$ gegeben, so gilt $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$ und es folgt $ab \in R \setminus \mathfrak{p}$. Das bedeutet

$$(a + \mathfrak{p})(b + \mathfrak{p}) \ = \ ab + \mathfrak{p} \ \neq \ 0 \ \in \ R/\mathfrak{p}.$$

Zu "(iii)⇒(i)". Aus $1 \neq 0 \in R/\mathfrak{p}$ folgt $1 \notin \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} \neq R$. Sind $a, b \in R$ mit $ab \in \mathfrak{p}$ gegeben, so folgt $ab + \mathfrak{p} = 0 \in R/\mathfrak{p}$. Da $R/\mathfrak{p}$ keine echten Nullteiler besitzt, erhalten wir $a + \mathfrak{p} = 0 \in R/\mathfrak{p}$ oder $b + \mathfrak{p} = 0 \in R/\mathfrak{p}$. Das bedeutet $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. □

Satz 1.3.6. *Es sei $\varphi \colon R \to S$ ein Homomorphismus von K1-Ringen.*

(i) *Ist $\mathfrak{q} \subseteq S$ ein Primideal, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq R$ ein Primideal.*

(ii) *Ist φ surjektiv und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal mit* $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}$*, so ist* $\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq S$ *ein Primideal.*

Beweis. Zu (i). Als Urbild eines Ideals ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ein Ideal. Weiter gilt $1 \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, da wir sonst $1 = \varphi(1) \in \mathfrak{q}$ hätten im Widerspruch zu $\mathfrak{q} \neq S$. Sind $r, r' \in R$ mit $rr' \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ gegeben, so erhalten wir $\varphi(r)\varphi(r') \in \mathfrak{q}$. Es folgt $\varphi(r) \in \mathfrak{q}$ oder $\varphi(r') \in \mathfrak{q}$. Das bedeutet $r \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ oder $r' \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$.

Zu (ii). Wir zeigen, dass $1 \notin \varphi(\mathfrak{p})$ gilt. Andernfalls hätte man $1 = \varphi(r)$ mit einem $r \in \mathfrak{p}$. Mit $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $1 = r + (1 - r) \in \mathfrak{p}$, Widerspruch. Es seien nun $s, s' \in S$ mit $ss' \in \varphi(\mathfrak{p})$ gegeben. Dann gibt es $r, r' \in R$ mit $s = \varphi(s)$ und $s' = \varphi(r')$. Es gilt $\varphi(rr') = ss'$ und wegen $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}$ ergibt sich $rr' \in \mathfrak{p}$. Es folgt $r \in \mathfrak{p}$ oder $r' \in \mathfrak{p}$. Also haben wir $s \in \varphi(\mathfrak{p})$ oder $s' \in \varphi(\mathfrak{p})$. □

Folgerung 1.3.7. *Es seien R ein K1-Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$ die Projektion. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Primideale } \mathfrak{p} \subseteq R \\ \textit{mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \{\textit{Primideale } \mathfrak{q} \subseteq R/\mathfrak{a}\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q}. \end{array}$$

Definition 1.3.8. Es sei R ein K1-Ring. Ein Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ heißt *maximal*, falls folgendes gilt:

(i) $\mathfrak{m}$ ist ein echtes Ideal in R, d.h., es gilt $\mathfrak{m} \neq R$;
(ii) für jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Beispiel 1.3.9. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist das Ideal $\langle T \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$ maximal in $\mathbb{K}[T]$. Offensichtlich gilt

$$\langle T \rangle \quad = \quad \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu T^\nu;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ a_\nu \in \mathbb{K} \right\}.$$

Jedes $f \in \mathbb{K}[T] \setminus \langle T \rangle$ ist also von der Form $f = c + f'$ mit $f' \in \langle T \rangle$ und $c \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}[T]^*$. Folglich enthält jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T]$ mit $\langle T \rangle \subsetneq \mathfrak{a}$ Einheiten. Insbesondere kann $\langle T \rangle$ nicht echte Teilmenge eines echten Ideals sein.

Satz 1.3.10. *Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{m} \leq R$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathfrak{m}$ *ist maximal,*
(ii) $R/\mathfrak{m}$ *ist ein Körper.*

Beweis. Zur Implikation “(i)⇒(ii)”. Wegen $\mathfrak{m} \neq R$ gilt $1 \neq 0$ in $R/\mathfrak{m}$. Wir zeigen, dass jedes Element $0 \neq a + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}$ eine Einheit in $R/\mathfrak{m}$ ist. Wir betrachten das Ideal

$$\mathfrak{a} \ := \ Ra + \mathfrak{m} \ \leq \ R.$$

Wegen $a \notin \mathfrak{m}$ gilt $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a}$ und mit der Maximalität von $\mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{a} = R$. Insbesondere erhalten wir eine Darstellung $1 = ca + m \in R$ mit einem $c \in R$ und einem $m \in \mathfrak{m}$. Folglich ist $a + \mathfrak{m}$ eine Einheit in $R/\mathfrak{m}$.

Zur Implikation “(ii)⇒(i)”. Wir arbeiten mit dem kanonischen Epimorphismus $\pi\colon R \to R/\mathfrak{m}$. Wegen $1 \neq 0 \in R/\mathfrak{m}$ ist $\mathfrak{m} = \pi^{-1}(0)$ ein echtes Ideal. Es sei nun $\mathfrak{a} \leq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$. Dann ist $\pi(\mathfrak{a})$ ein Ideal in $R/\mathfrak{m}$ und folglich gilt

$$\pi(\mathfrak{a}) \ = \ R/\mathfrak{m} \qquad \text{oder} \qquad \pi(\mathfrak{a}) \ = \ \{0 + \mathfrak{m}\}.$$

Im Fall $\pi(\mathfrak{a}) = R/\mathfrak{m}$ gibt es ein $r \in \mathfrak{a}$ mit $\pi(r) = r + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$. Das bedeutet $1 - r \in \mathfrak{m}$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$ folgt $1 \in \mathfrak{a}$ und somit $\mathfrak{a} = R$. Im Fall $\pi(\mathfrak{a}) = \{0 + \mathfrak{m}\}$ erhalten wir $\mathfrak{a} \subseteq \pi^{-1}(\pi(\mathfrak{a})) = \pi^{-1}(0 + \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Das bedeutet $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$. $\square$

Folgerung 1.3.11. *Es sei R ein K1-Ring. Dann ist jedes maximale Ideal in R ein Primideal in R.*

Beispiel 1.3.12. Im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist $\{0\} \leq \mathbb{Z}$ ein Primideal, aber nicht maximal. Für jedes Ideal $\{0\} \neq \mathfrak{a} \leq \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \text{ Primideal} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{Z}/\mathfrak{a} \text{ Integritätsring} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{Z}/\mathfrak{a} \text{ Körper} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a} \text{ maximales Ideal.} \end{aligned}$$

Lemma 1.3.13 (Zorn)**.** *Es sei M eine nichtleere teilgeordnete Menge. Besitzt jede nichtleere total geordnete Teilmenge $M' \subseteq M$ eine obere Schranke in M, so enthält M maximale Elemente.*

Satz 1.3.14. *Es seien R ein K1-Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid und $\mathfrak{a} \subseteq R \setminus S$ ein Ideal in R.*

(i) *Die Menge $M := \{\mathfrak{b} \leq R;\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq R \setminus S\}$ besitzt maximale Elemente.*
(ii) *Jedes maximale Element aus M ist ein Primideal.*

Beweis. Zu (i). Offenbar ist M teilgeordnet bezüglich "$\subseteq$" und wegen $\mathfrak{a} \in M$ ist M nicht leer. Nach dem Zornschen Lemma genügt es zu zeigen, dass jede total geordnete Teilmenge $\emptyset \neq M' \subseteq M$ eine obere Schranke in M besitzt. Unser Kandidat hierfür ist die Menge

$$\mathfrak{b} \ := \ \bigcup_{\mathfrak{b}' \in M'} \mathfrak{b}' \ \subseteq \ R \setminus S.$$

Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b}$ nicht leer. Wir zeigen, dass $\mathfrak{b}$ ein Ideal ist. Sind $r, s \in \mathfrak{b}$, so gilt $r \in \mathfrak{b}'$ und $s \in \mathfrak{b}''$ mit $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' \in M'$. Da M' total geordnet ist, haben wir $\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b}''$ oder $\mathfrak{b}'' \subseteq \mathfrak{b}'$. Im ersten Fall ergibt sich $r, s \in \mathfrak{b}''$ und somit $r + s \in \mathfrak{b}$. Im zweiten Fall haben wir $r, s \in \mathfrak{b}'$ und somit $r + s \in \mathfrak{b}$. Ebenso sieht man, dass für $r \in R$ und $s \in \mathfrak{b}$ stets $rs \in \mathfrak{b}$ gilt. Das verifiziert $\mathfrak{b} \in M$ und somit ist $\mathfrak{b}$ eine obere Schranke von M' in M.

Zu (ii). Es sei $\mathfrak{p}$ maximales Element in M. Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ prim ist. Wegen $1 \in S$ gilt $1 \notin \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} \neq R$. Nehmen wir an, es existieren $r_1, r_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $r_1 r_2 \in \mathfrak{p}$. Dann sind die Ideale $\mathfrak{p} + \langle r_i \rangle$ echte Obermengen von $\mathfrak{p}$ und liegen somit nicht in M. Also gibt es Elemente $s_i \in \mathfrak{p} + \langle r_i \rangle \cap S$. Da S multiplikatives Monoid ist, hat man $s_1 s_2 \in S$. Andererseits gilt $s_i = p_i + a_i r_i$ mit gewissen $p_i \in \mathfrak{p}$ und $a_i \in R$. Nun liegt $r_1 r_2$ nach Annahme in $\mathfrak{p}$, und wir kommen zu einem Widerspruch:

$$s_1 s_2 \ = \ p_1 p_2 + p_1 a_2 r_2 + p_2 a_1 r_1 + a_1 a_2 r_1 r_2 \ \in \ \mathfrak{p} \ \subseteq \ R \setminus S.$$

$\square$

Folgerung 1.3.15. *Jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \leq R$ eines K1-Ringes R ist in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ enthalten.*

Beweis. Man wende Satz 1.3.14 auf das multiplikative Monoid $S = \{1\}$ an. $\square$

Satz 1.3.16. *Es sei R ein K1-Ring.*

(i) *Das Nilradikal $\mathfrak{n}_R = \sqrt{0}$ ist der Durchschnitt aller Primideale von R.*
(ii) *Für jedes $\mathfrak{a} \leq R$ ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ der Durchschnitt aller Primideale $\mathfrak{p} \subseteq R$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.*

Beweis. Zu (i). Es bezeichne $\mathfrak{b}$ den Durchschnitt aller Primideale von R. Wir zeigen "$\mathfrak{n}_R \subseteq \mathfrak{b}$". Gilt $a \in \mathfrak{n}_R$, so gibt es ein n mit $a^n = 0$. Folglich ist a^n in jedem Primideal von R enthalten. Damit ist auch auch a in jedem Primideal von R enthalten.

Wir zeigen "$\mathfrak{n}_R \supseteq \mathfrak{b}$". Es sei $b \in \mathfrak{b}$. Nehmen wir an b^n wäre für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ von Null verschieden. Wir betrachten das multiplikative Monoid $S := \{1, b, b^2, \ldots\}$. Dann gilt $\{0\} \subseteq R \setminus S$. Nach Satz 1.3.14 gibt es also ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R \setminus S$. Widerspruch.

Zu (ii). Wir betrachten die Projektion $\pi\colon R \to R/\mathfrak{a}$. Es gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\mathfrak{n}_{R/\mathfrak{a}})$. Weiter entsprechen die Primideale in $R/\mathfrak{a}$ vermöge $\mathfrak{p} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{p})$ den Primidealen von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten, siehe Folgerung 1.3.7. Damit ergibt sich die Behauptung. □

Satz 1.3.17. *Es sei R ein K1-Ring, und es bezeichne* $\mathrm{NT(R)} \subseteq \mathrm{R}$ *die Menge seiner Nullteiler.*

(i) *Zu jedem $r \in \mathrm{NT(R)}$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ mit $r \in \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{NT(R)}$.*
(ii) *Die Menge* $\mathrm{NT(R)}$ *ist eine Vereinigung von Primidealen von R.*

Beweis. Nur für (i) ist etwas zu zeigen. Wir dürfen $R \neq \{0\}$ annehmen. Ist $r \in R$ Nullteiler, so sind auch alle Elemente des Ideals $\langle r \rangle \leq R$ Nullteiler. Weiter ist $S := R \setminus \mathrm{NT(R)}$ ein multiplikatives Monoid. Satz 1.3.14 liefert daher ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ mit $\langle r \rangle \subseteq \mathfrak{p} \subseteq R \setminus S = \mathrm{NT(R)}$. □

Satz 1.3.18. *Es sei R ein K1-Ring.*

(i) *Zu jeder Nichteinheit $0 \neq r \in R \setminus R^*$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ mit $r \in \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \subseteq R \setminus R^*$.*
(ii) *Die Menge $R \setminus R^*$ der Nichteinheiten ist eine Vereinigung von maximalen Idealen.*

Beweis. Für Aussage (i) betrachte man das multiplikative Monoid $\{1\}$ und das Ideal $\langle r \rangle \leq R$. Satz 1.3.14 liefert dann das gewünschte maximale Ideal. Aussage (ii) folgt direkt aus (i). □

Definition 1.3.19. Es sei R ein K1-Ring. Das *Jacobson-Radikal* von R ist der Durchschnitt $\mathfrak{j}_R$ aller maximalen Ideale von R.

Satz 1.3.20. *Es sei R ein K1-Ring, und es sei $r \in R$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $r \in \mathfrak{j}_R$.*
(ii) *Für alle $a \in R$ gilt $1 - ar \in R^*$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Nehmen wir an, ein Element der Form $1 - ar$ sei keine Einheit. Dann ist $1 - ar$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ enthalten. Wegen $\mathfrak{j}_R \subseteq \mathfrak{m}$ liegt r in $\mathfrak{m}$. Es folgt $1 \in \mathfrak{m}$, Widerspruch.

Zu "(ii)⇒(i)". Nehmen wir an, r liege nicht in $\mathfrak{j}_R$. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in R mit $r \notin \mathfrak{m}$. Dabei gilt $R = \mathfrak{m} + \langle r \rangle$. Also hat man $1 = b + ar$ mit Elementen $b \in \mathfrak{m}$ und $a \in R$. Das liefert $1 - ar \in \mathfrak{m}$, Widerspruch. □

Aufgaben zu Abschnitt 1.3.

Aufgabe 1.3.21. Es sei R ein K1-Ring. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) Es gibt genau ein Primideal in R.
(ii) Jedes Element von R ist Einheit oder nilpotent.
(iii) Der Faktorring $R/\mathfrak{n}_R$ ist ein Körper.

Aufgabe 1.3.22. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Zeige: Das von $T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ erzeugte Ideal ist maximal.

Aufgabe 1.3.23. Es sei R ein K1-Ring. Beweise folgende Aussagen:

(i) Jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist ein Radikalideal.
(ii) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ ist ein Radikalideal.
(iii) Das Jacobson-Radikal ist ein Radikalideal.

1.4. **Noethersche Ringe.**

Erinnerung 1.4.1. Ein K1-Ring heißt *Hauptidealring*, falls jedes seiner Ideale Hauptideal ist. Ein *Hauptidealbereich* ist ein Hauptidealring, der zudem Integritätsring ist. Jeder euklidische Ring ist Hauptidealbereich. Insbesondere sind der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sowie die Polynomringe $\mathbb{K}[T]$ in einer Variablen über einem Körper $\mathbb{K}$ Hauptidealbereiche.

Definition 1.4.2. Ein K1-Ring R heißt *noethersch*, falls jedes Ideal $\mathfrak{a} \le R$ endlich erzeugt ist, d.h. Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ existieren mit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Sprechweise 1.4.3. Es sei M eine Menge und $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Teilmengen $M_i \subseteq M$, wobei $i \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Man sagt, dass $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ *stationär* wird, falls es ein $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ gibt mit $M_i = M_n$ für alle $i \ge n$.

Satz 1.4.4. *Es sei R ein K1-Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist noethersch.*
(ii) *Jede aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ von Idealen $\mathfrak{a}_i \le R$ wird stationär.*

Beweis. Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Es sei eine aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ von Idealen in $\mathfrak{a}_i \le R$ gegeben. Dann erhält man ein Ideal

$$\mathfrak{a} \ := \ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\ge 1}} \mathfrak{a}_i \ \le \ R.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, etwa von Elementen $a_1, \ldots, a_m$. Wir finden dann ein $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, sodass alle a_i in $\mathfrak{a}_n$ liegen. Offenbar gilt $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_n$ für $i \ge n$.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Es sei $\mathfrak{a} \le R$ ein Ideal. Nehmen wir an, $\mathfrak{a}$ sei nicht endlich erzeugt. Es gilt $\{0\} =: \mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}$. Folglich gibt es ein $a_2 \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}_1$. Dann ist $\mathfrak{a}_2 := \langle a_2 \rangle + \mathfrak{a}_1$ endlich erzeugt, und wir haben $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}$. Fährt man diese Weise fort, so erhält man eine echt aufsteigende unendliche Kette von Idealen. Widerspruch zu (ii). $\square$

Satz 1.4.5 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist R ein noetherscher Ring, so ist der Polynomring $R[T]$ ebenfalls noethersch.*

Beweis. Es seien R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \le R[T]$ ein Ideal. Zu $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{a}_i \quad := \quad \left\{ a \in R;\ \text{es gibt ein } f \in \mathfrak{a} \text{ mit } f = aT^i + \sum_{\nu=0}^{i-1} a_\nu T^\nu \right\}.$$

Dann ist jedes $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal in R, und wir erhalten $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \ldots$. Da R noethersch ist, wird diese Kette stationär. Es gibt also ein $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ mit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_n$ für alle $i \ge n$.

Jedes Ideal $\mathfrak{a}_i \le R$ ist endlich erzeugt, etwa $\mathfrak{a}_i = \langle a_{i1}, \ldots, a_{is_i} \rangle$ mit $a_{ij} \in R$. Wir wählen Polynome

$$f_{ij} \ = \ a_{ij} T^i + \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{ij\nu} T^\nu \ \in \ \mathfrak{a}.$$

Wir behaupten, dass die f_{ij}, wobei $i = 0, \ldots, n$ und jeweils $j = 1, \ldots, s_i$, bereits das Ideal $\mathfrak{a}$ erzeugen. Andernfalls findet man Elemente

$$g \ = \ aT^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu T^\nu \ \in \ \mathfrak{a} \setminus \langle f_{ij};\ i = 0, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, s_i \rangle.$$

Darunter gibt es auch ein g minimalen Grades m. Der Leitkoeffizient a von g liegt in $\mathfrak{a}_m$. Mit $d := \min(m, n)$ erhalten wir eine Darstellung $a = \sum r_j a_{dj}$ und somit

$$g' \ := \ g - T^{m-d} \sum r_j f_{dj} \ \in \ \langle f_{ij};\ i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, s_i \rangle,$$

da $\deg(g') < \deg(g)$. Das impliziert jedoch $g \in \langle f_{ij};\ i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, s_i \rangle$. Widerspruch zur Wahl von g. □

Folgerung 1.4.6. *Es sei R ein K1-Ring. Ist R noethersch, so ist auch der Polynomring $R[T_1, \ldots, T_n]$ noethersch.*

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Im Fall $n = 1$ liefert der Hilbertsche Basissatz direkt, dass $R[T_1]$ noethersch ist. Für den Induktionsschritt verwenden wir die Isomorphie $R[T_1, \ldots, T_n] \cong R[T_1, \ldots, T_{n-1}][T]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $R[T_1, \ldots, T_{n-1}]$ noethersch. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist dann auch $R[T_1, \ldots, T_{n-1}][T]$ noethersch. □

Folgerung 1.4.7. (i) *$\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ ist ein noetherscher Ring.*
(ii) *Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so ist $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein noetherscher Ring.*

Folgerung 1.4.8 (Dicksons Lemma)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Monomialideal. Dann gibt es endlich viele Monome $T^{\nu_1}, \ldots, T^{\nu_r} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $\mathfrak{a} = \langle T^{\nu_1}, \ldots, T^{\nu_r} \rangle$.*

Beweis. Nach Folgerung 1.4.7 (ii) gilt $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ mit Polynomen $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Satz 1.2.7 garantiert, dass alle Monome der f_i in $\mathfrak{a}$ liegen. Offensichtlich wird $\mathfrak{a}$ von diesen Monomen erzeugt. □

Lemma 1.4.9. *Es sei $\varphi\colon R \to S$ ein Epimorphismus von Ringen. Ist R noethersch, so ist auch S noethersch.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{b} \le S$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{a} := \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal in R. Da R noethersch ist, gilt $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ mit gewissen $a_i \in R$. Es folgt $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ mit $b_i := \varphi(a_i)$. □

Folgerung 1.4.10. *Es sei $S \subseteq R$ eine Ringerweiterung, und es seien $a_1, \ldots, a_n \in R$. Ist S noethersch, so ist auch $S[a_1, \ldots, a_n]$ noethersch.*

Beweis. Nach der universellen Eigenschaft des Polynomringes gibt es einen Epimorphismus $S[T_1, \ldots, T_n] \to S[a_1, \ldots, a_n]$. Die Behauptung folgt daher mit Lemma 1.4.9. □

Satz 1.4.11. *Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a} \le R$ ein endlich erzeugtes Ideal. Gilt $\mathfrak{a} = \langle A \rangle$ für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq R$, so gibt es $a_1, \ldots, a_r \in A$ mit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$.*

Beweis. Es seien $b_1, \ldots, b_s \in R$ mit $\mathfrak{a} = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle$. Dann ist jedes dieser b_i von der Form

$$b_i \quad = \quad r_{i1} a_{i1} + \ldots + r_{im_i} a_{im_i}$$

mit Elementen $r_{ij} \in R$ und $a_{ij} \in A$. Somit kann man jedes $a \in \mathfrak{a}$ als Linearkombination über den a_{ij} mit Koeffizienten in R darstellen. □

Definition 1.4.12. Es sei R ein Integritätsring. Ein Element $0 \neq q \in R \setminus R^*$ heißt *irreduzibel*, falls $q = ab$ mit $a, b \in R$ stets $a \in R^*$ oder $b \in R^*$ impliziert.

Satz 1.4.13. *Es sei R ein Integritätsring. Dann ist jedes Primelement $p \in R$ irreduzibel.*

Beweis. Nach Definition gilt $0 \neq p \notin R^*$. Es sei nun $p = ab$ mit $a, b \in R$. Da p prim ist, gilt $p \mid a$ oder $p \mid b$. Wir dürfen $p \mid a$ annehmen. Dann haben wir $a = rp$ mit einem $r \in R$. Folglich erhalten wir $p = ab = rpb$. Da $p \neq 0$ gilt und R ein Integritätsring ist, folgt $rb = 1$, d.h., b ist eine Einheit. □

Erinnerung 1.4.14. Einen Integritätsring R nennt man *faktoriell*, falls jedes $a \in R$ mit $0_R \neq a \notin R^*$ eine Zerlegung $a = p_1 \cdots p_n$ mit Primelementen $p_1, \ldots, p_n \in R$ besitzt. Jeder Körper ist trivialerweise faktoriell. Weiter ist jeder euklidische Ring faktoriell. Insbesondere ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen faktoriell. Ist R ein faktorieller Ring, so ist nach dem Satz von Gauß auch der Polynomring $R[T_1, \ldots, T_n]$ faktoriell.

Satz 1.4.15. *Ein Integritätsring R ist genau dann faktoriell, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) *Jedes irreduzible Element von R ist prim.*
(ii) *Jede aufsteigende Kette von Hauptidealen in R wird stationär.*

Beweis. Es sei zunächst R faktoriell. Zum Nachweis von (i) sei $q \in R$ irreduzibel. Wir schreiben $q = p_1 \cdots p_r$ mit Primelementen $p_i \in R$. Da q irreduzibel ist, muss $p_2 \cdots p_r$ eine Einheit sein, d.h., es gilt $p_2 \cdots p_r b = 1$ mit einem $b \in R$. Insbesondere sind damit auch $p_2, \ldots, p_r$ Einheiten. Es folgt $r = 1$ und wir erhalten $q = p_1$. Zum Nachweis von (ii) sei eine aufsteigende Kette von Hauptidealen $\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_2 \rangle \subseteq \ldots$ gegeben. Wir schreiben a_1 als Produkt von Primelementen, $a_1 = p_1 \cdots p_r$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle \quad &\iff \quad a_2 = cp_1 \cdots p_r \text{ mit } c \in R^*, \\ \langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_2 \rangle \quad &\iff \quad a_2 = cp_{i_1} \cdots p_{i_s} \text{ mit } c \in R^*,\ s < r,\ 1 \le i_1 \le \ldots \le i_s \le r. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die weiteren Inklusionen $\langle a_k \rangle \subseteq \langle a_{k+1} \rangle$. Insbesondere sehen wir, dass bei jedem Schritt "$\subsetneq$" die Anzahl der auftauchenden Primfaktoren echt verkleinert wird. Folglich kann es nur endlich viele k mit $\langle a_k \rangle \subsetneq \langle a_{k+1} \rangle$ geben. Die Kette wird also stationär.

Es erfülle nun R die Bedingungen (i) und (ii). Wegen (i) genügt es zu zeigen, dass man jedes $0 \neq a \in R \setminus R^*$ als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben kann. Nehmen wir an, a liesse sich nicht so darstellen. Dann gilt insbesondere $a = a_1 a_1'$ mit $a_1, a_1' \in R \setminus R^*$, wobei etwa a_1 kein Produkt irreduzibler Elemente ist. Ebenso erhalten wir $a_1 = a_2 a_2'$ mit $a_2, a_2' \in R \setminus R^*$ wobei etwa a_2 kein Produkt irreduzibler Elemente ist. Iterieren dieses Prozesses liefert eine unendliche echt aufsteigende Kette $\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_2 \rangle \subsetneq \ldots$, Widerspruch. □

Folgerung 1.4.16. *Es sei R ein noetherscher Integritätsring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Jedes irreduzible Element von R ist prim.*
(ii) *Der Ring R ist faktoriell.*

Folgerung 1.4.17. *Jeder Hauptidealbereich R ist faktoriell.*

Beweis. Nach Folgerung 1.4.16 ist lediglich zu zeigen, dass jedes irreduzible Element $q \in R$ prim ist. Wir zeigen zunächst, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \le R$ gilt

$$\langle q \rangle \ \subsetneq \ \mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{a} \ = \ R.$$

Da R Hauptidealring ist, gilt $\mathfrak{a} = \langle a \rangle$ mit einem $a \in R$. Also haben wir $\langle q \rangle \subsetneq \langle a \rangle$ und somit $q = ab$ mit einem $b \in R$, wobei b keine Einheit sein kann. Da q irreduzibel ist, muss a eine Einheit sein. Das impliziert $\mathfrak{a} = R$.

Wir müssen zeigen, dass aus $q \mid ab$ bereits $q \mid a$ oder $q \mid b$ folgt. Nehmen wir an, dass $q \nmid a$ und $q \nmid b$ gelten. Dann gilt $a \notin \langle q \rangle$ und $b \notin \langle q \rangle$. Die Vorüberlegung liefert

$$\langle a, q \rangle \ = \ R \ = \ \langle b, q \rangle.$$

Es folgt

$$R \ = \ \langle a, q \rangle \langle b, q \rangle \ = \ \langle ab, aq, bq, q^2 \rangle \ \subseteq \ \langle q \rangle.$$

Wobei die letzte Inklusion auf $q \mid ab$ zurückgeht. Es folgt $\langle q \rangle = R$. Insbesondere ergibt sich $1_R = cq$ mit einem $c \in R$. Widerspruch zu $q \notin R^*$. □

Aufgaben zu Abschnitt 1.4.

Aufgabe 1.4.18. Betrachte den Ring $R := \mathbb{K}[T^2, T^3] \subseteq \mathbb{K}[T]$ und zeige folgende Aussagen:

(i) R ist noethersch.
(ii) T^2 ist irreduzibel aber nicht prim.
(iii) $\langle T^2, T^3 \rangle$ ist ein maximales Ideal.
(iv) Es gilt $\sqrt{\langle T^2 \rangle} = \langle T^2, T^3 \rangle$.

Aufgabe 1.4.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $0 \neq p := a_1T_1 + \ldots + a_nT_n \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Zeige: Das Polynom p ist ein Primelement in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Aufgabe 1.4.20. Es seien R ein faktorieller Ring und $\{0\} \neq \mathfrak{p} \leq R$ ein Primideal. Zeige: Das Ideal $\mathfrak{p}$ wird von Primelementen erzeugt. Ist R zudem noethersch, so wird $\mathfrak{p}$ von endlich vielen Primelementen erzeugt.

Aufgabe 1.4.21. Beweise folgende Aussagen über den Polynomring $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

(i) Die Polynome $T_2 - T_1^2$ und T_2 sind Primelemente in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Das Ideal $\langle T_2 - T_1^2, T_2 \rangle$ ist kein Primideal in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.
(ii) Das $\langle T_1T_2, T_2 - 1 \rangle$ ist ein Primideal in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Das Polynom T_1T_2 ist kein Primelement in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Aufgabe 1.4.22. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimme alle Primelemente in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ der Form $aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + dT_1 + eT_2 + f$, wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$.

1.5. **Monomialideale.**

Erinnerung 1.5.1. Ein *Monom* in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist ein Polynom der Form $T^\nu = T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}$. Die Menge $\mathfrak{M}(n) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ der Monome ist ein multiplikatives Monoid und man hat zueinander inverse Isomorphismen von Monoiden

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^n_{\geq 0} & \longleftrightarrow & \mathfrak{M}(n) \\ \eta\colon \nu & \mapsto & T^\nu, \\ \nu & \mapsfrom & T^\nu :\lambda. \end{array}$$

Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ heißt *Monomialideal*, wenn es von Monomen erzeugt wird. Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ liegt genau dann in einem gegebenem Monomialideal $\mathfrak{a}$, wenn jedes Monom von f in $\mathfrak{a}$ liegt.

Definition 1.5.2. Wir bezeichnen mit $\Gamma_n := \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ das additive Monoid aller ganzzahligen n-Tupel $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ mit $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ heißt Γ_n*-invariant*, falls $\Gamma_n + M \subseteq M$ gilt.

Beispiel 1.5.3. Von den beiden folgenden Teilmengen in $\Gamma_2 = \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ ist die erste Γ_2-invariant, die zweite jedoch nicht:

Satz 1.5.4. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen*

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{c} \Gamma_n\text{-invariante} \\ \text{Mengen } M \subseteq \Gamma_n \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Monomialideale} \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \end{array} \right\} \\ M & \mapsto & \mathfrak{a}(M) := \langle T^\mu;\ \mu \in M \rangle, \\ \{\mu;\ T^\mu \in \mathfrak{a}\} =: \lambda(\mathfrak{a}) & \mapsfrom & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Für je zwei Γ_n-invariante Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq \Gamma_n$ gelten die folgenden Identitäten:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a}(M_1 \cap M_2) & = & \mathfrak{a}(M_1) \ \cap \ \mathfrak{a}(M_2), \\ \mathfrak{a}(M_1 \cup M_2) & = & \mathfrak{a}(M_1) \ + \ \mathfrak{a}(M_2), \\ \mathfrak{a}(M_1 + M_2) & = & \mathfrak{a}(M_1)\mathfrak{a}(M_2). \end{array}$$

Insbesondere sind Durchschnitte, Summen und Produkte von Monomialidealen wieder Monomialideale.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit der Zuordnungen ist zu zeigen, dass $\lambda(\mathfrak{a})$ eine Γ_n-invariante Menge ist. Dazu seien $\nu \in \Gamma_n$ und $\mu \in \lambda(\mathfrak{a})$ gegeben. Es gilt

$$T^\mu \in \mathfrak{a} \ \Rightarrow\ T^\nu T^\mu \in \mathfrak{a} \ \Rightarrow\ T^{\nu+\mu} \in \mathfrak{a} \ \Rightarrow\ \nu + \mu \in \lambda(\mathfrak{a}).$$

Wir zeigen nun, dass $\lambda(\mathfrak{a}(M)) = M$ gilt. Die Inklusion "$\supseteq$" ist dabei offensichtlich. Zum Nachweis von "$\subseteq$" sei $\nu \in \lambda(\mathfrak{a}(M))$ gegeben. Dann gilt $T^\nu \in \mathfrak{a}(M)$ und wir haben eine Darstellung

$$T^\nu \;=\; \sum f_\mu T^\mu$$

mit Polynomen $f_\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und Elementen $\mu \in M$. Folglich ist T^ν von der Form $T^\nu = T^{\nu'} T^\mu = T^{\nu'+\mu}$ mit einem $\nu' \in \Gamma_n$ und einem $\mu \in M$. Mit der Γ_n-Invarianz von M ergibt sich $\nu \in M$.

Wir zeigen $\mathfrak{a}(\lambda(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$. Es genügt zu zeigen, dass beide Ideale dieselben Monome enthalten. Es sei $\nu \in \Gamma_n$ gegeben. Mit der eben bewiesenen Identität $\lambda(\mathfrak{a}(M)) = M$ erhalten wir

$$T^\nu \in \mathfrak{a} \ \Rightarrow\ \nu \in \lambda(\mathfrak{a}) \ \Rightarrow\ T^\nu \in \mathfrak{a}(\lambda(\mathfrak{a})),$$
$$T^\nu \in \mathfrak{a}(\lambda(\mathfrak{a})) \ \Rightarrow\ \nu \in \lambda(\mathfrak{a}(\lambda(\mathfrak{a}))) = \lambda(\mathfrak{a}) \ \Rightarrow\ T^\nu \in \mathfrak{a}.$$

Wir zeigen $\mathfrak{a}(M_1 \cap M_2) = \mathfrak{a}(M_1) \cap \mathfrak{a}(M_2)$. Als Durchschnitt Γ_n-invarianter Mengen ist $M_1 \cap M_2$ wieder Γ_n-invariant. Weiter ist $\mathfrak{a}(M_1) \cap \mathfrak{a}(M_2)$ ein Monomialideal, denn für jedes $f \in \mathfrak{a}(M_1) \cap \mathfrak{a}(M_2)$ liegen auch alle Monome von f in $\mathfrak{a}(M_1) \cap \mathfrak{a}(M_2)$. Die gewünschte Identität ergibt sich nun mit

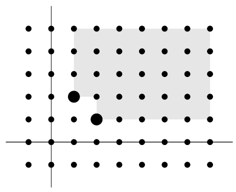
$$T^\nu \in \mathfrak{a}(M_1 \cap M_2) \ \Leftrightarrow\ \nu \in M_1 \cap M_2 \ \Leftrightarrow\ \nu \in M_1 \text{ und } \nu \in M_2 \ \Leftrightarrow\ T^\nu \in \mathfrak{a}(M_1) \cap \mathfrak{a}(M_2).$$

Die Nachweise der beiden verbleibenden Identitäten verlaufen nach demselben Muster. □

Definition 1.5.5. Es sei $M \subseteq \Gamma_n$ eine Γ_n-invariante Teilmenge. Wir nennen ein Element $\mu \in M$ eine *Spitze* von M, falls für alle $\mu' \in M$ und $\nu \in \Gamma_n$ gilt

$$\mu \ = \ \mu' + \nu \implies \mu \ = \ \mu'.$$

Beispiel 1.5.6. Eine Γ_2-invariante Menge mit den Punkten $(1, 2)$ und $(2, 1)$ als Spitzen:



Lemma 1.5.7. *Es sei $M \subseteq \Gamma_n$ eine Γ_n-invariante Teilmenge. Dann besitzt jedes $\mu \in M$ eine Darstellung $\mu = \mu_0 + \nu$ mit einer Spitze μ_0 von M und $\nu \in \Gamma_n$.*

Beweis. Für $\nu \in \Gamma_n$ setzen wir $|\nu| := \nu_1 + \ldots + \nu_n$. Es sei nun $\mu \in M$ gegeben. Ist μ eine Spitze, so ist nichts zu zeigen. Ist μ keine Spitze, so haben wir eine Darstellung $\mu = \mu_1 + \nu_1$ mit $\mu \neq \mu_1 \in M$ und $\nu_1 \in \Gamma_n$. Dabei gilt offenbar

$$|\mu| \ = \ |\mu_1 + \nu_1| \ = \ |\mu_1| + |\nu_1| \ > \ |\mu_1|.$$

Ist μ_1 eine Spitze von M, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls erhalten wir wie eben eine Darstellung $\mu_1 = \mu_2 + \nu_2$ mit $\mu_2 \in M$ und $\nu_2 \in \Gamma_n$, wobei $|\mu_1| > |\mu_2|$ gilt. Iteration dieses Verfahrens liefert ein μ_r, das sich nicht mehr als $\mu_r = \mu_{r+1} + \nu_{r+1}$ mit $\mu_r \neq \mu_{r+1}$ schreiben lässt. Die gewünschte Darstellung von μ ist dann

$$\mu \ = \ \mu_r \ + \ \nu_r + \ldots + \nu_1.$$

□

Satz 1.5.8. *Es sei $M \subseteq \Gamma_n$ eine Γ_n-invariante Teilmenge. Dann besitzt M nur endlich viele Spitzen. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_r \in M$ die Spitzen von M, so gilt*

$$M \ = \ \mu_1 + \Gamma_n \cup \ldots \cup \mu_r + \Gamma_n, \qquad \mathfrak{a}(M) \ = \ \langle T^{\mu_1}, \ldots, T^{\mu_r} \rangle.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}(M) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ das zu M gehörige Monomialideal. Nach Dicksons Lemma 1.4.8 gilt $\mathfrak{a} = \langle T^{\kappa_1}, \ldots, T^{\kappa_s} \rangle$ mit Monomen $T^{\kappa_1}, \ldots, T^{\kappa_s} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Wir zeigen, dass jede Spitze $\mu_0 \in M$ unter den κ_i auftaucht. Wegen $T^{\mu_0} \in \mathfrak{a}$ gibt es Polynome $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit

$$T^{\mu_0} \ = \ g_1 T^{\kappa_1} \ + \ \ldots \ + \ g_s T^{\kappa_s}.$$

Ausmultiplizieren und Vergleich der Monome ergibt $T^{\mu_0} = T^{\nu}T^{\kappa_i}$ für ein $1 \le i \le s$ und ein $\nu \in \Gamma_n$. Das bedeutet $\mu_0 = \kappa_i + \nu$. Da μ_0 eine Spitze von M ist, folgt $\mu_0 = \kappa_i$. Also gibt es nur endlich viele Spitzen in M. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen. Die zweite folgt sofort mit Lemma 1.5.7. □

Satz 1.5.9. *Es seien $M, N \subseteq \Gamma_n$ zwei Γ_n-invariante Teilmengen, und es seien $\nu_1, \ldots, \nu_r$ die Spitzen von N. Dann gilt*

$$(\mathfrak{a}(M) : \mathfrak{a}(N)) \quad = \quad \mathfrak{a}\left(\Gamma_n \cap \bigcap_{i=1}^{r} M - \nu_i\right).$$

Beweis. Zum Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" sei $c \in (\mathfrak{a}(M) : \mathfrak{a}(N))$ gegeben. Dann gilt insbesondere $cT^{\nu_i} \in \mathfrak{a}(M)$ für alle $1 \le i \le r$. Wir betrachten nun ein Monom T^{ν} von c. Nach Satz 1.2.7 liegt $T^{\nu+\nu_i}$ in $\mathfrak{a}(M)$. Das bedeutet $\nu \in \Gamma_n \cap (M - \nu_i)$ für alle $1 \le i \le r$. Also liegen alle Monome von c und somit auch c selbst in dem Ideal auf der rechten Seite.

Zur Inklusion "$\supseteq$". Nach Definition wird das Ideal auf der rechten Seite erzeugt von den Monomen T^{ν}, wobei $\nu \in \Gamma_n$ mit $\nu + \nu_i \in M$ für alle $1 \le i \le r$. Diese Monome leisten $T^{\nu}T^{\nu_i} \in \mathfrak{a}(M)$ für jede Spitze ν_i von N. Satz 1.5.8 liefert $T^{\nu}\mathfrak{a}(N) \subseteq \mathfrak{a}(M)$ und somit $T^{\nu} \in (\mathfrak{a}(M) : \mathfrak{a}(N))$ für die obigen Monome T^{ν}. □

Definition 1.5.10. Die *lexikographische Ordnung* auf der Menge $\mathbb{Z}^n$ ist definiert durch

$$\nu \;<\; \mu \quad :\Longleftrightarrow \quad \nu_1 = \mu_1,\ \ldots,\ \nu_{k-1} = \mu_{k-1}, \quad \nu_k < \mu_k \text{ für ein } 1 \le k \le n.$$

Beispiel 1.5.11. In $\mathbb{Z}^3$ haben wir $(1, 2, 3) < (2, -5, 0)$ und $(2, 2, 4) < (2, 2, 7)$.

Bemerkung 1.5.12. Die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$ ist eine Totalordnung, d.h., für je zwei $\nu, \mu \in \mathbb{Z}^n$ gilt $\nu \le \mu$ oder $\mu \le \nu$. Weiter hat man stets

$$\nu \;<\; \mu \quad \Longrightarrow \quad \nu + \kappa \;<\; \mu + \kappa.$$

Konstruktion 1.5.13. Für ein Element $\nu \in \Gamma_n$ definieren wir seinen *Sockel* $\widetilde{\nu} \in \Gamma_n$ durch

$$\widetilde{\nu} \;:=\; (\widetilde{\nu}_1, \ldots, \widetilde{\nu}_n), \qquad \text{wobei } \widetilde{\nu}_i \;:=\; \begin{cases} 1 & \nu_i > 0, \\ 0 & \nu_i = 0. \end{cases}$$

Satz 1.5.14. *Es sei $M \subseteq \Gamma_n$ eine Γ_n-invariante Teilmenge mit den Spitzen $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Dann gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}(M)} \quad = \quad \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle.$$

Beweis. Zum Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" sei $c \in \sqrt{\mathfrak{a}(M)}$ gegeben. Wir zeigen $c \in \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle$ durch Induktion über die Anzahl s der Terme von c. Für $s = 1$ haben wir $c = \alpha T^{\nu}$ mit einem $\nu \in \Gamma_n$. Die Bedingung $c \in \sqrt{\mathfrak{a}(M)}$ bedeutet $m\nu \in M$ für ein $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Also gilt $m\nu \in \mu_i + \Gamma_n$ für ein $1 \le i \le r$. Das impliziert $\nu \in \widetilde{\mu}_i + \Gamma_n$ und somit $c \in \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle$

Für den Induktionsschritt $s - 1 \to s$ betrachten wir den "Leitterm" $\alpha_0 T^{\nu_0}$ von c, d.h., wir haben $\nu_0 > \nu$ für jeden Term αT^{ν} von c. Nach Definition des Radikals $\sqrt{\mathfrak{a}(M)}$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ mit

$$c^m \;=\; \alpha_0^m T^{m\nu_0} + c' \;\in\; \mathfrak{a}(M).$$

Dabei ist c' ein Polynom, dessen Terme βT^{μ} stets $\mu < m\nu_0$ erfüllen. Satz 1.2.7 liefert $T^{m\nu_0} \in \mathfrak{a}(M)$. Wie oben sehen wir $T^{\nu_0} \in \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir $c - \alpha_0 T^{\nu_0} \in \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle$. Es folgt $c \in \langle T^{\widetilde{\mu}_1}, \ldots, T^{\widetilde{\mu}_r} \rangle$.

Für die Inklusion "$\supseteq$" müssen wir lediglich zeigen, dass es eine Zahl $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $(T^{\widetilde{\mu}_i})^{m_i} \in \mathfrak{a}(M)$. Offenbar hat $m_i := \max(\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in})$ die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Satz 1.5.15. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein Monomialideal in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist genau dann prim, wenn es von Variablen erzeugt wird.*

Beweis. Es sei zunächst $\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein von Variablen erzeugtes Ideal. Wir dürfen annehmen, dass $\mathfrak{a} = \langle T_k, \ldots, T_n \rangle$ gilt mit $1 \leq k \leq n$. Dann hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \arrow[rr, "\varphi\colon T_i \mapsto \begin{cases} T_i & i<k \\ 0 & i \geq k \end{cases}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{k-1}] \\
& \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen $\ker(\varphi) = \mathfrak{a}$ ist $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ ein Integritätsring; siehe Folgerung 1.1.12. Weiter liefert Satz 1.3.5, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

Es sei nun $\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein primes Monomialideal. Dann gilt $\mathfrak{a} = \langle T^{\nu_1}, \ldots, T^{\nu_r} \rangle$ mit Monomen $T^{\nu_i} = T_1^{\nu_{i1}} \cdots T_n^{\nu_{in}}$. Iteriertes Anwenden der Primidealeigenschaft zeigt, das zu jedem T^{ν_i} eine Variable $T_{j(i)}$ mit $T_{j(i)} \mid T^{\nu_i}$ in $\mathfrak{a}$ enthalten sein muss. Es folgt $\mathfrak{a} = \langle T_{j(1)}, \ldots, T_{j(r)} \rangle$. $\square$

Satz 1.5.16. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Das Ideal in $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist das einzige Monomialideal, das zugleich maximales Ideal ist.*

Beweis. Der Faktorring $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{K}$ und somit ist das Monomialideal $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ maximal, siehe Satz 1.3.10. Ist weiter $\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Monomialideal, so ist $\mathfrak{a}$ nach Folgerung 1.3.11 insbesondere prim und wird deshalb gemäß Satz 1.5.15 von Variablen erzeugt. Also gilt $\mathfrak{a} \subseteq \langle T_1, \ldots, T_n \rangle$. Mit der Maximalität folgt $\mathfrak{a} = \langle T_1, \ldots, T_n \rangle$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 1.5.

Aufgabe 1.5.17. Berechne die Spitzen von $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ für folgende Monomialideale in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$:

$$\mathfrak{a} := \langle T_1^7 T_2^2,\ T_1^3 T_2^4,\ T_1^5 T_2,\ T_1^6,\ T_1^2 T_2^5,\ T_1^4 T_2^2,\ T_1 T_2^5 \rangle, \qquad \mathfrak{b} := \langle T_2^5,\ T_1^2 T_2^3,\ T_1 T_2^6,\ T_1^3 \rangle.$$

Aufgabe 1.5.18. Beweise Satz 1.5.8 direkt, d.h., ohne Verwendung des Hilbertschen Basissatzes bzw. des Dicksonschen Lemmas.

Aufgabe 1.5.19. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Monomialideal. Zeige: Die Ordnung der Menge $\mathbb{Z}^n_{\geq 0} \setminus \lambda(\mathfrak{a})$ ist gleich

- dem Supremum über die Längen r von Ketten echt aufsteigender Monomialideale $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}_r \subsetneq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$,
- der Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$.

Aufgabe 1.5.20. Es sei $\mathfrak{a} := \langle T_2^3, T_2^2 T_1, T_1^2 T_2, T_1^4 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Bestimme eine Kette maximaler Länge von echt aufsteigenden Monomialidealen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}_r \subsetneq \mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Aufgabe 1.5.21. Gib ein Beispiel eines Monomialideals $\mathfrak{a}$ an, das für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine echt aufsteigende Kette von Monomialidealen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}_k$ erlaubt.

2. Nullstellen und Ideale

2.1. Polynomiale Gleichungssysteme.

Definition 2.1.1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *polynomiales Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} f_1(z_1,\ldots,z_n) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(z_1,\ldots,z_n) & = & 0 \end{array} \tag{2.1.1.1}$$

mit Polynomen $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$. Die *Lösungsmenge* des obigen Systems ist definiert als

$$V(f_1,\ldots,f_m) \ := \ \{z \in \mathbb{K}^n;\ f_1(z) = \ldots = f_m(z) = 0\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$

Bemerkung 2.1.2. Die linearen Gleichungssysteme sind genau die Systeme (2.1.1.1) mit Polynomen $f_1,\ldots,f_m$ der Gestalt

$$f_i \ = \ a_{i1}T_1 + \ldots + a_{in}T_n - b_i, \qquad a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}.$$

Die Theorie der linearen Gleichungssysteme ist gut verstanden; man hat einfache Kriterien für Lösbarkeit und effiziente Verfahren zur Berechnung von Lösungen.

Definition 2.1.3. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *monomiales Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ in den Variablen $T_1,\ldots,T_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} T^{\nu_1} & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ T^{\nu_m} & = & 0, \end{array} \qquad T^{\nu_i} = T^{\nu_{i1}} \cdots T^{\nu_{in}}, \quad \nu_i = (\nu_{i1},\ldots,\nu_{in}) \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}. \tag{2.1.3.1}$$

Bemerkung 2.1.4. Für $1 \le j \le n$ bezeichnen wir die j-te Koordinatenhyperebene in $\mathbb{K}^n$ mit

$$H_j \ := \ V(T_j) \ = \ \{z \in \mathbb{K}^n;\ z_j = 0\}.$$

Die Lösungsmenge des monomialen Gleichungssystems (2.1.3.1) kann man mittels dieser Koordinatenhyperebenen darstellen als

$$V(T^{\nu_1},\ldots,T^{\nu_m}) \ = \ \left(\bigcup_{\nu_{1j}>0} H_j\right) \ \cap \ \ldots \ \cap \ \left(\bigcup_{\nu_{mj}>0} H_j\right).$$

Beispiel 2.1.5. Wir betrachten das folgende monomiale Gleichungssystem über einem Körper $\mathbb{K}$ in den Variablen T_1, T_2, T_3:

$$T_1T_2 \ = \ 0, \qquad T_1T_3 \ = \ 0, \qquad T_2T_3 \ = \ 0.$$

Nach Bemerkung 2.1.4 ist die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} V(T_1T_2,\, T_1T_3,\, T_2T_3) & = & (H_1 \cup H_2) \ \cap \ (H_1 \cup H_3) \ \cap \ (H_2 \cup H_3) \\ & = & (H_1 \cap H_2) \ \cup \ (H_1 \cap H_3) \ \cup \ (H_2 \cap H_3) \\ & = & \big(\mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{K} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{K}\big). \end{array}$$

Definition 2.1.6. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *binomiales Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ in den Variablen $T_1,\ldots,T_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 T^{\nu_1} + \beta_1 T^{\mu_1} & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_m T^{\nu_m} + \beta_m T^{\mu_m} & = & 0 \end{array} \tag{2.1.6.1}$$

mit Monomen $T^{\nu_i}, T^{\mu_i} \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ und nichtverschwindenden Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}^*$.

Definition 2.1.7. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der *Standard-n-Torus (über* $\mathbb{K}$*)* ist das n-fache direkte Produkt $\mathbb{T}^n := \mathbb{K}^* \times \ldots \times \mathbb{K}^*$ der multiplikativen Gruppe $\mathbb{K}^*$.

Konstruktion 2.1.8. Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ definiert einen Homomorphismus abelscher Gruppen

$$\varphi_A \colon \mathbb{T}^n \ \to \ \mathbb{T}^m, \qquad (t_1, \ldots, t_n) \ \mapsto \ (t_1^{a_{11}} \cdots t_n^{a_{1n}}, \ldots, t_1^{a_{m1}} \cdots t_n^{a_{mn}}).$$

Für je zwei Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{Z})$ gilt dabei $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{A \cdot B}$. Insbesondere gilt $\varphi_{A^{-1}} = \varphi_A^{-1}$, falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$ invertierbar ist.

Beweis. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$. Dann gilt offenbar $\varphi_A(1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1)$. Für je zwei Elemente $t, s \in \mathbb{T}^n$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi_A(ts) &= \varphi(t_1 s_1, \ldots, t_n s_n) \\
&= ((t_1 s_1)^{a_{11}} \cdots (t_n s_n)^{a_{1n}}, \ldots, (t_1 s_1)^{a_{m1}} \cdots (t_n s_n)^{a_{mn}}) \\
&= (t_1^{a_{11}} \cdots t_n^{a_{1n}}, \ldots, t_1^{a_{m1}} \cdots t_n^{a_{mn}})(s_1^{a_{11}} \cdots s_n^{a_{1n}}, \ldots, s_1^{a_{m1}} \cdots s_n^{a_{mn}}) \\
&= \varphi_A(t)\varphi_A(s).
\end{aligned}$$

Es weiter $B \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{Z})$. Für $t_j \in \mathbb{K}^*$ betrachten wir $\mathbf{t}_j := (1, \ldots, 1, t_j, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{T}^k$, wobei der Eintrag t_j an der j-ten Stelle steht. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\varphi_B(\mathbf{t}_j)) &= \varphi_A(t_j^{b_{1j}}, \ldots, t_j^{b_{nj}}) \\
&= (t_j^{A_{1*} \cdot B_{*j}}, \ldots, t_j^{A_{m*} \cdot B_{*j}}) \\
&= (t_j^{(A \cdot B)_{1j}}, \ldots, t_j^{(A \cdot B)_{mj}}) \\
&= \varphi_{A \cdot B}(\mathbf{t}_j).
\end{aligned}$$

Das allgemeine Element $t \in \mathbb{T}^k$ ist von der Form $t = \mathbf{t}_1 \cdots \mathbf{t}_k$. Kombiniert man die obige Identität mit der Homomorphieeigenschaft, so folgt $\varphi_A(\varphi_B(t)) = \varphi_{A \cdot B}(t)$. $\square$

Beispiel 2.1.9. Einige Matrizen und ihre zugehörigen Homomorphismen (sie werden später wieder auftauchen):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} & &\rightsquigarrow \quad \varphi_A \colon (t_1, t_2, t_3) \ \mapsto \ (t_1^{-3} t_2^3 t_3^2, \ t_1^3 t_2^3 t_3^{-2}), \\
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & &\rightsquigarrow \quad \varphi_B \colon (t_1, t_2) \ \mapsto \ (t_1, \ t_1 t_2), \\
C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} & &\rightsquigarrow \quad \varphi_C \colon (t_1, t_2, t_3) \ \mapsto \ (t_1 t_2 t_3^{-2}, \ t_2, \ t_1^2 t_3^{-3}), \\
D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} & &\rightsquigarrow \quad \varphi_D \colon (t_1, t_2, t_3) \ \mapsto \ (t_1, \ t_2^6).
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.10. Die Lösungen des Systems (2.1.6.1) innerhalb $\mathbb{T}^n$ sind genau die Lösungen innerhalb $\mathbb{T}^n$ des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}
T^{\nu_1 - \mu_1} &= -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \\
&\ \, \vdots \\
T^{\nu_m - \mu_m} &= -\frac{\beta_m}{\alpha_m}
\end{aligned} \tag{2.1.10.1}$$

Bezeichnet $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ die Matrix mit den Zeilen $\nu_i - \mu_i$, so ist die Lösungsmenge des Systems (2.1.10.1) gegeben durch

$$\varphi_A^{-1}(-\beta_1/\alpha_1, \ldots, -\beta_m/\alpha_m).$$

Bemerkung 2.1.11. Für eine Matrix $D \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ der Form $D = (D', 0)$ mit einer Diagonalmatrix $D' \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{Z})$ erhält man

$$\varphi_D^{-1}(t) \quad = \quad \sqrt[d_1]{t_1} \times \ldots \times \sqrt[d_m]{t_m} \times \mathbb{T}^{n-m} \quad \subseteq \quad \mathbb{T}^n,$$

wobei $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{T}^m$ ein beliebiges Element sein kann und $\sqrt[d]{t} \subseteq \mathbb{K}$ die Menge aller d-ten Wurzeln von $t \in \mathbb{K}$ bezeichnet:

$$\sqrt[d]{t} \ := \ \{s \in \mathbb{K};\ s^d = t\}.$$

Beispiel 2.1.12. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, die Matrix D aus Beispiel 2.1.9 und $t = (1, 1)$ erhalten wir

$$\varphi_D^{-1}(1,1) \quad = \quad \left\{(1, e^{\frac{2\pi i}{6}k}, t);\ k = 0, \ldots, 5,\ t \in \mathbb{C}^*\right\}.$$

Satz 2.1.13. *Gegeben sei ein binomiales Gleichungssystem über einem Körper $\mathbb{K}$ in den Variablen $T_1, \ldots, T_n$:*

$$\begin{array}{rcrcl} f_1 & := & \alpha_1 T^{\nu_1} + \beta_1 T^{\mu_1} & = & 0, \\ & & \vdots & & \\ f_m & := & \alpha_m T^{\nu_m} + \beta_m T^{\mu_m} & = & 0. \end{array}$$

Es sei $A \in Mat(m, n; \mathbb{Z})$ die Matrix mit den Zeilen $\nu_i - \mu_i$. Weiter seien $B \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{Z})$ und $C \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$ invertierbar und $D := BAC$. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems auf $\mathbb{T}^n$ gegeben durch

$$V(f_1, \ldots, f_m) \cap \mathbb{T}^n \quad = \quad \varphi_C\left(\varphi_D^{-1}\left(\varphi_B\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, -\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\right)\right).$$

Beweis. Es gilt $A = B^{-1}DC^{-1}$. Nach Konstruktion 2.1.8 und Bemerkung 2.1.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} V(f_1, \ldots, f_m) \cap \mathbb{T}^n \quad &= \quad \varphi_A^{-1}\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, -\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \\ &= \quad (\varphi_{B^{-1}} \circ \varphi_D \circ \varphi_{C^{-1}})^{-1}\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, -\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right) \\ &= \quad \varphi_C\left(\varphi_D^{-1}\left(\varphi_B\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, -\frac{\beta_m}{\alpha_m}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

□

Erinnerung 2.1.14 (Smith-Normalform)**.** Es seien R ein euklidischer Ring und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; R)$ eine Matrix. Dann gibt es Elementarmatrizen $B_1, \ldots, B_k \in \mathrm{Mat}(m, m; R)$, und $C_1, \ldots, C_l \in \mathrm{Mat}(n, n; R)$ mit

$$B_k \cdots B_1 \cdot A \cdot C_1 \cdots C_l \quad = \quad \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $D' \in \mathrm{Mat}(s, s; R)$ eine Diagonalmatrix mit nichtverschwindenden Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_s \in R$ ist, die den Teilbarkeitsbedingungen $d_1 \mid d_2, \ldots, d_{s-1} \mid d_s$ genügen.

Bemerkung 2.1.15. Ist eine Matrix A über einem euklidischen Ring gegeben, so kann man explizit invertierbare Matrizen B und C bestimmen, sodass BAC Smith-Normalform annimmt. Als Beispiel betrachten wir

$$A \ := \ \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \ \in \ \mathrm{Mat}(2, 3; \mathbb{Z}).$$

Wie im entsprechenden Verfahren für Matrizen über Körpern verschafft man sich B und C, indem man die benötigten Zeilen- und Spaltenoperationen durch sukzessives Anwenden auf Einheitsmatrizen mitführt:

$$
\begin{array}{cl}
 & \left(\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{SpOp}(1;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{SpOp}(2;3,1)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{SpOp}(-2;1,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right)
\end{array}
$$

Damit haben wir die Smith-Normalform D von A sowie Matrizen B und C mit $D = BAC$ gefunden:

$$
D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
$$

Für das Lösen binomialer Gleichungssysteme genügt es, die Matrix D' auf Diagonalgestalt zu bringen; die aufsteigende Teilerbedingung für die Diagonaleinträge braucht man nicht.

Beispiel 2.1.16. Wir betrachten das folgende binomiale Gleichungssystem über $\mathbb{C}$ in den Variablen T_1, T_2, T_3:

$$
f_1 \ := \ T_2^3 T_3^2 - T_1^3 \ = \ 0, \qquad\qquad f_2 \ := \ T_1^3 T_2^3 - T_3^2 \ = \ 0.
$$

Die Exponentenmatrix A, ihre Smith-Normalform D sowie die Transformationsmatrizen B und C sind wie in Bemerkung 2.1.15.

Nach Satz 2.1.13 können wir die Lösungen des Systems in $\mathbb{T}^3$ folgendermaßen berechnen:

$$
\begin{aligned}
V(f_1, f_2) \cap \mathbb{T}^3 &= \varphi_C \left(\varphi_D^{-1} \left(\varphi_B (1,1) \right) \right) \\
&= \varphi_C(\{1\} \times \sqrt[6]{1} \times \mathbb{K}^*) \\
&= \left\{ (e^{\frac{2\pi i}{6} k} t^{-2}, e^{\frac{2\pi i}{6} k}, t^{-3});\ k = 0, \ldots, 5,\ t \in \mathbb{K}^* \right\}.
\end{aligned}
$$

Die Lösungen außerhalb $\mathbb{T}^3$ liegen in den Koordinatenhyperebenen $V(T_1)$, $V(T_2)$ und $V(T_3)$. Wir erhalten

$$
V(f_1, f_2) \cap V(T_1) \ = \ V(f_1, f_2) \cap V(T_3) \ = \ \{(0, z, 0);\ z \in \mathbb{C}\},
$$
$$
V(f_1, f_2) \cap V(T_2) = \{(0, 0, 0)\}.
$$

Aufgaben zu Abschnitt 2.1.

Aufgabe 2.1.17. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$. Betrachte für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den zugehörigen Homomorphismus $\varphi_A \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ und zeige $A = J_{\varphi_A}(1, \ldots, 1)$, wobei $J_{\varphi_A}(1, \ldots, 1)$ die Jacobimatrix von φ_A im Punkt $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{T}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 2.1.18. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{C}^4$ für das folgende Gleichungssystem:

$$T_2^5 T_3^4 T_4^6 - T_2^3 = 0, \qquad T_1^2 T_2^5 T_4 - T_1 T_2^2 T_3^2 = 0, \qquad T_1 T_2^6 T_3^7 T_4^{12} - T_2 T_3 T_4 = 0.$$

Aufgabe 2.1.19. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{C}^3$ für das folgende Gleichungssystem:

$$T_1 T_2^2 - T_3^2 - T_2^2 = 0, \qquad T_2^3 T_3^6 = 1.$$

2.2. **Algebraische Mengen.**

Vereinbarung 2.2.1. Von nun an ist $\mathbb{K}$ ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Man hat dann einen kanonischen Monomorphismus kommutativer $\mathbb{K}$-Algebren:

$$\begin{array}{rcl}\Phi\colon \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n] & \to & \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}),\\ f & \mapsto & [x \mapsto f(x)].\end{array}$$

Wir dürfen die Polynome in $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ daher im folgenden als $\mathbb{K}$-wertige Funktionen auf dem $\mathbb{K}^n$ ansehen.

Definition 2.2.2. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt *algebraisch*, falls es Polynome $f_1,\ldots,f_r \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ gibt mit

$$X \;=\; V(f_1,\ldots,f_r) \;:=\; \{x \in \mathbb{K}^n;\ f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}.$$

Beispiel 2.2.3.
(i) $\mathbb{K}^n = V(0)$ und $\emptyset = V(1)$ sind algebraische Mengen in $\mathbb{K}^n$.
(ii) Für jedes $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\{x\} = V(T_1 - x_1,\ldots,T_n - x_n)$ eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$.

Beispiel 2.2.4 (Affine Unterräume)**.** Die affinen Unterräume von $\mathbb{K}^n$ sind genau die Lösungsmengen von Gleichungssystemen

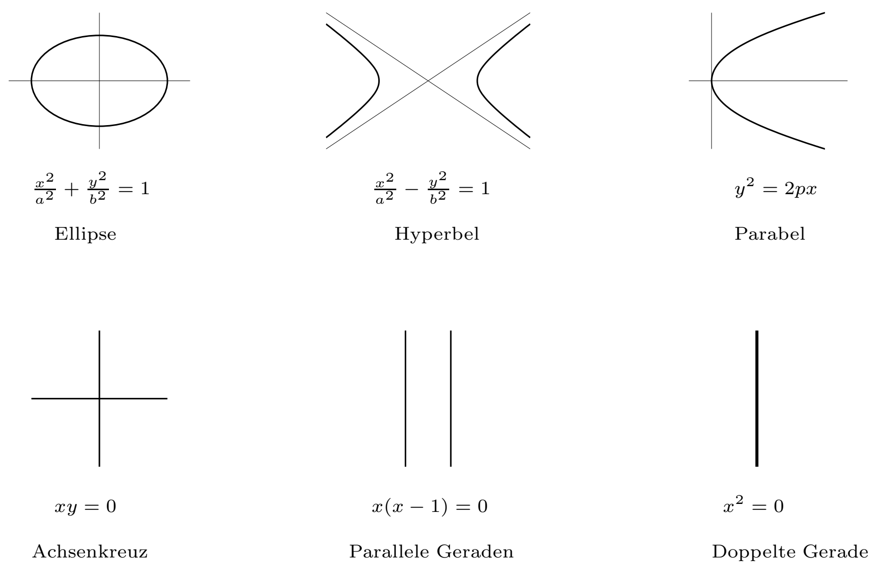
$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1,\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m,\end{array}$$

mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Insbesondere ist jeder affine Unterraum von $\mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge.

Beispiel 2.2.5 (Ebene Quadriken)**.** Eine *Quadrik* in $\mathbb{R}^2$ ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \;=\; 0.$$

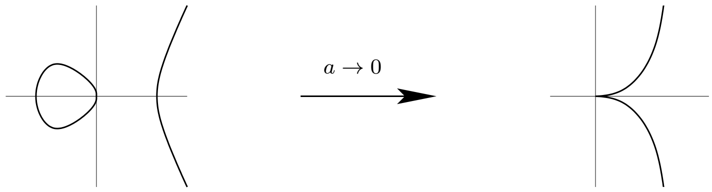
Die Struktur der Lösungsmenge hängt dabei von den Koeffizienten ab; typische Fälle sind hier skizziert:



Beispiel 2.2.6 (Ebene Kubiken)**.** Eine *Kubik* in $\mathbb{R}^2$ ist die Lösungsmenge einer kubischen Gleichung

$$\sum_{i+j\le 3} a_{ij}x^iy^j \quad = \quad 0.$$

In Abhängigkeit von den Koeffizienten a_{ij} erhält man unterschiedliche Bilder — das Geschehen ist hier deutlich komplizierter als bei den Quadriken.



$y^2 = x^3 - ax$ $\qquad$ $y^2 = x^3$

Glatte Kubik $\qquad$ Neillsche Parabel

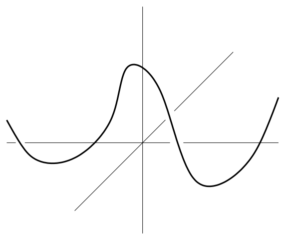
Man kann hier Degenerationsphänomene beobachten: Durch geeignete Variation eines Koeffizienten geht im obigen Beispiel eine glatte in eine singuläre Kubik über.

Beispiel 2.2.7 (Rationale Raumkurven)**.** Es seien $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathbb{R}[T]$. Dann ist die zugehörige *rationale Raumkurve*

$$\{(t, g_1(t), \ldots, g_{n-1}(t));\ t \in \mathbb{R}\}$$

eine algebraische Menge in $\mathbb{R}^n$. Man erhält sie als Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$x_2 - g_1(x_1) \ = \ 0, \quad \ldots, \quad x_n - g_{n-1}(x_1) \ = \ 0.$$



Bemerkung 2.2.8. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine algebraische Menge. Ohne eine Definition dafür gesehen haben zu müssen, hat man vielleicht eine intuitive Vorstellung darüber, was zu verstehen ist unter

- den *irreduziblen Komponenten* von X.
- der *Dimension* von X,
- einem *singulären Punkt* $x \in X$,
- der *Tangente* bzw. der *Tangentialebene* an ein $x \in X$,

Hinter diesen geometrisch motivierten Konzepten stehen konkrete algebraische Definitionen. Es ist eines unserer Ziele dieses Zusammenspiel von Algebra und Geometrie kennenzulernen.

Definition 2.2.9. Es sei $L \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist das zugehörige *Nullstellengebilde* in $\mathbb{K}^n$ definiert als

$$V(L) \ := \ \{x \in \mathbb{K}^n;\ f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in L\} \ = \ \bigcap_{f \in L} V(f).$$

Bemerkung 2.2.10. Es seien $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ zwei Teilmengen. Dann hat man

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \Longrightarrow \quad V(L_1) \supseteq V(L_2).$$

Erinnerung 2.2.11. Der Hilbertsche Basissatz besagt, dass $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein noetherscher Ring ist; d.h., jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist endlich erzeugt.

Satz 2.2.12. *Für $L \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ das von L erzeugte Ideal und $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ Erzeugende für $\mathfrak{a}$. Dann gilt*

$$V(L) \;=\; V(\mathfrak{a}) \;=\; V(f_1, \ldots, f_r).$$

Insbesondere ist das Nullstellengebilde $V(L)$ auch für beliebige, nicht notwendigerweise endliche Teilmengen $L \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$.

Beweis. Als unmittelbare Anwendung von Bemerkung 2.2.10 erhalten wir die Inklusionen

$$V(L) \;\supseteq\; V(\mathfrak{a}) \;\subseteq\; V(f_1, \ldots, f_r).$$

Wir zeigen weiter $V(L) \subseteq V(\mathfrak{a})$; der verbleibende Fall verläuft analog dazu. Es sei $z \in V(L)$. Ist $f \in \mathfrak{a}$, so gibt es eine Darstellung $f = \sum g_i h_i$ mit $g_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $h_i \in L$. Das impliziert $f(z) = 0$ für jedes $f \in \mathfrak{a}$, und man erhält $z \in V(\mathfrak{a})$. $\square$

Definition 2.2.13. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine beliebige Teilmenge. Das zugehörige *Verschwindungsideal* in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist das Ideal

$$I(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n];\; f|_X = 0\} \;\subseteq\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Bemerkung 2.2.14. Es seien $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei Teilmengen. Dann hat man

$$X_1 \subseteq X_2 \quad \Longrightarrow \quad I(X_1) \supseteq I(X_2).$$

Satz 2.2.15. *Es seien Teilmengen $L \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $X \subseteq \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt*

$$L \;\subseteq\; I(V(L)), \qquad X \;\subseteq\; V(I(X)).$$

Ist $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, so hat man im zweiten Fall sogar die Gleicheit

$$X \;=\; V(I(X)).$$

Beweis. Die beiden ersten Inklusionen ergeben sich sofort aus den jeweiligen Definitionen. Ist $X \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch, so gilt $X = V(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots T_n]$. Es folgt $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$. Bemerkung 2.2.10 liefert somit

$$V(I(X)) \;=\; V(I(V(\mathfrak{a}))) \;\subseteq\; V(\mathfrak{a}) \;=\; X.$$

$\square$

Beispiel 2.2.16. Die Inklusionen aus 2.2.15 sind im allgemeinen keine Gleichheiten:

(i) Für das Ideal $\langle T^2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$ gilt

$$V(\langle T^2 \rangle) \;=\; \{0\}, \qquad I(V(\langle T^2 \rangle)) \;=\; \langle T \rangle \;\supsetneq\; \langle T^2 \rangle.$$

(ii) Für die Teilmenge $\mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{K}$ gilt

$$I(\mathbb{K}^*) \;=\; \{0\}, \qquad V(I(\mathbb{K}^*)) \;=\; \mathbb{K} \supsetneq \mathbb{K}^*.$$

Definition 2.2.17. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt *algebraisch*, falls es Polynome $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$\varphi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_m(x)) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Beispiel 2.2.18. Man kann die Neilsche Parabel $V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$ mittels einer algebraischen Abbildung "parametrisieren":

$$\mathbb{K} \to V(T_1^3 - T_2^2), \qquad x \mapsto (x^2, x^2).$$

Bemerkung 2.2.19. Mit dem Begriff der algebraischen Abbildung können wir die *Kategorie* der algebraischen Mengen einführen:

- Die *Objekte* sind *Paare* $X \subseteq \mathbb{K}^n$, wobei X eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$ ist (n darf dabei variieren).
- Die *Morphismen* zwischen zwei Objekten $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ sind deren algebraische Abbildungen.

Es gibt nun eine Reihe einleuchtender Forderungen, welche man an eine Kategorie stellt:

- Sind Morphismen $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ gegeben, so muss eine Komposition $\psi \circ \varphi\colon X \to Z$ erklärt sein. Dabei muss stets $\kappa \circ (\psi \circ \varphi) = (\kappa \circ \psi) \circ \varphi$ gelten.
- Es muss für jedes Objekt $X \subseteq \mathbb{K}^n$ einen Morphismus $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ mit den Eigenschaften der Identität geben, d.h., man hat stets $\psi \circ \mathrm{id}_X = \psi$ und $\mathrm{id}_X \circ \varphi = \varphi$.

In unserem vorliegenden Fall prüft man leicht nach, dass diese Eigenschaften vorliegen.

Bemerkung 2.2.20. Mit der vorangehenden Bemerkung haben wir insbesondere einen Isomorphiebegriff für algebraische Mengen erklärt: $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ sind isomorph, falls es polynomiale Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $\Psi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ gibt mit

$$\Phi(X) \subseteq Y, \qquad \Psi(Y) \subseteq X, \qquad \Psi \circ \Phi|_X = \mathrm{id}_X, \qquad \Phi \circ \Psi|_Y = \mathrm{id}_Y.$$

Aufgaben zu Abschnitt 2.2.

Aufgabe 2.2.21. Gib Polynome $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ an, sodass $V(f_1, \ldots, f_m) = \{(0,0), (1,2), (3,4)\}$ gilt.

Aufgabe 2.2.22. Realisiere die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen A mit $\mathrm{rg}(A) \leq k$ als algebraische Menge in $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Aufgabe 2.2.23. Zeige, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ aller $(n \times n)$-Matrizen der Determinante 1 als algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n \times n}$ realisiert werden kann.

Aufgabe 2.2.24. Zeige, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen als algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}$ realisiert werden kann.

Aufgabe 2.2.25. Ist die Menge aller symmetrischen (nilpotenten, diagonalisierbaren, nicht diagonalisierbaren) $(n \times n)$-Matrizen eine algebraische Menge in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n} \times \mathbb{K}$?

Aufgabe 2.2.26. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Zeige: $X \times Y$ ist eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n+m}$.

Aufgabe 2.2.27. Bestimme die Verschwindungsideale des Achsenkreuzes $V(T_1 T_2) \subseteq \mathbb{K}^2$ und der Neilschen Parabel $V(T_2^2 - T_1^3) \subseteq \mathbb{K}^2$.

Aufgabe 2.2.28. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome vom Grad 1. Zeige: Es gilt $I(V(f_1, \ldots, f_r)) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

Aufgabe 2.2.29. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ sowie $Z \subseteq Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung. Zeige: Das Urbild $\varphi^{-1}(Z)$ ist eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 2.2.30. Bestimme, bis auf Isomorphie algebraischer Mengen, alle komplexen Quadriken $X \subseteq \mathbb{C}^2$.

Aufgabe 2.2.31. Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Beweise folgende Aussagen:

(i) Jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ist Lösungsmenge eines (endlichen) polynomialen Gleichungssystems.
(ii) Jede Abbildung $X \to \mathbb{K}$ ist Einschränkung einer polynomialen Abbildung.

Aufgabe 2.2.32. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $\mathbb{K}$ nicht algebraisch abgeschlossen, so läßt sich jede algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ darstellen als $X = V(f)$ mit einem $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.
(ii) Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so läßt sich $\{0\} = V(T_1, T_2) \subseteq \mathbb{K}^2$ nicht als $X = V(f)$ mit einem $f \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$ darstellen.

Aufgabe 2.2.33. Es sei $X \subseteq \mathbb{C}^n$ eine algebraische Menge. Zeige: Ist X kompakt bezüglich der metrischen Topologie, so ist X bereits endlich.

2.3. Zariski-Topologie.

Erinnerung 2.3.1. Es sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist ein System Ω von Teilmengen $U \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $\emptyset \in \Omega$ und $X \in \Omega$.
- Gilt $U_i \in \Omega$ für $i \in I$, so gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$.
- Gilt $U_1, \ldots, U_r \in \Omega$, so gilt $\bigcap_{i=1}^{r} U_i \in \Omega$.

Es sei nun Ω eine Topologie auf X. Dann nennt man X, bzw. das Paar (X, Ω), einen *topologischen Raum* und die Elemente $U \in \Omega$ die *offenen Mengen* von X. Die obigen Eigenschaften lassen sich dann formulieren als

(o1) die leere Menge und der gesamte Raum sind offen,
(o2) beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen,
(o3) endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

Die *abgeschlossenen* Mengen von X sind genau die Komplemente $A = X \setminus U$ mit $U \in \Omega$. Die abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes stehen in Bijektion zu seinen offenen Mengen:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{offene Mengen von } X\} & \longleftrightarrow & \{\text{abgeschlossene Mengen von } X\} \\ U & \mapsto & X \setminus U \\ X \setminus A & \leftarrow\!\shortmid & A. \end{array}$$

Man beachte, dass die beiden Zuordnungen invers zueinander sind. Die Eigenschaften (o1) bis (o3) offener Mengen entsprechen den folgenden Eigenschaften (a1) bis (a3) abgeschlossener Mengen:

(a1) die leere Menge und der gesamte Raum sind abgeschlossen,
(a2) beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen,
(a3) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Man kann eine Topologie auf einer Menge X also ebensogut durch die Angabe ihrer abgeschlossenen Mengen spezifizieren: Erfüllen die Mengen $A \subseteq X$ eines Systems von Teilmengen die Eigenschaften (a1) bis (a3), so bilden die Komplemente $U = X \setminus A$ eine Topologie auf X.

Erinnerung 2.3.2. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

- Sind $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, Ideale in R, so ist ihre *Summe* definiert als
$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \quad := \quad \left\{ \sum a_i;\ a_i \in \mathfrak{a}_i,\ a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}.$$
- Sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ Ideale in R, so ist ihr *Produkt* definiert als
$$\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r \quad := \quad \langle a_1 \cdots a_r;\ a_i \in \mathfrak{a}_i \rangle.$$

Satz 2.3.3. *Die algebraischen Mengen des $\mathbb{K}^n$ sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{K}^n$. Genauer gilt:*

(i) $\emptyset = V(1)$ *und* $\mathbb{K}^n = V(0)$.
(ii) *Ist X_j, $j \in J$, eine Familie algebraischer Mengen in $\mathbb{K}^n$, so gilt*
$$\bigcap_{j \in J} X_j \quad = \quad V\left(\sum_{j \in J} I(X_j) \right).$$

(iii) *Sind $X_1, \dots, X_r$ algebraische Mengen in $\mathbb{K}^n$, so gilt*

$$\bigcup_{j=1}^{r} X_j \;=\; V\left(\bigcap_{j=1}^{r} I(X_j)\right) \;=\; V\left(\prod_{j=1}^{r} I(X_j)\right).$$

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Zu Aussage (ii): Mit Satz 2.2.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j\in J} X_j &\iff x \in \bigcap_{j\in J} V(I(X_j)) \\ &\iff f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I(X_j), j \in J \\ &\iff f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \sum_{j\in J} I(X_j) \\ &\iff x \in V\left(\sum_{j\in J} I(X_j)\right). \end{aligned}$$

Zu (iii): Da das Produkt der Ideale $I(X_1), \dots, I(X_r)$ in ihrem Durchschnitt enthalten ist, gilt

$$V\left(\bigcap_{j=1}^{r} I(X_j)\right) \;\subseteq\; V\left(\prod_{j=1}^{r} I(X_j)\right).$$

Zum Beweis der Behauptung sind daher nur die beiden folgenden Inklusionen (a) und (b) nachzuweisen:

$$\text{(a)} \quad \bigcup_{j=1}^{r} X_j \subseteq V\left(\bigcap_{j=1}^{r} I(X_j)\right), \qquad \text{(b)} \quad V\left(\prod_{j=1}^{r} I(X_j)\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} X_j.$$

Zu (a): Es sei $x \in X_1 \cup \ldots \cup X_r$. Dann liegt x in einem X_k. Somit verschwindet jedes $f \in I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_r)$ in x. Das bedeutet $x \in V(I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_r))$.

Zu (b): Es sei $x \in V(I(X_1) \ldots I(X_r))$. Nehmen wir an, x liege nicht in $X_1 \cup \ldots \cup X_r$. Wegen $X_j = V(I(X_j))$ gibt es dann zu jedem j ein $f_j \in I(X_j)$ mit $f_j(x) \neq 0$. Das Produkt $f_1 \cdots f_r$ liegt in $I(X_1) \cdots I(X_r)$ und verschwindet nicht in x. Widerspruch zur Wahl von x. □

Definition 2.3.4. Die Topologie aus Satz 2.3.3 heißt die *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{K}^n$.

Beispiel 2.3.5. Für jeden Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ist $\{a\} \subseteq \mathbb{K}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge, denn man hat

$$\{a\} \;=\; V(T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n).$$

Beispiel 2.3.6. Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ ist die *kofinite Topologie*, d.h., die abgeschlossenen echten Teilmengen von $\mathbb{K}$ sind genau die endlichen Mengen in $\mathbb{K}$: Es gilt

$$\begin{aligned} A \subsetneq X \text{ abgeschlossen} &\iff A = V(\mathfrak{a}) \text{ mit einem Ideal } \{0\} \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T] \\ &\iff A = V(\langle f \rangle) \text{ mit einem } 0 \neq f \in \mathbb{K}[T] \\ &\iff A = V(f) \text{ mit einem } 0 \neq f \in \mathbb{K}[T] \\ &\iff A \text{ endlich.} \end{aligned}$$

Beispiel 2.3.7. Die Diagonale $\Delta \subseteq \mathbb{K}^2$ ist abgeschlossen bezüglich der Zariski-Topologie, denn es gilt

$$\Delta \;=\; \{(t,t);\; t \in \mathbb{K}\} \;=\; V(T_2 - T_1).$$

Man beachte, dass Δ nicht abgeschlossen ist bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Erinnerung 2.3.8. Es sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Der *Abschluss* einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist der Durchschnitt $\overline{Y}$ über alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq X$, mit $Y \subseteq A$; die d.h., $\overline{Y} \subseteq X$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge, welche Y enthält.

Satz 2.3.9. *Für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ihr Abschluss bezüglich der Zariski-Topologie gegeben als $\overline{X} = V(I(X))$.*

Beweis. Nach Definition ist $V(I(X))$ abgeschlossen. Weiter gilt $X \subseteq V(I(X))$. Es bleibt zu zeigen, dass $V(I(X))$ in jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $X \subseteq A$ enthalten ist. Mit Satz 2.2.15 erhalten wir

$$X \;\subseteq\; A \;\;\Longrightarrow\;\; I(X) \;\supseteq\; I(A) \;\;\Longrightarrow\;\; V(I(X)) \;\subseteq\; V(I(A)) \;=\; A.$$

□

Erinnerung 2.3.10. Es seien (X, Ω) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die *Teilraumtopologie* von Y in X das System

$$\Omega_{|Y} \;\;:=\;\; \{U \cap Y;\; U \in \Omega\}.$$

Definition 2.3.11. Die *Zariski-Topologie einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$* ist ihre Teilraumtopologie in $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung 2.3.12. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen in X, wenn es ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$U \;=\; X \cap (\mathbb{K}^n \setminus V(\mathfrak{a})) \;=\; X \setminus V(\mathfrak{a}).$$

Satz 2.3.13. *Die Zariski-Topologie auf einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ besitzt die Trennungseigenschaft* T_1*, d.h., jede einpunktige Teilmenge von X ist abgeschlossen in X.*

Beweis. Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^n$ besitzt nach Beispiel 2.3.5 die T_1-Eigenschaft. Diese Eigenschaft wird an den Teilraum X vererbt: Für jedes $a \in X$ ist $\mathbb{K}^n \setminus \{a\}$ offen in $\mathbb{K}^n$. Somit ist $X \setminus \{a\} = X \cap (\mathbb{K}^n \setminus \{a\})$ offen in X. Also ist $\{a\}$ abgeschlossen in X. □

Erinnerung 2.3.14. Es sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Eine *Basis* für die Topologie Ω ist eine Teilmenge $B \subseteq \Omega$, sodass jede offene Menge $U \subseteq X$ sich als Vereinigung von Mengen aus B darstellen läßt.

Definition 2.3.15. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Die zu $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gehörige *Hauptmenge* in X ist die offene Menge

$$X_f \;:=\; \{x \in X;\; f(x) \neq 0\} \;=\; X \setminus V(f) \;\subseteq\; X.$$

Satz 2.3.16. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann bilden die Hauptmengen X_f, wobei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, eine Basis der Zariski-Topologie auf X.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Nach Definition der Zariski-Topologie ist U somit von der Gestalt $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Die Behauptung folgt nun rein mengentheoretisch:

$$\begin{aligned} U &= X \setminus V(\mathfrak{a}) \\ &= X \setminus \left(\bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) \right) \\ &= \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} (X \setminus V(f)) \\ &= \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} X_f. \end{aligned}$$

□

Erinnerung 2.3.17. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ topologischer Räume heißt *stetig*, falls für jede offene Menge $V \subseteq Y$ das Urbild $\varphi^{-1}(V)$ offen in X ist. Letzteres ist äquivalent dazu, dass für jede abgeschlossene Menge $B \subseteq Y$ das Urbild $\varphi^{-1}(B)$ abgeschlossen in X ist. Ist $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, und sind $X' \subseteq X$ sowie $Y' \subseteq Y$ Teilmengen mit $\varphi(X') \subseteq Y'$, so ist die Einschränkung $\varphi_{|X'}\colon X' \to Y'$ stetig bezüglich der Teilraumtopologien auf X' und Y'.

Satz 2.3.18. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Ist $\varphi\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung, so ist φ stetig.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ Einschränkung der polynomialen Abbildung $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Da X und Y die Teilraumtopologie in $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ tragen, genügt es zu zeigen, dass Φ stetig ist. Dazu sei eine beliebige abgeschlossene Menge

$$B = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{K}^m$$

gegeben. Wir müssen zeigen, dass das Urbild $\Phi^{-1}(B)$ abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ ist. Dies folgt jedoch sofort mit

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(B) &= \Phi^{-1}(V(f_1, \ldots, f_r)) \\ &= \{x \in \mathbb{K}^n;\ f_1(\Phi(x)) = \ldots = f_r(\Phi(x)) = 0\} \\ &= V(f_1 \circ \Phi, \ldots, f_r \circ \Phi). \end{aligned}$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 2.3.

Aufgabe 2.3.19. Es seien X eine Menge und A_i, wobei $i \in I$, eine Familie von Teilmengen von X. Zeige:

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \;=\; \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Aufgabe 2.3.20. Welche der folgenden Mengen ist algebraisch in $\mathbb{R}^2$:

(i) $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 = \sin(x_1)\}$,
(ii) $B := \{(\sin(x), \cos(x));\ x \in \mathbb{R}\}$?

Aufgabe 2.3.21. Gib Ideale $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ an, sodass $\mathfrak{ab} \neq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ gilt.

Aufgabe 2.3.22. Es seien (X, Ω) ein topologischer Raum und $Z \subseteq Y \subseteq X$ beliebige Teilmengen.

(i) Zeige, dass $\Omega_{|Y}$ tatsächlich eine Topologie ist.
(ii) Zeige, dass $\Omega_{|Z} = (\Omega_{|Y})_{|Z}$ gilt.

Aufgabe 2.3.23. Es sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Der *Abschluss* einer Teilmenge $A \subseteq X$ in X ist der Durchschnitt $\overline{A}$ über alle abgeschlossenen Mengen $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$. Zeige:

(i) Der Abschluss $\overline{A}$ einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge $\overline{A} \subseteq X$ mit $A \subseteq \overline{A}$.
(ii) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn sie mit ihrem Abschluss $\overline{A}$ übereinstimmt.
(iii) Für jede endliche Vereinigung $A := A_1 \cup \ldots \cup A_n$ von Teilmengen $A_1, \ldots A_n \subseteq X$ gilt $\overline{A} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$.
(iv) Sind $A \subseteq B \subseteq X$ Teilmengen, so ist der Abschluss von A in B (bezüglich der Teilraumtopologie) gegeben durch $\overline{A} \cap B$.

Aufgabe 2.3.24. Es seien X ein topologischer Raum, und es seien $U_i \subseteq X$ offene Teilmengen mit

$$X \;=\; \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Zeige: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $A \cap U_i$ abgeschlossen in U_i ist.

Aufgabe 2.3.25. Vergleiche die Zariski-Topologie auf $\mathbb{C}^n$ mit der metrischen Topologie.

Aufgabe 2.3.26. Zeige: Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^2$ ist echt feiner als die durch die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}$ induzierte Produkttopologie auf $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Aufgabe 2.3.27. Es seien X, Y topologische Räume, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweise die Aussagen aus Erinnerung 2.3.17:

(i) Die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq Y$ das Urbild $\varphi^{-1}(B) \subseteq X$ abgeschlossen ist.
(ii) Ist $\varphi\colon X \to Y$ stetig und sind $X' \subseteq X$ sowie $Y' \subseteq Y$ Teilmengen mit $\varphi(X') \subseteq Y'$, so ist die Einschränkung $\varphi_{|X'}\colon X' \to Y'$ stetig bezüglich der Teilraumtopologien auf X' und Y'.

Aufgabe 2.3.28. Es seien $X = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Zeige: Man hat einen Homöomorphismus

$$X_f \;\to\; V(g, f_1', \ldots, f_r'), \qquad x \;\mapsto\; (x, f(x)^{-1}),$$

wobei $X_f \subseteq X$ die Teilraumtopologie bezüglich X trage und $g, f_i' \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$ definiert seien durch $f_i'(T_1, \ldots, T_{n+1}) := f_i(T_1, \ldots, T_n)$ bzw. $g := f(T_1, \ldots, T_n)T_{n+1} - 1$.

Aufgabe 2.3.29. Ist jede stetige Abbildung algebraischer Mengen algebraisch? Hinweis: Betrachte die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$.

Aufgabe 2.3.30. Es seien $X := \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$ und $Y := V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$. Zeige: Die (algebraische) Abbildung

$$\varphi\colon X \ \to \ Y, \qquad z \ \mapsto \ (z^2, z^3)$$

ist ein Homöomorphismus algebraischer Mengen, aber sie ist kein Isomorphismus algebraischer Mengen.

Aufgabe 2.3.31. Es sei R ein beliebiger K1-Ring. Das *Primspektrum* von R ist die Menge $X := \{\mathfrak{p} \le_R R;\ \mathfrak{p} \text{ prim}\}$ aller Primidieale von R. Betrachte die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Teilmengen von } X\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ideale von } R\} \\ Y & \mapsto & I(Y) := \{f \in R;\ f \in \mathfrak{p}\}, \\ \{\mathfrak{p} \in X;\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} =: V(\mathfrak{a}) & \mapsfrom & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Zeige: Die Mengen $V(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a} \le_R R$, sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X; man nennt sie die *Zariski-Topologie* auf X. Zeige weiter:

(i) Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist $V(I(Y))$ der Abschluss von Y in X.
(ii) Für $\mathfrak{p} \in X$ ist $\{\mathfrak{p}\}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ maximales Ideal ist.
(iii) Die Mengen $X \setminus V(f)$, wobei $f \in R$, bilden eine Basis für die Topologie auf X.

2.4. **Irreduzible Komponenten.**

Definition 2.4.1. Ein topologischer Raum X heißt

(i) *unzusammenhängend*, falls er eine Zerlegung $X = A_1 \cup A_2$ mit disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A_i \neq X$ erlaubt, bzw. *zusammenhängend*, falls er nicht unzusammenhängend ist,
(ii) *reduzibel*, falls er leer ist oder eine Zerlegung $X = A_1 \cup A_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $A_i \neq X$ erlaubt, bzw. *irreduzibel*, falls er nicht reduzibel ist.

Bemerkung 2.4.2. Es sei X ein topologischer Raum.

(i) Ist X unzusammenhängend, so ist X reduzibel.
(ii) Ist X irreduzibel, so ist X zusammenhängend.

Beispiel 2.4.3. Wir versehen $\mathbb{K}^2$ mit der Zariski-Topologie und betrachten folgende Teilräume:

(i) $V(T_1(T_1 - 1)) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist unzusammenhängend, denn man hat
$$V(T_1(T_1 - 1)) \quad = \quad V(T_1) \ \sqcup \ V(T_1 - 1).$$
(ii) Das *Achsenkreuz* $V(T_1T_2) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist reduzibel, denn es gilt
$$V(T_1T_2) \quad = \quad V(T_1) \ \cup \ V(T_2).$$

Erinnerung 2.4.4. Es sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *dicht in* X, falls $\overline{Y} = X$ gilt.

Satz 2.4.5. *Es sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist irreduzibel.*
(ii) *Je zwei nichtleere offene Mengen $U, U' \subseteq X$ besitzen nichtleeren Durchschnitt.*
(iii) *Jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ liegt dicht in X.*

Beweis. Zu „(i)⇒(ii)“: Falls $U, U' \subseteq X$ nichtleere offene Mengen mit $U \cap U' = \emptyset$ sind, ist X die Vereinigung der echten abgeschlossenen Teilmengen $A := X \setminus U$ und $A' := X \setminus U'$, d.h., X ist reduzibel.

Zu „(ii)⇒(iii)“: Falls die nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ nicht dicht in X liegt, ist $U' := X \setminus \overline{U}$ eine nichtleere offene Menge mit $U \cap U' = \emptyset$.

Zu „(iii)⇒(i)“: Besitzt X eine Zerlegung $X = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $A_i \subseteq X$, so ist die offene Menge $U := X \setminus A_1$ nicht leer und liegt nicht dicht in X: Es gilt $\overline{U} \subseteq A_2 \neq X$. □

Satz 2.4.6. *Es sei X ein topologischer Raum. Ein Teilraum $A \subseteq X$ ist genau dann irreduzibel, wenn sein Abschluss $\overline{A} \subseteq X$ ein irreduzibler Teilraum ist.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass A und somit auch der Abschluss $\overline{A}$ nicht leer sind.

Es sei A irreduzibel. Nehmen wir an, $\overline{A}$ sei reduzibel; etwa $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $A_i \subsetneq \overline{A}$. Dann gilt $A_i = \overline{A} \cap B_i$ mit abgeschlossenen Teilmengen $B_i \subseteq X$. Mit $A \subseteq \overline{A}$ folgt
$$A \ = \ A \cap (B_1 \cup B_2) \ = \ (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2).$$
Dabei haben wir $A \cap B_i \subsetneq A$, da sonst $A \subseteq B_i$ und somit $\overline{A} \subseteq B_i$ gelten müsste. Also liegt eine Zerlegung von A in echte abgeschlossene Teilmengen vor. Widerspruch zur Irreduzibilität von A.

Es sei nun $\overline{A}$ irreduzibel. Nehmen wir an, A sei reduzibel; etwa $A = A_1 \cup A_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $A_i \subsetneq A$. Dann gilt $A_i = A \cap B_i$ mit abgeschlossenen Teilmengen $B_i \subseteq X$. Es folgt

$$\overline{A} \;=\; \overline{A} \cap (B_1 \cup B_2) \;=\; (\overline{A} \cap B_1) \cup (\overline{A} \cap B_2).$$

Dabei gilt $\overline{A} \cap B_i \subsetneq \overline{A}$, denn sonst hätte man $\overline{A} \subseteq B_i$ und somit $A \subseteq B_i$, was zu $A = A_i$ führen würde. Also liegt oben eine echte Zerlegung von $\overline{A}$ in abgeschlossene Teilmengen vor. Widerspruch zur Irreduzibilität von $\overline{A}$. □

Satz 2.4.7. *Es seien X, Y topologische Räume, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist X irreduzibel, so ist auch der Teilraum $\varphi(X) \subseteq Y$ irreduzibel.*

Beweis. Nehmen wir an, $\varphi(X)$ wäre reduzibel. Dann hätten wir eine Zerlegung $\varphi(X) = B_1 \cup B_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $B_i \subseteq \varphi(X)$. Da φ stetig ist, sind die Urbilder $A_i := \varphi^{-1}(B_i)$ abgeschlossen in X. Folglich hat man eine Zerlegung $X = A_1 \cup A_2$ in echte abgeschlossene Teilmengen $A_i \subseteq X$. Widerspruch zu X irreduzibel. □

Erinnerung 2.4.8. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in R heisst *prim*, falls $\mathfrak{a} \neq R$ gilt und für je zwei $f, g \in R$ mit $fg \in \mathfrak{a}$ stets $f \in \mathfrak{a}$ oder $g \in \mathfrak{a}$ gilt. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist genau dann prim, wenn $R/\mathfrak{a}$ ein Integritätsring ist.

Satz 2.4.9. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine nichtleere algebraische Menge. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist irreduzibel.*
(ii) *Das Verschwindungsideal $I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist prim.*

Beweis. Zu „(i)⇒(ii)“: Man beachte, dass X als irreduzibler Raum nicht leer ist. Insbesondere ist $I(X)$ ein echtes Ideal in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Es seien nun Polynome $f, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $fg \in I(X)$ gegeben. Dann gilt

$$X \;=\; V(I(X)) \;\subseteq\; V(fg) \;=\; V(f) \cup V(g).$$

Folglich haben wir eine Zerlegung des irreduziblen Raumes X in abgeschlossene Teilmengen:

$$X \quad=\quad (X \cap V(f)) \cup (X \cap V(g)).$$

In dieser Zerlegung können nicht beide Teilmengen echt sein; es muss also $X \subseteq V(f)$ oder $X \subseteq V(g)$ gelten. Das bedeutet $f \in I(X)$ oder $g \in I(X)$.

Zu „(ii)⇒(i)“: Nehmen wir an es gelte $X = X_1 \cup X_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $X_i \subsetneq X$. Man beachte, dass die Mengen X_i algebraisch in $\mathbb{K}^n$ sind. Mit Bemerkung 2.2.15 erhalten wir deshalb

$$I(X) \quad\subsetneq\quad I(X_i).$$

Wir wählen nun $f_i \in I(X_i) \setminus I(X)$. Wegen $X = X_1 \cup X_2$ gilt $f_1 f_2 \in I(X)$. Widerspruch zu $I(X)$ prim. □

Folgerung 2.4.10. *$\mathbb{K}^n$ ist irreduzibel.*

Beweis. Das einzige Polynom, das auf $\mathbb{K}^n$ identisch verschwindet, ist das Nullpolynom. Also gilt $I(\mathbb{K}^n) = \langle 0 \rangle$. Nun ist $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ nullteilerfrei. Folglich ist $\langle 0 \rangle$ ein Primideal in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. □

Definition 2.4.11. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, falls er eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Jede aufsteigende Kette $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ offener Mengen in X wird stationär.
(ii) Jede absteigende Kette $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ abgeschlossener Mengen in X wird stationär.

Satz 2.4.12. *Es sei X ein topologischer Raum, und es sei A ein Teilraum von X. Ist X noethersch, so ist auch A noethersch.*

Beweis. Es sei $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette offener Mengen in A. Nach Definition der Teilraumtopologie gibt es offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit $V_i = U_i \cap A$ Wir betrachten die offenen Mengen

$$U_i' \quad := \quad U_1 \;\cup\; \ldots \;\cup\; U_i.$$

Diese Mengen bilden eine aufsteigende Kette. Da X noethersch ist, wird die Kette $U_1' \subseteq U_2' \subseteq \ldots$ stationär. Wegen $V_i = U_i' \cap A$ wird dann auch die Kette $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ stationär. □

Satz 2.4.13. *Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so ist X quasikompakt, d.h., jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Ws sei X überdeckt durch die offenen Mengen U_i, $i \in I$. Nehmen wir an, diese Überdeckung besitze keine endliche Teilüberdeckung. Wir wählen ein $i_1 \in I$ und setzen $V_1 := U_{i_1}$. Nach Annahme, gibt es einen Punkt $x \in X \setminus V_1$. Dazu finden wir ein $i_2 \in I$ und setzen $V_2 := V_1 \cup U_{i_2}$. So verfahren wir weiter und erhalten eine aufsteigende Kette $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots$ offener Mengen in X. Widerspruch zu X noethersch. □

Satz 2.4.14. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann ist die Zariski-Topologie auf X eine noethersche Topologie.*

Beweis. Da X die Teilraumtopologie in $\mathbb{K}^n$ trägt, genügt es nach Satz 2.4.12 zu zeigen, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^n$ noethersch ist. Dazu sei $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ eine absteigende Kette algebraischer Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dann ist

$$I(X_1) \;\subseteq\; I(X_2) \;\subseteq\; \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Da $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ noethersch ist, wird diese Kette stationär. Folglich wird die Kette

$$V(I(X_1)) \;\supseteq\; V(I(X_2)) \;\supseteq\; \ldots$$

ebenfalls stationär. Da jedes X_i algebraisch ist, gilt $V(I(X_i)) = X_i$. Also wird die Kette $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ stationär. □

Satz 2.4.15. *Es sei X ein nichtleerer noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) *X besitzt eine Zerlegung $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ mit irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $X_i \subseteq X$, sodass $X_i \not\subseteq X_j$, falls $i \neq j$.*
(ii) *Die Mengen X_i aus (i) sind durch ihre Eigenschaft bis auf Nummerierung eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zu (i): Es genügt zu zeigen, dass man X als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellen kann. Wir nehmen an, X besitze keine solche Zerlegung. Insbesondere muss X dann reduzibel sein. Wir finden also eine Zerlegung

$$X \quad = \quad X_1 \;\cup\; X_1'$$

mit abgeschlossenen Teilmengen $X_1 \subsetneq X$ und $X_1' \subsetneq X$. Da X keine Zerlegung in endlich viele irreduzible abgeschlossene Teilmengen besitzt, muss dies auch für mindestens eine der Mengen X_1, X_1' gelten. Wir dürfen annehmen, dass man X_1 nicht als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellen kann. Wie eben finden wir eine Zerlegung

$$X_1 \quad = \quad X_2 \,\cup\, X_2'$$

mit abgeschlossenen Teilmengen $X_2 \subsetneq X_1$ und $X_2' \subsetneq X_1$, sodass man X_2 nicht als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellen kann. Auf diese Weise erhält man eine echt absteigende Kette

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots$$

Das steht im Widerpruch zur Noetherizität von X. Also muss X die gesuchte Zerlegung besitzen.

Zu (ii): Es seien $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ und $X = X_1' \cup \ldots \cup X_m'$ zwei Zerlegungen mit den Eigenschaften aus i). Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$X_i \quad = \quad \bigcup_{j=1}^{m} (X_i \cap X_j').$$

Da jedes X_i irreduzibel ist, gibt es zu jedem i ein $j(i)$ mit $X_i \subseteq X'_{j(i)}$. Analog findet man zu jedem j ein $i(j)$ mit $X_j' \subseteq X_{i(j)}$. Ist ein i_0 gegeben, so gilt

$$X_{i_0} \ \subseteq\ X'_{j(i_0)} \ \subseteq\ X_{i(j(i_0))}.$$

Wegen der Irredundanz der Zerlegung $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ gilt $i_0 = i(j(i_0))$ und folglich $X_{i_0} = X'_{j(i_0)}$. Also erhält man eine Injektion

$$\{X_1, \ldots, X_n\} \ \to\ \{X_1', \ldots, X_m'\}, \qquad X_i \ \mapsto\ X'_{j(i)} = X_i.$$

Analog erhält man eine Injektion

$$\{X_1', \ldots, X_m'\} \ \to\ \{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad X_j' \ \mapsto\ X_{i(j)} = X_j'.$$

Das beweist $\{X_1, \ldots, X_n\} = \{X_1', \ldots, X_m'\}$. □

Definition 2.4.16. Es sei X ein nichtleerer noetherscher topologischer Raum, und es sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ eine Zerlegung wie in 2.4.15. Man nennt die X_i die *irreduziblen Komponenten* von X.

Beispiel 2.4.17. Die irreduziblen Komponenten des Achsenkreuzes $X := V(T_1T_2)$ sind $X_1 := V(T_1)$ und $X_2 := V(T_2)$. Offensichtlich sind X_1, X_2 echte abgeschlossene Teilmengen von X, und es ist $X = X_1 \cup X_2$. Die Abbildungen

$$\varphi_1 \colon \mathbb{K} \to X,\ z \mapsto (0, z), \qquad \varphi_2 \colon \mathbb{K} \to X,\ z \mapsto (z, 0),$$

sind algebraisch und somit stetig. Ihre Bilder sind gerade X_1 und X_2. Da $\mathbb{K}$ nach Folgerung 2.4.10 irreduzibel ist, gilt dies nach Bemerkung 2.4.7 auch für die Bilder X_1 und X_2.

Aufgaben zu Abschnitt 2.4.

Aufgabe 2.4.18. Zeige, dass $\mathbb{C}^n$ bezüglich der metrischen Topologie zusammenhängend und reduzibel ist.

Aufgabe 2.4.19. Zeige: Ein noetherscher topologischer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn er endlich ist und die diskrete Topologie besitzt.

Aufgabe 2.4.20. Bestimme die irreduziblen Komponenten der folgenden algebraischen Menge:

$$V(T_1^2 - T_2T_3, T_1T_3 - T_1) \ \subseteq \ \mathbb{K}^3.$$

Aufgabe 2.4.21. Zeige: Die irreduziblen Komponenten eines noetherschen topologischen Raumes sind genau seine maximalen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.

Aufgabe 2.4.22. Es seien X ein noetherscher topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge, und $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Zeige: $\overline{A} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$ ist die Zerlegung des Abschlusses von A in irreduzible Komponenten.

Aufgabe 2.4.23. Es sei X ein noetherscher topologischer Raum, und es sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Zeige: Ist $U \subseteq X$ eine nichtleere offene Menge, so sind ihre irreduziblen Komponenten genau die nichtleeren Mengen der Form $X_i \cap U$, wobei $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2.4.24. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung noetherscher topologischer Räume, und es sei $Z \subseteq Y$ der Abschluss des Bildes $\varphi(Y)$. Zeige: Z besitzt höchstens so viele irreduzible Komponenten wie X.

Aufgabe 2.4.25. Zeige, dass $X := \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K});\ \mathrm{rg}(A) \leq 1\}$ irreduzibel in $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n\times n}$ ist.

Aufgabe 2.4.26. Zeige, dass $V(T_2^2 - T_1T_3, T_3^2 - T_2T_4, T_2^3 - T_1^2T_4) \subseteq \mathbb{K}^4$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2.4.27. Zeige, dass $V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend bezüglich der Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$ ist; vergleiche Beispiel 2.2.6.

Aufgabe 2.4.28. Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $R := \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, und es sei $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{f \in R;\ fh \in \mathfrak{a}$ für alle $h \in \mathfrak{b}\}$ der Idealquotient.

(i) Zeige, dass $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ ein Ideal in R ist, und dass $V((\mathfrak{a} : \mathfrak{b})) \subseteq V(\mathfrak{a})$ gilt.
(ii) Es sei Z die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von $V(\mathfrak{a})$, die nicht in $V(\mathfrak{b})$ enthalten sind. Zeige: Gilt $\mathfrak{a} = I(V(\mathfrak{a}))$, so gilt $V((\mathfrak{a} : \mathfrak{b})) = Z$.
(iii) Gib ein Beispiel mit $\mathfrak{a} \neq I(V(\mathfrak{a}))$ und $V((\mathfrak{a} : \mathfrak{b})) \neq Z$.

Aufgabe 2.4.29. Welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$ sind algebraisch:

$$\{(x, \cos(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}, \qquad \{(\sin(x), \cos(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}?$$

2.5. **Beispiele.**

Satz 2.5.1. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen.*

(i) *Sind $\varphi\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung und $B \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist $\varphi^{-1}(B) \subseteq X$ eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$.*
(ii) *Sind $\varphi, \psi\colon X \to Y$ algebraische Abbildungen, so ist $\{x \in X;\ \varphi(x) = \psi(x)\}$ eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^n$.*
(iii) *Sind $\varphi\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung und $X' \subseteq X$ sowie $Y' \subseteq Y$ abgeschlossen mit $\varphi(X') \subseteq Y'$, so hat man eine algebraische Abbildung*

$$\varphi_{|X'}\colon X' \ \to \ Y', \qquad x \ \mapsto \ y.$$

Beweis. Zu (i). Als algebraische Abbildung ist $\varphi\colon X \to Y$ nach Satz 2.3.18 stetig. Also ist $\varphi^{-1}(B) \subseteq X$ abgeschlossen in X und somit auch in $\mathbb{K}^n$.

Zu (ii). Die algebraischen Abbildungen $\varphi, \psi\colon X \to Y$ sind Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi, \Psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Die Behauptung ergibt sich dann mit

$$\{x \in X;\ \varphi(x) = \psi(x)\} \ = \ X \cap V(\Phi_1 - \Psi_1, \ldots, \Phi_m - \Psi_m) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$

Zu (iii). Es sei $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung mit $\Phi_{|X} = \varphi$. Dann haben wir $\Phi_{|X'} = \varphi_{|X'}$. □

Bemerkung 2.5.2. Bilder algebraischer Mengen unter algebraischen Abbildungen sind im allgemeinen nicht wieder algebraisch. Als Beispiel betrachten wir

$$\pi\colon \mathbb{K}^2 \ \to \ \mathbb{K}, \qquad (z_1, z_2) \ \mapsto \ z_1.$$

Das Bild der algebraischen Menge $X := V(T_1T_2 - 1) \subseteq \mathbb{K}$ unter π ist $\mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{K}$ und ist somit nicht algebraisch.

Konstruktion 2.5.3 (Produkt)**.** Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Dann ist $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge, und man hat algebraische Abbildungen

$$\pi_X\colon X \times Y \to X,\ (x,y) \mapsto x, \qquad \pi_Y\colon X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge ist. Dazu schreiben wir

$$X \ = \ V(f_1, \ldots, f_r) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n, \qquad Y \ = \ V(g_1, \ldots, g_s) \ \subseteq \ \mathbb{K}^m$$

mit Polynomen $f_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $g_j \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]$. Wir definieren Polynome in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+m}]$ durch

$$f_i'(T_1, \ldots, T_{n+m}) \ := \ f_i(T_1, \ldots, T_n), \quad g_i'(T_1, \ldots, T_{n+m}) \ := \ g_i(T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}).$$

Das mengentheoretische Produkt $X \times Y$ lässt sich dann als algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n+m}$ realisieren:

$$X \times Y \ = \ (X \times \mathbb{K}^m) \cap (\mathbb{K}^n \times Y) \ = \ V(f_1', \ldots, f_r', g_1', \ldots, g_s').$$

Als Einschränkungen der beiden polynomialen Abbildungen $\pi_{\mathbb{K}^n}\colon \mathbb{K}^{n+m} \mapsto \mathbb{K}^n$ bzw. $\pi_{\mathbb{K}^m}\colon \mathbb{K}^{n+m} \mapsto \mathbb{K}^m$ sind π_X und π_Y algebraische Abbildungen. □

Satz 2.5.4. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen mit den irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_s$. Dann sind $X_i \times Y_j$, wobei $1 \le i \le r$ und $1 \le j \le s$ die irreduziblen Komponenten der algebraischen Menge $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$.*

Lemma 2.5.5. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ irreduzible algebraische Mengen. Dann ist auch die algebraische Menge $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ irreduzibel.*

Beweis. Für jedes $y \in Y$ und jedes $x \in X$ haben wir algebraische und somit stetige Abbildungen

$$\varphi_y\colon X \to X \times Y, \qquad x \mapsto (x,y), \qquad\qquad \psi_x\colon Y \to X \times Y, \qquad y \mapsto (x,y).$$

Es sei nun eine Zerlegung $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ in abgeschlossene Teilmengen gegeben. Nach Satz 2.4.7 ist $\{x\} \times Y = \psi_x(Y)$ als Bild eines irreduziblen Raumes unter einer stetigen Abbildung irreduzibel. Somit erhalten wir für jeden Punkt $x \in X$:

$$\{x\} \times Y \subseteq Z_1 \qquad \text{oder} \qquad \{x\} \times Y \subseteq Z_2.$$

Diese Aussagen können wir wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} \{x\} \times Y \subseteq Z_i &\iff (x,y) \in Z_i \text{ für alle } y \in Y \\ &\iff \varphi_y(x) \in Z_i \text{ für alle } y \in Y \\ &\iff x \in X_i := \bigcap_{y \in Y} \varphi_y^{-1}(Z_i) \end{aligned}$$

Die Mengen $X_1, X_2 \subseteq X$ sind abgeschlossen und, wie eben gesehen, erhalten wir $X = X_1 \cup X_2$. Da X irreduzibel ist, folgt $X = X_i$ für ein i. Damit gilt $\{x\} \times Y \subseteq Z_i$ für alle $x \in X$, und es folgt $X \times Y = Z_i$. □

Beweis von Satz 2.5.4. Nach Lemma 2.5.5 sind die algebraischen Mengen $X_i \times Y_j \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ irreduzibel. Foglich haben wir eine Zerlegung in irreduzible abgeschlossene Teilmengen:

$$X \times Y = \left(\bigcup_i X_i\right) \times \left(\bigcup_j Y_j\right) = \bigcup_{i,j} X_i \times Y_j.$$

Es ist also nur noch zu zeigen, dass diese Zerlegung irredundant ist. Das ist jedoch klar, denn aus $X_i \times Y_j \subseteq X_k \times Y_l$ folgt $X_i \subseteq X_k$ sowie $Y_j \subseteq Y_l$ und damit $X_i = X_k$ sowie $Y_j = Y_l$. □

Konstruktion 2.5.6 (Graph)**.** Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine algebraische Abbildung. Dann ist der Graph

$$\Gamma_\varphi := \{(x, \varphi(x));\ x \in X\} \subseteq X \times Y$$

eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n+m}$, und man hat ein kommutatives Diagramm algebraischer Abbildungen

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_\varphi \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X\colon (x,y)\mapsto x"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y\colon (x,y)\mapsto y"] & \\ X \arrow[rr, "\varphi"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Dabei ist die Projektion $\mathrm{pr}_X\colon \Gamma_\varphi \to X$, $(x,y) \mapsto x$ ein Isomorphismus algebraischer Mengen mit Umkehrmorphismus

$$\imath_X\colon X \to \Gamma_\varphi, \qquad x \mapsto (x, \varphi(x)).$$

Beweis. Es sei $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung mit $\Phi_{|X} = \varphi$. Dann haben wir polynomiale Abbildungen

$$\pi_{\mathbb{K}^m}\colon \mathbb{K}^{n+m} \to \mathbb{K}^m, \quad (z,w) \mapsto w, \qquad \Psi\colon \mathbb{K}^{n+m} \to \mathbb{K}^m, \quad (z,w) \mapsto \Phi(z).$$

Mit Satz 2.5.1 (ii) erhalten wir sofort, dass der Graph Γ_φ eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n+m}$ ist: Es gilt

$$\Gamma_\varphi \quad = \quad X \times Y \ \cap \ \{(z,w) \in \mathbb{K}^{n+m};\ \pi_{\mathbb{K}^m}(z,w) = \Psi(z,w)\}.$$

Das Diagramm in der Konstruktion ist offensichtlich kommutativ und die Projektionen sind nach Satz 2.5.1 (iii) algebraische Abbildungen.

Weiter ist $\imath_X$ offensichtlich eine Umkehrabbildung zu pr_X, und sie ist Einschränkung der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{K}^n \ \to \ \mathbb{K}^{n+m}, \qquad z \ \mapsto \ (z, \Phi(z)).$$

$\square$

Konstruktion 2.5.7 (Faserprodukt)**.** Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen und $\varphi\colon X \to Z$ sowie $\psi\colon Y \to Z$ algebraische Abbildungen in eine algebraische Menge $Z \subseteq \mathbb{K}^l$. Dann ist

$$X \times_Z Y \ := \ \{(x,y) \in X \times Y;\ \varphi(x) = \psi(y)\} \ \subseteq \ X \times Y$$

eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^{n+m}$, und man hat ein kommutatives Diagramm algebraischer Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Z Y \arrow[dl, "\pi_X\colon (x,y)\mapsto x"'] \arrow[dr, "\pi_Y\colon (x,y)\mapsto y"] \arrow[dd] & \\
X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Als algebraische Abbildungen sind $\varphi\colon X \to Z$ und $\psi\colon Y \to Z$ Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^l$ bzw. $\Psi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$. Es seien weiter $\pi_{\mathbb{K}^n}$ und $\pi_{\mathbb{K}^m}$ die Projektionen von $\mathbb{K}^{n+m}$ auf $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$. Dann erhalten wir

$$X \times_Z Y \quad = \quad X \times Y \ \cap \ V(\Phi_1 \circ \pi_{\mathbb{K}^n} - \Psi_1 \circ \pi_{\mathbb{K}^m}, \ldots, \Phi_l \circ \pi_{\mathbb{K}^n} - \Psi_l \circ \pi_{\mathbb{K}^m}),$$

Folglich ist $X \times_Z Y$ algebraisch in $\mathbb{K}^{n+m}$. Die Kommutativität des Diagramms ist offensichtlich, und die Tatsache, dass die beteiligten Abbildungen Morphismen sind, ergibt sich mit Satz 2.5.1 (iii). $\square$

Bemerkung 2.5.8. Sind $\varphi\colon X \to Z$ sowie $\psi\colon Y \to Z$ algebraische Abbildungen irreduzibler algebraischer Mengen X, Y, Z, so ist $X \times_Z Y$ im allgemeinen nicht irreduzibel. Als Beispiel betrachten wir $X = Y = Z = \mathbb{K}^2$ und

$$\varphi\colon X \ \to \ Z, \quad (u,v) \ \mapsto \ (u, uv), \qquad \psi\colon Y \ \to \ Z, \quad (z,w) \ \mapsto \ (z, zw).$$

Dann ist die algebraische Menge $X \times_Z Y$ in $\mathbb{K}^4$ reduzibel. Ihre Zerlegung in irreduzible Komponenten ist konkret gegeben durch

$$\begin{aligned} X \times_Z Y \quad &= \quad \{(u,v,z,w);\ u = z,\ uv = zw\} \\ &= \quad V(T_1 - T_3, T_2 - T_4) \cup \ V(T_1, T_3). \end{aligned}$$

Aufgaben zu Abschnitt 2.5.

Aufgabe 2.5.9. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$, $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ und $Z \subseteq \mathbb{K}^l$ algebraische Mengen. Zeige: Sind $\varphi\colon Z \to X$ und $\psi\colon Z \to Y$ algebraische Abbildungen, so gibt es eine eindeutig bestimmte algebraische Abbildung $\kappa\colon Z \to X \times Y$ mit $\pi_X \circ \kappa = \varphi$ und $\pi_Y \circ \kappa = \psi$.

Aufgabe 2.5.10. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$, $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ und $Z \subseteq \mathbb{K}^l$ algebraische Mengen. Zeige: Man hat Isomorphien algebraischer Mengen in $\mathbb{K}^{n+m}$ bzw. $\mathbb{K}^{n+m+l}$:

$$X \times Y \;\cong\; Y \times X, \qquad\qquad (X \times Y) \times Z \;\cong\; X \times (Y \times Z).$$

Aufgabe 2.5.11. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$, $Y \subseteq \mathbb{K}^m$, $Z \subseteq \mathbb{K}^l$ algebraische Mengen und $\varphi\colon X \to Z$ sowie $\psi\colon Y \to Z$. Zeige: Sind $A \subseteq \mathbb{K}^r$ eine algebraische Menge und $\varphi'\colon A \to X$ und $\psi'\colon A \to Y$ algebraische Abbildungen mit $\varphi \circ \varphi' = \psi \circ \psi'$, so gibt es eine eindeutig bestimmte algebraische Abbildung $\kappa\colon A \to X \times_Z Y$ mit $\alpha \circ \kappa = \varphi \circ \varphi' = \psi \circ \psi'$.

3. Gröbnerbasen

3.1. Division mit Rest.

Erinnerung 3.1.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ der Polynomring in den Variablen $T_1,\ldots,T_n$. Ein *Monom* in $T_1,\ldots,T_n$ ist ein Polynom der Form

$$T^\nu \;=\; T_1^{\nu_1}\cdots T_n^{\nu_n}, \qquad \text{wobei } \nu \;=\; (\nu_1,\ldots,\nu_n) \;\in\; \mathbb{Z}^n_{\geq 0}.$$

Die Menge $\mathfrak{M}(n) \subseteq \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ aller Monome ist ein multiplikatives Untermonoid von $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$. Man hat zueinander inverse Monoidisomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n_{\geq 0} & \longleftrightarrow & \mathfrak{M}(n) \\ \nu & \mapsto & T^\nu, \\ \nu & \leftarrow\!\shortmid & T^\nu. \end{array}$$

Definition 3.1.2. Eine *Monomordnung* auf der Menge $\mathfrak{M}(n)$ ist eine Totalordnung "$\geq$" auf $\mathfrak{M}(n)$, sodass stets gilt

$$T^\nu \;\geq\; 1, \qquad T^\nu \geq T^\mu \;\Longrightarrow\; T^\kappa T^\nu \geq T^\kappa T^\mu.$$

Bemerkung 3.1.3. Ist "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$, so gilt $T^\nu T^\mu \geq T^\mu$ für je zwei $T^\nu, T^\mu \in \mathfrak{M}(n)$.

Beispiel 3.1.4 (Lexikographische Monomordnung)**.** Für zwei Monome $T^\nu, T^\mu \in \mathfrak{M}(n)$ setzt man

$$T^\nu \;>_{\mathrm{lex}}\; T^\mu \quad :\Longleftrightarrow \quad \nu_1 = \mu_1, \ldots, \nu_{k-1} = \mu_{k-1},\ \nu_k > \mu_k \text{ für ein } 1 \leq k \leq n.$$

Beispielsweise haben wir in $\mathfrak{M}(3)$:

$$T_1^2 T_2 T_3 \;>_{\mathrm{lex}}\; T_1 T_2^2 T_3^2 \;>_{\mathrm{lex}}\; T_1 T_2 T_3^3.$$

Beispiel 3.1.5 (Homogen-Lexikographische Monomordnung)**.** Für zwei Monome $T^\nu, T^\mu \in \mathfrak{M}(n)$ setzt man

$$\begin{array}{rcl} T^\nu \;>_{\mathrm{hlex}}\; T^\mu \quad :\Longleftrightarrow & \nu_1 + \ldots + \nu_n \;>\; \mu_1 + \ldots + \mu_n \\ & \text{oder} \\ & \nu_1 + \ldots + \nu_n \;=\; \mu_1 + \ldots + \mu_n \text{ und } T^\nu >_{\mathrm{lex}} T^\mu. \end{array}$$

Beispielsweise haben wir in $\mathfrak{M}(3)$:

$$T_1 T_2^2 T_3^2 \;>_{\mathrm{hlex}}\; T_1 T_2 T_3^3 \;>_{\mathrm{hlex}}\; T_1^2 T_2 T_3.$$

Satz 3.1.6. *Es sei "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Dann wird jede absteigende Folge $T^{\nu_1} \geq T^{\nu_2} \geq T^{\nu_3} \geq \ldots$ in $\mathfrak{M}(n)$ stationär. Insbesondere besitzt jede nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{M}(n)$ ein (eindeutiges) minimales Element.*

Beweis. Wir betrachten das von den T^{ν_i}, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, erzeugte Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$. Nach Satz 1.4.11 gilt $\mathfrak{a} = \langle T^{\nu_1},\ldots,T^{\nu_k}\rangle$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Jedes T^{ν_i} besitzt daher eine Darstellung

$$T^{\nu_i} \;=\; f_1 T^{\nu_1} \;+\; \ldots \;+\; f_k T^{\nu_k}$$

mit $f_1,\ldots,f_k \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$. Es folgt, dass T^{ν_i} ein Vielfaches eines Monoms T^{ν_j} mit $1 \leq j \leq k$ ist. Also gilt $T^{\nu_i} \geq T^{\nu_j}$. Für jedes $i \geq k$ hat man andererseits $T^{\nu_j} \geq T^{\nu_k} \geq T^{\nu_i}$. Das impliziert $T^{\nu_i} = T^{\nu_k} = T^{\nu_j}$. $\square$

Definition 3.1.7. Es sei “$\ge$” eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und es sei ein Polynom $f = \sum a_\nu T^\nu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

(i) Der *Multigrad* von f ist das maximale $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ mit $a_\nu \neq 0$.
(ii) Das *Leitmonom* von f ist das maximale $T^\nu \in \mathfrak{M}(n)$ mit $a_\nu \neq 0$.
(iii) Der *Leitterm* von f ist $\widehat{f} := a_\nu T^\nu$, wobei T^ν das Leitmonom von f ist.
(iv) Der *Leitkoeffizient* von f ist der Koeffizient a_ν des Leitterms $\widehat{f} = a_\nu T^\nu$.

Beispiel 3.1.8. Das Polynom $f = T_1^2 T_2 T_3 + 2T_1 T_2^2 T_3^2 + 5T_1 T_2 T_3^3 \in \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$ besitzt den Leitterm

- $\widehat{f} = T_1^2 T_2 T_3$ bezüglich der lexikographischen Ordnung,
- $\widehat{f} = 2T_1 T_2^2 T_3^2$ bezüglich der homogen-lexikographischen Ordnung.

Konstruktion 3.1.9. Es sei “$\ge$” eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und es seien Polynome $p, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $\widehat{g} \mid \widehat{p}$ gegeben. Dann hat man eine Darstellung

$$p \quad = \quad \frac{\widehat{p}}{\widehat{g}} g \; + \; \left(p - \frac{\widehat{p}}{\widehat{g}} g \right) \quad = \quad q_g(p) g \; + \; p_g$$

mit Polynomen $q_g(p) := \frac{\widehat{p}}{\widehat{g}}$ und $p_g := p - \frac{\widehat{p}}{\widehat{g}} g$. Dabei ist entweder das Leitmonom von p_g echt kleiner als das von p oder es gilt $p_g = 0$.

Konstruktion 3.1.10 (Division mit Rest)**.** Es sei “$\ge$” eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und es seien Polynome $f, g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

- Setze $q_1 := 0, \ldots, q_s := 0$, $r := 0$, $p := f$.
- Solange $p \neq 0$ gilt wiederhole:
  (a) Solange es ein i gibt mit $\widehat{g}_i \mid \widehat{p}$ setze
  $$q_i \; := \; q_i + q_{g_i}(p), \qquad p \; := \; p_{g_i}.$$
  (b) Falls $\widehat{g}_i \nmid \widehat{p}$ für alle i gilt, setze
  $$r \; := \; r + \widehat{p}, \qquad p \; := \; p - \widehat{p}.$$

Dieses Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten. Die konstruierten Polynome $q_1, \ldots, q_s, r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ leisten

$$f \quad = \quad q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r.$$

für den *Rest* r gilt $r = 0$, oder es wird keiner der Terme von r durch einen der Leitterme $\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s$ geteilt.

Beweis. In jedem Rechenschritt des Verfahrens wird das Leitmonom von p echt verkleinert. Satz 3.1.6 garantiert daher, dass das Verfahren nach endlich vielen Schritten mit $p = 0$ terminiert. Zu jedem Zeitpunkt des Verfahrens gilt

$$f \quad = \quad q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + p + r. \tag{3.1.10.1}$$

Dies ist klar für den Start. Wird p in (a) durch p_{g_i} ersetzt, so liefert $p = q_{g_i} g_i + p_{g_i}$ den Erhalt von (3.1.10.1). Wird p in (b) durch $p - \widehat{p}$ ersetzt, so wird r durch $r + \widehat{p}$ ersetzt, sodass (3.1.10.1) auch in diesem Schritt erhalten bleibt. □

Bemerkung 3.1.11. Das Ergebnis des Verfahren 3.1.10 hängt von der gewählten Reihenfolge der g_i ab. Insbesondere ist das Polynom r nicht eindeutig durch seine Eigenschaften bestimmt. Als konkretes Beispiel betrachten wir $\mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$, die lexikographische Ordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und die Polynome

$$f \; := \; T_1^2 + T_2 + T_3, \qquad g_1 \; := \; T_1^2 - T_2, \qquad g_2 \; := \; T_1^2 + T_3.$$

In der Initialisierung wird $q_1 = q_2 = 0 = r$ und $p = f$ gesetzt. Führen wir in (a) die erste Division mit $\widehat{g}_1$ durch, so erhalten wir $q_1 := q_{g_1}(p) = 1$ und $p := p_{g_1} = 2T_2 + T_3$. Kein $\widehat{g}_i$ teilt dann mehr $\widehat{p}$. Ausführung von (b) liefert zunächst $r = 2T_2$ und nach einem weiteren Schleifendurchlauf $r = 2T_2 + T_3$. Man endet also mit

$$f \quad = \quad q_1 g_1 \ + \ r \quad = \quad (T_1^2 - T_2) \ + \ (2T_2 + T_3).$$

Führen wir in (a) die erste Division mit $\widehat{g}_2$ durch, so erhalten wir $q_2 := q_{g_2}(p) = 1$ und $p := p_{g_2} = T_2$. Kein $\widehat{g}_i$ teilt dann mehr $\widehat{p}$. Ausführung von (b) liefert $r = T_2$. Man endet in diesem Fall mit

$$f \quad = \quad q_2 g_2 \ + \ r \quad = \quad (T_1^2 + T_3) \ + \ T_2.$$

Definition 3.1.12. Es sei "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal.

(i) Das zu dem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gehörige *Leittermideal* ist definiert als $\widehat{\mathfrak{a}} := \langle \widehat{f};\ f \in \mathfrak{a} \rangle$.

(ii) Eine Teilmenge $\{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathfrak{a}$ nennt man eine *Gröbnerbasis für das Ideal* $\mathfrak{a}$, falls $\widehat{\mathfrak{a}} = \langle \widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s \rangle$ gilt.

Beispiel 3.1.13. Wir betrachten die Polynome $f_1 := T_1^2 - T_2$ und $f_2 := T_1^2 + T_3$ sowie das Ideal $\mathfrak{a} := \langle f_1, f_2 \rangle$ in $\mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$. Es gilt

$$f \ := \ f_2 - f_1 \ = \ T_2 + T_3 \ \in \ \mathfrak{a}.$$

Bezüglich der lexikographischen Monomordnung erhält man für die Leitterme und das Leittermideal:

$$\widehat{f_1} \ = \ \widehat{f_2} \ = \ T_1^2, \qquad \widehat{f} \ = \ T_2, \qquad \widehat{\mathfrak{a}} = \langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \widehat{f} \rangle.$$

Insbesondere sehen wir, dass $\{f_1, f_2, f\}$ eine Gröbnerbasis ist, $\{f_1, f_2\}$ hingegen nicht.

Satz 3.1.14. *Es seien "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal.*

(i) *Die Leitterme $\widehat{f}$, wobei $f \in \mathfrak{a}$, erzeugen $\widehat{\mathfrak{a}}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(ii) *Jedes Monom in $\widehat{\mathfrak{a}}$ ist Leitterm eines Elements aus $\mathfrak{a}$.*

(iii) *Das Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ besitzt eine Gröbnerbasis.*

(iv) *Ist $\{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$, so gilt $\langle g_1, \ldots, g_s \rangle = \mathfrak{a}$.*

Beweis. Wir zeigen (i); Aussage (ii) ist dann eine direkte Folgerung. Das allgemeine Element $h \in \widehat{\mathfrak{a}}$ ist eine endliche Summe von Elementen $h_i \widehat{f_i}$ mit $f_i \in \mathfrak{a}$ und $h_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Schreibt man $h_i = \sum a_{i\nu} T^\nu$, so folgt

$$h \ = \ \sum_i h_i \widehat{f_i} \ = \ \sum_{i,\nu} a_{i\nu} T^\nu \widehat{f_i} \ = \ \sum_{i,\nu} a_{i\nu} \widehat{T^\nu f_i}.$$

Zu (iii). Nach Folgerung 1.4.8 ist das Leittermideal $\widehat{\mathfrak{a}}$ bereits durch endlich viele Monome $T^{\nu_1}, \ldots, T^{\nu_s}$ erzeugt. Diese sind nach (ii) Leitterme von Elementen $g_1, \ldots, g_s \in \mathfrak{a}$. Somit ist $\{g_1, \ldots, g_s\}$ die gewünschte Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$.

Zu (iv). Nehmen wir an, es gelte $\langle g_1, \ldots, g_s \rangle \subsetneq \mathfrak{a}$. Dann gibt es nach 3.1.6 ein $f \in \mathfrak{a} \setminus \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ minimalen Leitmonoms. Der zugehörige Leitterm ist von der Form $\widehat{f} = aT^\mu \widehat{g}_i$. Nach Wahl von f gilt $f - aT^\mu g_i \in \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Das impliziert $f \in \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Widerspruch. □

Satz 3.1.15. *Es seien "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal mit Gröbnerbasis $\{g_1, \ldots, g_s\}$. Dann hat jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Darstellung*

$$f \;=\; q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r, \qquad q_1, \ldots, q_s, r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n],$$

sodass $r = 0$ gilt oder kein Term von r durch einen der Leitterme $\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s$ geteilt wird. Das Polynom $r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist dadurch eindeutig bestimmt.

Beweis. Die gewünschte Darstellung von f erhält man mittels Division mit Rest gemäß 3.1.10. Es bleibt zu zeigen, dass r eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir an, wir hätten Darstellungen

$$f \;=\; q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r \;=\; q_1' g_1' + \ldots + q_s' g_s' + r'$$

mit $r \ne r'$. Dann gilt $r - r' \in \mathfrak{a}$. Der Leitterm von $r - r'$ ist eine Differenz gewisser Terme aT^ν von r und $a'T^\nu$ von r' und wir erhalten

$$(a - a')T^\nu \;=\; aT^\nu - a'T^\nu \;=\; \widehat{r - r'} \;\in\; \widehat{\mathfrak{a}}.$$

Dabei dürfen wir annehmen, dass $a \ne 0$ gilt. Da $\{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ ist, erhalten wir $aT^\nu = bT^\mu \widehat{g}_i$ für ein i. Das widerspricht der Tatsache, dass $\widehat{g}_i$ keinen der Terme von r teilt. □

Folgerung 3.1.16. *Es seien "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal mit Gröbnerbasis $\{g_1, \ldots, g_s\}$. Weiter sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $f \in \mathfrak{a}$.*
(ii) *Ist $f = q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r$ eine Division mit Rest, so gilt $r = 0$.*

Beweis. Die Implikation "(ii)⇒(i)" ist offensichtlich. Wir zeigen "(i)⇒(ii)". Nach Satz 3.1.14 erzeugen $g_1, \ldots, g_s$ das Ideal $\mathfrak{a}$. Folglich hat man eine Darstellung $f = q_1' g_1 + \ldots + q_s' g_s$. Satz 3.1.15 liefert dann $r = 0$. □

Aufgaben zu Abschnitt 3.1.

Aufgabe 3.1.17. Zeige, dass die lexikographische und die homogen-lexikographische Ordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ Totalordnungen sind und die Eigenschaften einer Monomordnung erfüllen.

Aufgabe 3.1.18. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Monomialideal. Zeige: Ist $T^\nu \in \mathfrak{a}$ das minimale Element bezüglich "$\geq$", so ist T^ν eine Spitze von $\mathfrak{a}$.

Aufgabe 3.1.19. Es sei "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Zeige: Für je zwei Elemente $f, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gilt $\widehat{fg} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Aufgabe 3.1.20. Gib ein Beispiel dafür, dass bereits im Falle $s = 1$ der Rest r in Konstruktion 3.1.10 von der Wahl der Monomordnung abhängt.

Aufgabe 3.1.21. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Zeige: $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Monomialideal, wenn $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ gilt.

Aufgabe 3.1.22. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Zeige: $\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Hauptideal, wenn $\widehat{\mathfrak{a}}$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3.1.23. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $f, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Die Menge $\{g\}$ ist eine Gröbnerbasis für das Ideal $\langle g \rangle \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.
(ii) Es gibt eine eindeutige Darstellung $f = qg + r$ mit $q, r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, sodass $r = 0$ gilt oder kein Term von r durch $\widehat{g}$ geteilt wird.

Beachte, dass die Darstellung $f = qg + r$ dabei von der Wahl der Monomordnung "$\geq$" abhängt; betrachte dazu $f = T_1 - T_2$ und $g = T_1 + T_2$ in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Aufgabe 3.1.24. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ von der Form $f_i = a_{i1}T_1 + \ldots + a_{in}T_n$ und es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r, n; \mathbb{K})$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $S \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ und $B := S \cdot A$, so wird $\mathfrak{a}$ erzeugt durch $g_1, \ldots, g_r$, wobei $g_i := b_{i1}T_1 + \ldots + b_{in}T_n$ mit den Einträgen b_{ij} von B.
(ii) Besitzt $B = S \cdot A$ aus (i) Zeilenstufenform, so ist $\{g_1, \ldots, g_r\}$ mit den g_i aus (i) eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung.

3.2. Buchbergers Algorithmus.

Konstruktion 3.2.1. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Teilmenge. Wir betrachten den Polynomring als $\mathbb{K}$-Vektorraum:

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;=\; \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \mathbb{K}\, T^\nu.$$

Zu jedem Paar (μ, g), wobei $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $g \in G$ mit $\widehat{g} \mid T^\mu$, definieren wir eine lineare Abbildung

$$R_{\mu,g}\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n], \qquad T^\nu \;\mapsto\; \begin{cases} T^\nu, & \nu \neq \mu, \\ T^\mu - \frac{T^\mu}{\widehat{g}} g, & \nu = \mu. \end{cases}$$

Ein *G-Reduktionsoperator* auf $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist eine Komposition endlich vieler R_{μ_i, g_i}, also ein linearer Endomorphismus von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ der Form

$$R \;=\; R_{\mu_k, g_k} \circ \ldots \circ R_{\mu_1, g_1},$$

wobei $\mu_i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $g_i \in G$ mit $\widehat{g}_i \mid T^{\mu_i}$. Die Menge aller G-Reduktionsoperatoren auf $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(G)$.

Lemma 3.2.2. *Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Teilmenge.*

(i) *Es sei $g \in G$ gegeben und es bezeichne T^μ das Leitmonom von g. Dann gilt $R_{\mu,g}(g) = 0$.*
(ii) *Es seien $T^\nu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und ein Operator $R \in \mathfrak{R}(G)$ gegeben. Dann gibt es einen Operator $R' \in \mathfrak{R}(G)$, sodass $R'(T^\nu f) = T^\nu R(f)$ für jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gilt.*
(iii) *Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ das von G erzeugte Ideal. Dann gilt $f - R(f) \in \mathfrak{a}$ für jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und jedes $R \in \mathfrak{R}(G)$.*

Beweis. Zu (i). Wir schreiben $g = \widehat{g} + \widetilde{g}$ mit $\widetilde{g} := g - \widehat{g}$. Weiter sei $\widehat{g} = aT^\mu$. Für $R := R_{\mu,g}(g)$ erhalten wir dann:

$$R(g) \;=\; R(\widehat{g}) + R(\widetilde{g}) \;=\; a(T^\mu - a^{-1}g) + \widetilde{g} \;=\; 0.$$

Zu (ii). Wir betrachten zunächst einen Operator $R_{\mu,g}$, wobei definitionsgemäß $g \in G$ und $\widehat{g} \mid T^\mu$ gelten. Dann haben wir

$$T^\nu R_{\mu,g}(T^\kappa) \;=\; \begin{cases} T^\nu T^\kappa, & \kappa \neq \mu, \\ T^\nu \left(T^\mu - \frac{T^\mu}{\widehat{g}} g \right), & \kappa = \mu, \end{cases}$$

$$R_{\nu+\mu,g}(T^{\nu+\kappa}) \;=\; \begin{cases} T^{\nu+\kappa}, & \kappa \neq \mu, \\ T^{\nu+\mu} - \frac{T^{\nu+\mu}}{\widehat{g}} g, & \kappa = \mu. \end{cases}$$

Es folgt $R_{\nu+\mu,g}(T^\nu f) = T^\nu R_{\mu,g}(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Die Behauptung ergibt sich durch sukzessives Anwenden dieser Gleichung:

$$T^\nu R_{\mu_k, g_k} \circ \ldots \circ R_{\mu_1, g_1}(f) \;=\; R_{\nu+\mu_k, g_k} \circ \ldots \circ R_{\nu+\mu_1, g_1}(T^\nu f).$$

Zu (iii). Es sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Nach Konstruktion gilt $R_{\mu,g}(f) = f + h_{\mu,g,f}\, g$ mit einem $h_{\mu,g,f} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Für beliebiges $R \in \mathfrak{R}(G)$ erhalten wir folglich $R(f) = f + \widetilde{g}$ mit einem $\widetilde{g} \in \mathfrak{a}$. □

Bemerkung 3.2.3. Es seien eine Monomordnung "$\geq$" auf $\mathfrak{M}(n)$, eine Teilmenge $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $f, p \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Teilt der Leitterm $\widehat{g}_i$ von g_i den Leitterm $\widehat{p} = aT^\mu$ von p, so gilt

$$p_{g_i} \;=\; p - \frac{\widehat{p}}{\widehat{g}_i} g_i \;=\; R_{\mu, g_i}(p).$$

Die Schritte vom Typ a) in 3.1.10 lassen sich also durch G-Reduktionsoperatoren beschreiben. Den im Verfahren 3.1.10 ermittelten Rest r erhält man als Bild $r = R(f)$ mit der Komposition R aller im Verfahren verwendeten R_{μ,g_i}.

Definition 3.2.4. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Teilmenge. Weiter sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

(i) Das Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ heißt *G-reduziert*, falls $R(f) = f$ für alle G-Reduktionsoperatoren $R \in \mathfrak{R}(G)$ gilt.
(ii) Eine *G-Reduktion von f* ist ein G-reduziertes Polynom f' der Form $f' = R(f)$ mit einem $R \in \mathfrak{R}(G)$.
(iii) Wir sagen, dass $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *eindeutige G-Reduktion* besitzt, falls je zwei G-Reduktionen von f übereinstimmen.

Satz 3.2.5. *Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine endliche Teilmenge. Weiter sei $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Polynom h ist G-reduziert.*
(ii) *Kein Term von h wird durch einen der Leitterme $\widehat{g}$, $g \in G$, geteilt.*
(iii) *Jede Division von h durch G gemäß 3.1.10 liefert den Rest h.*

Insbesondere ist für jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ der im Verfahren 3.1.10 ermittelte Rest r von f bezüglich G eine G-Reduktion von f.

Beweis. Die Aussagen ergeben sich sofort aus den jeweiligen Konstruktionen. □

Satz 3.2.6. *Es "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Weiter sei eine endliche Teilmenge $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben und es sei $\mathfrak{a} := \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ das davon erzeugte Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ besitzt eindeutige G-Reduktion.*
(ii) *Jedes $f \in \mathfrak{a}$ besitzt 0 als eine mögliche G-Reduktion.*
(iii) *Die Menge G ist eine Gröbnerbasis für das Ideal $\mathfrak{a}$.*

Lemma 3.2.7. *Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Besitzen $f, f' \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eindeutige G-Reduktionen $R(f)$ bzw. $R'(f')$, so besitzt $af + bf'$, wobei $a, b \in \mathbb{K}$, die eindeutige G-Reduktion $aR(f) + bR'(f')$.*

Beweis. Es sei $R''(af + bf')$ eine G-Reduktion von $af + bf'$. Dann gibt es Reduktionsoperatoren $U \in \mathfrak{R}(G)$ mit $U(R''(f)) = R(f)$ und $V \in \mathfrak{R}(G)$ mit $V(U(R''(f'))) = R'(f')$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R''(af + bf') &= V(U(R''(af + bf'))) \\ &= aV(U(R''(f))) + bV(U(R''(f'))) \\ &= aV(R(f)) + bR'(f') \\ &= aR(f) + bR'(f'). \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 3.2.6. Zu "(i)⇒(ii)". Bezeichnet T^{μ_i} das Leitmonom von g_i, so gilt $R_{\mu_i,g_i}(g_i) = 0$ nach Lemma 3.2.2 (i). Lemma 3.2.2 (ii) liefert für jedes Element $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ einen Operator $R \in \mathfrak{R}(G)$ mit $R(T^\nu g_i) = 0$. Somit besitzen alle Vielfachen $aT^\nu g_i$ die eindeutige G-Reduktion 0. Nach Lemma 3.2.7 besitzt dann jedes Element $h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s \in \mathfrak{a}$ die (eindeutige) G-Reduktion 0.

Wir zeigen "(ii)⇒(iii)". Nehmen wir an, G sei keine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$. Dann gibt es ein Monom $T^\mu \in \widehat{a}$, das von keinem der Leitterme $\widehat{g}$, $g \in G$ geteilt wird. Nach

Satz 3.1.14 gilt $T^\mu = \widehat{f}$ für ein $f \in \mathfrak{a}$. Folglich taucht das Monom T^μ für jedes $R \in \mathfrak{R}(G)$ in $R(f)$ auf. Insbesondere ist 0 keine G-Reduktion von f.

Wir zeigen "(iii)⇒(i)". Es sei $R(f)$ eine G-Reduktion von f. Lemma 3.2.2 (iii) liefert $f - R(f) \in \mathfrak{a}$ und somit eine Darstellung

$$f \;=\; (f - R(f)) + R(f) \;=\; q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + R(f).$$

Nach Satz 3.2.5 wird kein Term von $R(f)$ durch eines der $\widehat{g}_i$ geteilt. Satz 3.1.15 sagt uns, dass $R(f)$ dadurch eindeutig bestimmt ist. □

Bemerkung 3.2.8. Für zwei Terme $aT^\nu, bT^\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, wobei $a, b \in \mathbb{K}^*$, ist das normierte kleinste gemeinsame Vielfache gegeben durch

$$\mathrm{kgV}(aT^\nu, bT^\mu) \;:=\; T^\kappa, \qquad \kappa_i \;:=\; \max(\nu_i, \mu_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definition 3.2.9. Es sei "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Das zu zwei Polynomen $0 \ne f, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gehörige *S-Polynom* ist

$$S(f,g) \quad := \quad \frac{\mathrm{kgV}(\widehat{f}, \widehat{g})}{\widehat{f}} \cdot f \;-\; \frac{\mathrm{kgV}(\widehat{f}, \widehat{g})}{\widehat{g}} \cdot g \quad \in \quad \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Satz 3.2.10 (S-Paar-Kriterium). *Es sei "$\ge$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Weiter sei eine endliche Teilmenge $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben und es sei $\mathfrak{a} := \langle G \rangle$ das davon erzeugte Ideal. Schliesslich sei für jedes Paar i, j eine G-Reduktion $R_{ij}(S(g_i, g_j))$ durch Division mit Rest berechnet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Menge G ist eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$.*
(ii) *Für je zwei i, j gilt $R_{ij}(S(g_i, g_j)) = 0$.*

Beweis. Zur Implikation "(i)⇒(ii)". Nach Definition liegt $S(g_1, g_2)$ in dem von G erzeugten Ideal $\mathfrak{a}$. Satz 3.1.15 liefert $R_{ij}(S(g_1, g_2)) = 0$.

Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Nach Satz 3.2.6 genügt es zu zeigen, dass jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eindeutige G-Reduktion besitzt. Wir verwenden Induktion über den Multigrad μ von f. Für den Induktionsanfang $\mu = 0$ ist $f = bT^0$ zu betrachten. Jede G-Reduktion f' von f ist dann gegeben durch

$$f' \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } \widehat{g}_i = aT^0 \text{ für ein } i, \\ bT^0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, alle Polynome vom Multigrad $\mu' < \mu$ haben eindeutige G-Reduktion. Um eindeutige G-Reduktion für ein Polynom f vom Multigrad μ zu erhalten, genügt es nach Lemma 3.2.7, Eindeutigkeit der G-Reduktion für das Monom T^μ zu zeigen.

Es seien zwei G-Reduktionen $R_1(T^\mu)$ und $R_2(T^\mu)$ von T^μ gegeben. Dann haben wir $R_1 = R_1' \circ R_{\mu, g_i}$ und $R_2 = R_2' \circ R_{\mu, g_j}$ mit Operatoren $R_1', R_2' \in \mathfrak{R}(G)$. Dabei verringern R_{μ, g_i} sowie R_{μ, g_j} den Multigrad von T^μ. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{\mu, g_j}(T^\mu) - R_{\mu, g_i}(T^\mu) \quad &= \quad \left(T^\mu - \frac{T^\mu}{\widehat{g}_j} g_j \right) - \left(T^\mu - \frac{T^\mu}{\widehat{g}_i} g_i \right) \\ &= \quad \frac{T^\mu}{\widehat{g}_i} g_i - \frac{T^\mu}{\widehat{g}_j} g_j \\ &= \quad \frac{T^\mu}{\mathrm{kgV}(\widehat{g}_i, \widehat{g}_j)} S(g_i, g_j). \end{aligned}$$

Der G-Reduktionsoperator R_{ij} annulliert das S-Polynom $S(g_i, g_j)$. Lemma 3.2.2 (ii) liefert uns einen G-Reduktionsoperator R'_{ij}, der den Ausdruck in der letzten Zeile annulliert. Es folgt

$$R'_{ij} \circ R_{\mu,g_j}(T^\mu) \quad = \quad R'_{ij} \circ R_{\mu,g_i}(T^\mu).$$

Anwenden eines geeigneten $R' \in \mathfrak{R}(G)$ liefert eine G-Reduktion h für beide Seiten der Gleichung. Das Polynom h ist auch für $R_{\mu,g_j}(T^\mu)$ und $R_{\mu,g_i}(T^\mu)$ eine G-Reduktion. Mit der Induktionsannahme erhalten wir

$$R_1(T^\mu) \ = \ R'_1 \circ R_{\mu,g_i}(T^\mu) \ = \ h \ = \ R'_2 \circ R_{\mu,g_j}(T^\mu) \ = \ R_2(T^\mu).$$

□

Konstruktion 3.2.11 (Buchberger-Algorithmus)**.** Es sei "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Weiter sei $F \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine endliche Menge.

- Setze $G := F$
- Wiederhole
  - $H := G$,
  - Für jedes Paar $g, g' \in H$:
    - berechne eine H-Reduktion $R(S(g, g'))$ durch Division mit Rest,
    - falls $R(S(g, g')) \neq 0$, setze $G := G \cup \{R(S(g, g'))\}$

  bis $G = H$.

Dieses Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten und G ist dann eine Gröbnerbasis für das Ideal $\langle F \rangle \leq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Beweis. Um zu sehen, dass das Verfahren terminiert, betrachten wir das Leittermideal $\langle \widehat{g};\ g \in G \rangle$. Jeder Schleifendurchlauf mit einem $R(S(g, g')) \neq 0$ vergrößert dieses Ideal. Da $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ noethersch ist, kann das nur endlich oft passieren, d.h. das Verfahren terminiert. Dabei haben wir $\langle G \rangle = \langle F \rangle$, und gemäß Konstruktion besitzt jedes $S(g, g')$ triviale G-Reduktion. Nach Satz 3.2.10 ist G also eine Gröbnerbasis für $\langle F \rangle$. □

Aufgaben zu Abschnitt 3.2.

Aufgabe 3.2.12. Es seien “$\le$” eine Monomordung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $R \in \mathfrak{R}(G)$. Weiter seien $f, h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist h eine G-Reduktion für $R(f)$, so ist h auch eine G-Reduktion für f.
(ii) Für die Leitmonome T^μ von f und T^ν von $R(f)$ gilt $T^\mu \ge T^\nu$.

Aufgabe 3.2.13. Formuliere das Divisionsverfahren 3.1.10 in termini von Reduktionsoperatoren. Beweise damit Bemerkung 3.2.3.

Aufgabe 3.2.14. Es seien “$\le$” eine Monomordung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $G \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Zeige ohne Verwendung des Divisionsverfahrens 3.1.10, dass jedes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine G-Reduktion besitzt.

Aufgabe 3.2.15. Betrachte die Polynome $g_1 := T_2 - T_1^2$, $g_2 := T_3 - T_2^3 \in \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$ und das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{a} := \langle g_1, g_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$.

(i) Zeige, dass $\{g_1, g_2\}$ eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bezüglich “$\ge_{\mathrm{hlex}}$” ist.
(ii) Beweise oder widerlege: $T_2^4 - 2T_2^3T_1^2 + T_2^2T_1^4 - T_1T_3 + T_1T_2^3$ ist ein Element aus $\mathfrak{a}$.

Aufgabe 3.2.16. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ von der Form $f_i = a_{i1}T_1 + \ldots + a_{in}T_n$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r, n; \mathbb{K})$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und zeige folgende Aussagen:

(i) Ist $S \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ und $B := S \cdot A$, so gilt $\mathfrak{a} = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, wobei $g_i := b_{i1}T_1 + \ldots + b_{in}T_n$ mit Einträgen b_{ij} von B.
(ii) Die Menge $\{T_1 + 2T_2, T_3\}$ ist eine Gröbnerbasis des Ideals $\langle 2T_1 + 4T_2 + 5T_3\,,\ T_1 + 2T_2 + 2T_3 \rangle$. *Hinweis:* Verwende $S := \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3.3. Berechnungen mit Gröbnerbasen.

Erinnerung 3.3.1. Es seien eine Monomordnung "$\geq$" auf $\mathfrak{M}(n)$ und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ ist eine endliche Teilmenge $G \subseteq \mathfrak{a}$, sodass das Leittermideal von $\mathfrak{a}$ durch die Leitterme der $g \in G$ erzeugt wird:

$$\widehat{\mathfrak{a}} \; = \; \langle \widehat{f};\ f \in \mathfrak{a} \rangle \; = \; \langle \widehat{g};\ g \in G \rangle.$$

Jede Gröbnerbasis $G \subseteq \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a}$ erzeugt bereits das Ideal, d.h. es gilt $\mathfrak{a} = \langle G \rangle$. Gilt $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ mit Polynomen f_i, so kann man $F := \{f_1, \ldots, f_r\}$ mit dem Buchberger-Algorithmus zu einer Gröbnerbasis $G \subseteq \mathfrak{a}$ vervollständigen.

Eine entscheidende Eigenschaft von Gröbnerbasen $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq \mathfrak{a}$ ist die Division modulo G mit *eindeutigem* Rest: Hat man für ein gegebenes $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Darstellung

$$f \; = \; q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r \qquad \text{mit } q_i, r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n],$$

wobei $r = 0$ gilt oder keiner der Terme durch einen Leitterm $\widehat{g}_i$ geteilt wird, so ist der Rest r eindeutig bestimmt. Insbesondere hat man genau dann $r = 0$, wenn $f \in \mathfrak{a}$ gilt.

Verfahren 3.3.2 (Idealmitgliedschaftstest)**.** Es seien $f, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Es soll entschieden werden, ob $f \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ gilt.

- Wähle eine Monomordnung "$\geq$" auf $\mathfrak{M}(n)$.
- Berechne eine Gröbnerbasis $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ für das Ideal $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.
- Führe Division mit Rest durch: $f = q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r$.

Mit dem so berechneten Rest $r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ erhalten wir: $f \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \iff r = 0$.

Bemerkung 3.3.3. Es seien zwei Ideale $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $\mathfrak{b} = \langle h_1, \ldots, h_t \rangle$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Wir betrachten die Ideale

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}), \quad \sqrt{\mathfrak{a}}$$

und wollen Gröbnerbasen dafür berechnen. In den ersten beiden Fällen ist klar wie man vorgeht, für die letzten drei benötigt man etwas Vorarbeit.

Definition 3.3.4. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Für $1 \leq k \leq n$ fassen wir $\mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n]$ als Unterring von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ auf und definieren das *k-te Eliminationsideal* von $\mathfrak{a}$ als

$$\mathfrak{a}_k \; := \; \mathfrak{a} \cap \mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n] \; \leq \; \mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n].$$

Satz 3.3.5. *Es seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal und $G \subseteq \mathfrak{a}$ eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bezüglich "$\geq_{\mathrm{lex}}$". Für jedes Eliminationsideal $\mathfrak{a}_k \subseteq \mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n]$ erhält man dann eine Gröbnerbasis $G_k \subseteq \mathfrak{a}_k$ bezüglich "$\geq_{\mathrm{lex}}$" durch*

$$G_k \; := \; G \cap \mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n] \; \subseteq \; \mathfrak{a}_k.$$

Beweis. Wir müssen $\widehat{\mathfrak{a}}_k = \langle \widehat{g};\ g \in G_k \rangle$ zeigen. Die Inkusion "$\supseteq$" ist dabei offensichtlich. Zum Nachweis von "$\subseteq$" sei $T^\mu \in \widehat{\mathfrak{a}}_k$ gegeben. Dann gilt $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$. Nach Satz 3.1.14 gilt weiter $T^\mu = \widehat{f}$ mit einem $f \in \mathfrak{a}_k$. Wegen $\mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{a}$ erhalten wir $f \in \mathfrak{a}$. Da G eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ ist, gilt $T^\mu = \widehat{f} = T^\nu \widehat{g}$ mit geeigneten $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $g \in G$. Dabei gilt $\widehat{g} = aT^\kappa$ mit $\kappa \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Aus $\mu = \nu + \kappa$ folgt $\kappa_1 = \ldots = \kappa_k = 0$. Das bedeutet $g \in \mathbb{K}[T_{k+1}, \ldots, T_n]$ und somit $g \in G_k$. $\square$

Satz 3.3.6. *Es seien zwei Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *gegeben. Mit dem Ideal* $\mathfrak{c} := \langle T_0 \rangle \mathfrak{a} + \langle 1 - T_0 \rangle \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{K}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$ *gilt dann*

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \quad = \quad \mathfrak{c} \cap \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Beweis. Die Inklusion "$\subseteq$" ist offensichtlich: Ist ein Element $g \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ gegeben, so erhalten wir

$$g \;=\; T_0 g + (1 - T_0) g \;\in\; \mathfrak{c} \cap \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Zum Nachweis der Inklusion "$\supseteq$" sei $g \in \mathfrak{c} \cap \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Wegen $g \in \mathfrak{c}$ gibt es eine Darstellung

$$g \;=\; T_0 \sum_{j=0}^{m} f_j T_0^j + (1 - T_0) \sum_{j=0}^{m} h_j T_0^j \;=:\; \gamma(T_0) \;\in\; \mathbb{K}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$$

mit Polynomen $f_j \in \mathfrak{a}$ und $h_j \in \mathfrak{b}$. Da das Polynom g nicht von der Variablen T_0 abhängt, ergibt sich

$$g = \gamma(0) = h_0 \in \mathfrak{b}, \qquad g = \gamma(1) = \sum_{j=0}^{m} f_j \in \mathfrak{a}.$$

□

Verfahren 3.3.7. Es seien zwei Ideale $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $\mathfrak{b} = \langle h_1, \ldots, h_t \rangle$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

- Berechne eine Gröbnerbasis $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ bezüglich "$\geq_{\mathrm{lex}}$" für das Ideal $\mathfrak{c} := \langle T_0 f_1, \ldots, T_0 f_r, (1 - T_0) h_1, \ldots, (1 - T_0) h_t \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$
- Bestimme die Gröbnerbasis $G_0 = G \cap \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ für das Eliminationsideal $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c} \cap \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Dann ist $G_0 \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ eine Gröbnerbasis bezüglich "$\geq_{\mathrm{lex}}$" für den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Lemma 3.3.8. *Es seien ein K1-Ring* R*, ein Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *und Elemente* $f_1, \ldots, f_r \in R$ *gegeben. Dann gilt*

$$(\mathfrak{a} : \langle f_1, \ldots, f_r \rangle) \quad = \quad (\mathfrak{a} : \langle f_1 \rangle) \;\cap\; \ldots \;\cap\; (\mathfrak{a} : \langle f_r \rangle).$$

Beweis. Mit $\mathfrak{b}_i := \langle f_i \rangle$ erhalten wir die Aussage sofort aus der Definition des Idealquotienten: Es gilt

$$(\mathfrak{a} : \textstyle\sum \mathfrak{b}_i) \;=\; \{h \in R;\ h \textstyle\sum \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a}\} \;=\; \{h \in R;\ h\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \text{ für alle } i\} \;=\; \bigcap (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i).$$

□

Lemma 3.3.9. *Es seien ein Integritätsring* R*, ein Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *und* $f \in R$ *gegeben. Gilt* $\mathfrak{a} \cap \langle f \rangle = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ *mit* $h_1, \ldots, h_r \in R$*, so gilt* $(\mathfrak{a} : \langle f \rangle) = \langle h_1/f, \ldots, h_r/f \rangle$.

Beweis. Zunächst vermerken wir, dass jedes h_i ein Vielfaches von f und somit $h_i/f \in R$ ein wohldefiniertes Ringelement ist. Die Inklusion "$\supseteq$" ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass $h_i/f\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{a}$ für jedes i gilt. Zum Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" sei $h \in \mathfrak{a} : \langle f \rangle$ gegeben. Dann gilt $hf \in \mathfrak{a} \cap \langle f \rangle$ und wir erhalten eine Darstellung $hf = \sum a_i h_i$ mit $a_i \in R$. Folglich liegt $h = \sum a_i h_i / f$ in $\langle h_1/f, \ldots, h_r/f \rangle$. □

Verfahren 3.3.10. Es seien zwei Ideale $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $\mathfrak{b} = \langle h_1, \ldots, h_t \rangle$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

- Für jedes i berechne eine Gröbnerbasis F_i bezüglich "$\geq_{\mathrm{lex}}$" für $\mathfrak{a} \cap \langle h_i \rangle$.
- Für jedes i bilde $H_i := \{f/h_i;\ f \in F_i\}$ mittels Division mit Rest.
- Setze $G := \{1\}$.

- Für i von 1 bis t erledige:
  - Berechne eine Gröbnerbasis G_i bezüglich "$\geq_{\text{lex}}$" für $\langle G \rangle \cap \langle H_i \rangle$,
  - setze $G := G_i$.

Dann gilt $G \subseteq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und G ist eine Gröbnerbasis bezüglich "$\geq_{\text{lex}}$" für den Idealquotienten $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.

Satz 3.3.11. *Es seien $f, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$*
(ii) *Es gilt $1 \in \langle f_1, \ldots, f_r, 1 - fT_{n+1} \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$.*

Beweis. Wir zeigen "(i)$\Rightarrow$(ii)". Wegen $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$ gilt $f^m \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ für ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= f^m T_{n+1}^m + (1 - f^m T_{n+1}^m) \\ &= f^m T_{n+1}^m \ + \ (1 - fT_{n+1})(1 + fT_{n+1} + \ldots + f^{m-1} T_{n+1}^{m-1}) \\ &\in \langle f_1, \ldots, f_r, 1 - fT_{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Zur Implikation "(ii)$\Rightarrow$(i)". Nach Voraussetzung gibt es $q, q_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$ sodass

$$1 = \sum_{i=1}^{r} q_i f_i \ + \ q(fT_{n+1} - 1) \qquad (3.3.11.1)$$

gilt. Es bezeichne $\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$ den Quotientenkörper von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}] \ \to \ \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n), \qquad T_i \mapsto T_i, \quad T_{n+1} \mapsto \frac{1}{f}.$$

Die Idee ist es nun, φ auf die obige Gleichung (3.3.11.1) anzuwenden. Zunächst beachte man, dass

$$\varphi(q_i) = \sum_{j=0}^{m_i} \frac{q_{ij}}{f^j}$$

mit Polynomen $q_{ij} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gilt. Setzt man nun $m := \max(m_1, \ldots, m_r)$, so liefert Anwenden von φ auf (3.3.11.1) und Multiplizieren mit f^m die Identität

$$f^m = \sum_{i=1}^{k} f^m \varphi(q_i) f_i$$

in $\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$. Nach Wahl von m ist jedes $f^m \varphi(q_i)$ ein Polynom in $T_1, \ldots, T_n$. Damit ergibt sich $f^m \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. Also gilt $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$. $\square$

Verfahren 3.3.12 (Radikalmitgliedschaft)**.** Es seien $f, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Es soll entschieden werden, ob $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$ gilt.

- Wähle eine Monomordnung "$\geq$" auf $\mathfrak{M}(n+1)$.
- Berechne eine Gröbnerbasis $\{g_1, \ldots, g_s\}$ für $\langle f_1, \ldots, f_r, 1 - fT_{n+1} \rangle$.
- Führe Division mit Rest durch: $1 = q_1 g_1 + \ldots + q_s g_s + r$.

Mit dem so berechneten Rest $r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$ gilt genau dann $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$, wenn $r = 0$.

Definition 3.3.13. Es sei "$\leq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Eine Gröbnerbasis G für $\mathfrak{a}$ nennt man *reduziert*, falls

(i) jedes $g \in G$ normiert ist, d.h. Leitkoeffizienten 1 besitzt,

(ii) für je zwei $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$ der Leitterm $\widehat{g}$ keinen Term von g' teilt.

Verfahren 3.3.14 (Reduzierte Gröbnerbasis)**.** Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal mit Gröbnerbasis G.

- Setze $G_0 := \{a_g^{-1} g;\ g \in G\}$, wobei a_g der Leitkoeffizient von g sei.
- Solange es $g_1, g_2 \in G_0$ mit $g_1 \neq g_2$ und $\widehat{g}_1 \mid \widehat{g}_2$ gibt,
  - setze $G_0 := G_0 \setminus \{g_2\}$.
- Nummeriere $G_0 = \{g_1, \ldots, g_s\}$, sodass $\widehat{g}_1 > \ldots > \widehat{g}_s$ gilt.
- Für $i = 1, \ldots, s-1$ erledige:
  - berechne einen Rest r_i von g_i modulo $\{g_{i+1}, \ldots, g_s\}$,
  - setze $G_0 := (G_0 \setminus \{g_i\}) \cup \{r_i\}$.

Das Verfahren terminiert und G_0 ist dann eine reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Beweis. Da $|G_0|$ sich in jedem Schritt der ersten Schleife echt verkleinert, wir diese nur endlich oft durchlaufen. Somit terminiert das Verfahren. Das Leittermideal $\langle \widehat{g}; g \in G_0 \rangle$ wird in keinem Schritt verändert. Insbesondere ist G_0 eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$. Die Schleifen stellen sicher, dass G_0 reduziert ist. □

Satz 3.3.15. *Es seien "$\leq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Dann besitzt jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ genau eine reduzierte Gröbnerbasis.*

Beweis. Die Existenz reduzierter Gröbnerbasen ist nach Verfahren 3.3.14 gesichert. Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien zwei reduzierte Gröbnerbasen $\{g_1, \ldots, g_s\}$ und $\{h_1, \ldots, h_t\}$ für $\mathfrak{a}$ gegeben. Dann gilt

$$\langle \widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s \rangle \;=\; \widehat{\mathfrak{a}} \;=\; \langle \widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_t \rangle.$$

Wir wählen nun für jedes $1 \leq j \leq t$ ein $i(j)$ und ein $\nu_j \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ sowie für jedes $1 \leq i \leq s$ ein $j(i)$ und ein $\mu_i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit

$$\widehat{h}_j \;=\; T^{\nu_j} \widehat{g}_{i(j)}, \qquad \widehat{g}_i \;=\; T^{\mu_i} \widehat{h}_{j(i)}.$$

Dann gilt $\widehat{h}_j = T^{\nu_j} \widehat{g}_{i(j)} = T^{\nu_j + \mu_{i(j)}} \widehat{h}_{j(i(j))}$. Es folgt $j(i(j)) = j$ und $\widehat{h}_j = \widehat{g}_{i(j)}$. Also hat man eine injektive Abbildung

$$\{\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_t\} \;\to\; \{\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s\}, \qquad \widehat{h}_j \;\mapsto\; \widehat{g}_{i(j)} = \widehat{h}_j.$$

Analog konstruiert man eine injektive Abbildung in die umgekehrte Richtung. Es folgt die Gleichheit

$$\{\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_t\} \quad = \quad \{\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_s\}.$$

Wir zeigen nun $h_j = g_{i(j)}$. Die Differenz $g_{i(j)} - h_j$ liegt in $\mathfrak{a}$ und keiner ihrer Terme wird durch ein $\widehat{h}_k$ geteilt. Also gilt $g_{i(j)} - h_j = 0$. □

Verfahren 3.3.16 (Idealvergleich)**.** Es seien "$\geq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ sowie $\mathfrak{b} = \langle h_1, \ldots, h_i \rangle$ Ideale in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

- Berechne eine reduzierte Gröbnerbasis G für $\mathfrak{a}$.
- Berechne eine reduzierte Gröbnerbasis H für $\mathfrak{b}$.

Man hat genau dann Gleichheit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ der Ideale, wenn Gleichheit $G = H$ für die reduzierten Gröbnerbasen gilt.

Aufgaben zu Abschnitt 3.3.

Aufgabe 3.3.17. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale in R. Beweise folgende Aussagen.

(i) Für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{k+1}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^k) : \mathfrak{b})$.
(ii) Die *Saturierung* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty) := \bigcup_{k=1}^\infty (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^k)$ ist ein Ideal in R.
(iii) Falls R noethersch ist, existiert ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^m)$.

Betrachte nun den Fall $R = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Gib ein Verfahren an, um eine Gröbnerbasis bezüglich "$\geq_{\text{lex}}$" für die Saturieerung $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty$ zu bestimmen.

Aufgabe 3.3.18. Es seien "$\geq$" eine Monomordnung, $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal und G eine reduzierte Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathfrak{a}$ ist ein Monomialideal.
(ii) G besteht aus Monomen.

Aufgabe 3.3.19. Es seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ von der Form $f_i = a_{i1}T_1 + \ldots + a_{in}T_n$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und zeige: Gilt $\det A \neq 0$, so besteht die reduzierte Gröbnerbasis von $\mathfrak{a}$ aus Monomen.

Aufgabe 3.3.20. Berechne eine reduzierte Gröbnerbasis für den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ der folgenden Ideale in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$:

$$\mathfrak{a} := \langle T_1^2 T_2 \rangle, \qquad \mathfrak{b} := \langle T_1 T_2^2 \rangle.$$

Aufgabe 3.3.21. Berechne mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus:

(i) Die reduzierte Gröbnerbasis von $\langle T^3 - 3T + 2,\ T^2 - 1 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$,
(ii) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal $\langle 2T_1 + T_2,\ 5T_1 + 3T_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2]$.

4. Der Hilbertsche Nullstellensatz

4.1. Körpererweiterungen.

Erinnerung 4.1.1. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine *Körpererweiterung*, d.h. $\mathbb{K}$ ist ein Körper und $k \subseteq \mathbb{K}$ ein Unterkörper. Der *Grad* von $k \subseteq \mathbb{K}$ ist die Dimension des k-Vektorraumes $\mathbb{K}$:

$$[\mathbb{K} : k] \quad = \quad \dim_k(\mathbb{K}).$$

Man nennt $k \subseteq \mathbb{K}$ *endlich*, falls $[\mathbb{K} : k] \leq \infty$ gilt. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *algebraisch* über k, falls $f(a) = 0$ mit einem Polynom $0 \neq f \in k[T]$ gilt. Man nennt $k \subseteq \mathbb{K}$ *algebraisch*, falls jedes $a \in \mathbb{K}$ algebraisch über k ist.

Ein *Zwischenkörper* von $k \subseteq \mathbb{K}$ ist ein Unterkörper $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ mit $k \subseteq \mathbb{L}$. Jede Teilmenge $B \subseteq \mathbb{K}$ erzeugt einen Zwischenkörper

$$\begin{aligned} k(B) \quad &:= \quad \left\{ab^{-1};\ a, b \in k[B],\ b \neq 0\right\} \\ &= \quad \left\{\frac{f(b_1, \ldots, b_n)}{g(b_1, \ldots, b_n)};\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ f, g \in k[T_1, \ldots, T_n],\ b_i \in B.\right\} \end{aligned}$$

Gilt $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$, so schreibt man auch $k(b_1, \ldots, b_r)$ für $k(B)$. Man nennt $k \subseteq \mathbb{K}$ *endlich erzeugt*, falls $\mathbb{K} = k(b_1, \ldots, b_r)$ gilt mit $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{K}$.

Satz 4.1.2. *Für jede Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ gilt:*

(i) *Ist $k \subseteq \mathbb{K}$ endlich, so ist $k \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch.*
(ii) *Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ algebraisch über k, so ist $k \subseteq k(a_1, \ldots, a_n)$ endlich und algebraisch.*
(iii) *Ist $k \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ ein Zwischenkörper, für den $k \subseteq \mathbb{L}$ und $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch sind, so ist auch $k \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch.*

Folgerung 4.1.3. *Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ ist endlich.*
(ii) *Die Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ ist algebraisch und endlich erzeugt.*

Folgerung 4.1.4. *Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Dann ist die Menge $L \subseteq \mathbb{K}$ aller über k algebraischen Elemente ein Zwischenkörper von $k \subseteq \mathbb{K}$.*

Definition 4.1.5. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung.

(i) Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *transzendent* über k, falls es nicht algebraisch über k ist.
(ii) Die Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ heißt, *rein transzendent*, falls jedes Element aus $\mathbb{K} \setminus k$ transzendent ist.

Definition 4.1.6. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung.

(i) Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{K}$ heißt *algebraisch abhängig* über k, falls es paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_n \in B$ und ein $0 \neq f \in k[T_1, \ldots T_n]$ gibt mit

$$f(b_1, \ldots, b_n) \quad = \quad 0.$$

(ii) Man nennt eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{K}$ *algebraisch unabhängig* über k, falls sie nicht algebraisch abhängig über k ist.
(iii) Eine maximale über k algebraisch unabhängige Teilmenge $B \subseteq \mathbb{K}$ nennt man eine *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$.

Beispiel 4.1.7. Wir betrachten die Körpererweiterung $k \subseteq k(T_1, \ldots, T_n)$. Die Menge $\{T_1, \ldots, T_n\}$ ist algebraisch unabhängig über k, denn für jedes Polynom $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ hat man

$$f(T_1, \ldots, T_n) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \;=\; 0.$$

Weiter ist $\{T_1, \ldots, T_n\}$ maximal, denn jede Vergrösserung $\{T_1, \ldots, T_n, f/g\}$ ist algebraisch abhängig über k: Mit den Polynomen $f'(T_1, \ldots, T_{n+1}) := -f(T_1, \ldots, T_n)$ und $g'(T_1, \ldots, T_{n+1}) := g(T_1, \ldots, T_n)T_{n+1}$ hat man

$$(g' + f')(T_1, \ldots, T_n, f/g) \quad = \quad 0.$$

Folglich ist $\{T_1, \ldots, T_n\}$ eine Transzendenzbasis für $k(T_1, \ldots, T_n)$. Da $k(T_1, \ldots, T_n)$ zudem über k von $\{T_1, \ldots, T_n\}$ erzeugt wird, ist $k \subset k(T_1, \ldots, T_n)$ eine rein transzendente Erweiterung, wie wir später sehen werden.

Bemerkung 4.1.8. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann transzendent über k, wenn $\{a\}$ algebraisch unabhängig über k ist.

Satz 4.1.9. *Ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine algebraisch unabhängige Teilmenge der Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$, so gilt $k(B) \cong k(T_1, \ldots, T_n)$.*

Beweis. Die universelle Eigenschaft des Polynomringes liefert uns einen Epimorphismus

$$\Phi\colon k[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; k[b_1, \ldots, b_n], \qquad f \;\mapsto\; f(b_1, \ldots, b_n).$$

Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ algebraisch unabhängig ist, gilt $\ker(\Phi) = \{0\}$. Somit ist Φ ein Isomorphismus. Die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers liefert daher ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "f \mapsto \Phi(f)"] \arrow[d] & k[b_1, \ldots, b_n] \arrow[d] \\
k(T_1, \ldots, T_n) \arrow[r, "\frac{f}{g} \mapsto \frac{\Phi(f)}{\Phi(g)}"'] & k(b_1, \ldots, b_n)
\end{tikzcd}$$

kanonischer Homomorphismen. Nach Definition von $k(b_1, \ldots, b_n)$ ist der untere waagerechte Pfeil surjektiv, und somit ein Isomorphismus. □

Satz 4.1.10. *Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Dann gilt:*

(i) *Sind $A \subseteq B \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen, und ist A algebraisch unabhängig über k, so gibt es eine Transzendenzbasis $C \subseteq B$ für $k \subseteq k(B)$ mit $A \subseteq C \subseteq B$.*
(ii) *Ist $B \subseteq \mathbb{K}$ eine Transzendenzbasis für $k \subseteq \mathbb{K}$, so ist $k \subseteq k(B)$ rein transzendent und $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ ist algebraisch.*
(iii) *Für je zwei Transzendenzbasen $B, B' \subseteq \mathbb{K}$ von $k \subseteq \mathbb{K}$ gilt $|B| = |B'|$.*

Folgerung 4.1.11. *Jede Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ besitzt eine Transzendenzbasis.*

Definition 4.1.12. Der *Transzendenzgrad* einer Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ ist die Ordnung einer Transzendenzbasis $B \subseteq \mathbb{K}$ für $k \subseteq \mathbb{K}$:

$$\mathrm{trdeg}_k(\mathbb{K}) \quad := \quad |B|.$$

Bemerkung 4.1.13. (i) Es gilt $\mathrm{trdeg}_k(k(T_1, \ldots, T_n)) = n$.
(ii) Ist $k \subseteq \mathbb{K}$ endlich erzeugt, so ist $\mathrm{trdeg}_k(\mathbb{K})$ endlich.

Lemma 4.1.14. *Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung, und es sei $B \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch unabhängig über k. Dann gilt:*

(i) *Jedes Element $b \in k(B) \setminus k$ ist transzendent über k.*

(ii) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann transzendent über $k(B)$, wenn $B \cup \{a\}$ algebraisch unabhängig über k ist.*

Beweis. Zu (i): Nehmen wir an, $b \in k(B) \setminus k$ sei algebraisch über k. Dann gibt es ein nichttriviales Polynom $f \in k[T]$ mit $f(b) = 0$. Wegen $b \in k(B) \setminus k$ gibt es weiter Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$, sodass

$$b \quad = \quad \frac{g(b_1, \ldots, b_n)}{h(b_1, \ldots, b_n)}$$

gilt mit teilerfremden Polynomen $g, h \in k[T_1, \ldots, T_n]$, von denen mindestens eines nicht konstant ist. Setzen wir diese Darstellung in $f(b) = 0$ ein, so erhalten wir algebraische Abhängigkeit von $\{b_1, \ldots, b_n\}$ wie folgt:

$$h(b_1, \ldots, b_n)^{\deg(f)} f\left(\frac{g(b_1, \ldots, b_n)}{h(b_1, \ldots, b_n)}\right) \quad = \quad 0.$$

Zu (ii): Es sei zunächst a transzendent über $k(B)$. Wäre $B \cup \{a\}$ algebraisch abhängig über k, so gäbe es Elemente $b_1, \ldots, b_r \in B$ und ein $f \in k[T_1, \ldots, T_{r+1}]$ mit

$$f(b_1, \ldots, b_r, a) \quad = \quad 0.$$

Sortiert man nun nach Potenzen der letzten Variablen, so ergibt sich, dass a algebraisch über $k(B)$ ist. Widerspruch.

Es sei jetzt $B \cup \{a\}$ algebraisch unabhängig. Nehmen wir an, a sei algebraisch über $k(B)$. Dann erhalten wir

$$c_0 + c_1 a + \ldots + c_{n-1} a^{n-1} + a^n \quad = \quad 0$$

mit gewissen Elementen $c_i \in k(B)$. Nun ist jedes dieser c_i mit geeigneten $b_j \in B$ und $g_i, h_i \in k[T_1, \ldots, T_r]$ von der Gestalt

$$c_i \quad = \quad \frac{g_i(b_1, \ldots, b_r)}{h_i(b_1, \ldots, b_r)}.$$

Geht man mit diesen Darstellungen der c_i in das oben gewählte annullierende Polynom von a und multipliziert mit dem Hauptnenner durch, so ergibt sich algebraische Abhängigkeit von $B \cup \{a\}$. Widerspruch. □

Beweis von Satz 4.1.10. Zu (i). Wir betrachten die (nichtleere) Menge M aller über k algebraisch unabhängigen Teilmengen $D \subseteq B$ mit $A \subseteq D$. Es sei $M' \subseteq M$ total geordnet. Dann ist

$$\bigcup_{D \in M'} D$$

offensichtlich wieder algebraisch unabhängig und somit eine obere Schranke in M für die Kette M'. Nach dem Zornschen Lemma besitzt die Menge M also maximale Elemente. Es sei $C \in M$ ein solches.

Wir zeigen, dass C die gewünschte Transzendenzbasis für $k \subseteq k(B)$ ist. Offenbar gilt $A \subseteq C \subseteq B$. Wäre C nicht maximal in $k(B)$, so gäbe es ein Element $a \in k(B) \setminus C$, sodass $C \cup \{a\}$ algebraisch unabhängig über k ist. Nach Lemma 4.1.14 (ii) ist a transzendent über $k(C)$. Nun ist a von der Form

$$a \quad = \quad \frac{f(b_1, \ldots, b_r)}{g(b_1, \ldots, b_r)}$$

mit $f, g \in k[T_1, \ldots, T_r]$ und $b_i \in B$. Da a transzendent über $k(C)$ ist, muss nach Satz 4.1.2 (ii) ein b_i transzendent über $k(C)$ sein. Also ist $C \cup \{b_i\}$ nach Lemma 4.1.14 (ii) über k algebraisch unabhängige Menge. Dies widerspricht jedoch der Maximalität von $C \in M$.

Zu (ii). Die Tatsache, dass $k \subseteq k(B)$ rein transzendent ist, war bereits in Lemma 4.1.14 (i) bewiesen worden. Wäre $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ nicht algebraisch, so gäbe es ein über $k(B)$ transzendentes Element $a \in \mathbb{K}$. Nach Lemma 4.1.14 (ii) wäre dann $B \cup \{a\}$ algebraisch unabhängig über k. Widerspruch zur Maximalität von B.

Zu (iii). Sind alle Transzendenzbasen von $k \subseteq \mathbb{K}$ unendlich, so ist nichts zu zeigen. Wir dürfen also annehmen, dass es endliche Transzendenzbasen für $k \subseteq \mathbb{K}$ gibt; es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine solche minimaler Länge n.

Es genügt dann zu zeigen, dass jede weitere Transzendenzbasis C von $k \subseteq \mathbb{K}$ höchstens n Elemente besitzt. Nehmen wir an, C besitze mehr als n Elemente. Wir wählen ein $c_1 \in C$ und betrachten die Körpererweiterung

$$k \quad \subseteq \quad k(c_1, b_1, \ldots, b_n).$$

Nach Aussage (i) finden wir eine Transzendenzbasis C_1 für diese Körpererweiterung, so dass $C_1 \subseteq B \cup \{c_1\}$ und $c_1 \in C_1$ gelten. Nach geeignetem Umnumerieren von $b_1, \ldots, b_n$ gilt also

$$C_1 \;=\; \{c_1, b_1, \ldots, b_{n_1}\}, \qquad \text{mit } n_1 < n.$$

Dabei muss $n_1 < n$ gelten, weil $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ nach (ii) algebraisch ist und C_1 andernfalls gemäß Lemma 4.1.14 (ii) algebraisch abhängig wäre. Die Körpererweiterungen

$$k(C_1) \;\subseteq\; k(B \cup \{c_1\}), \qquad k(B \cup \{c_1\}) \;\subseteq\; \mathbb{K}$$

sind, wiederum nach (ii), algebraisch. Nach Satz 4.1.2 (iii) ist damit auch die Erweiterung $k(C_1) \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch.

In einem zweiten Schritt wählen wir ein $c_2 \in C$ mit $c_2 \neq c_1$, sodass $\{c_1, c_2\}$ algebraisch unabhängig ist. Wie oben erhalten wir nach Umnumerieren von $b_1, \ldots, b_{n_1}$ eine Tanszendenzbasis

$$C_2 \;=\; \{c_1, c_2, b_1, \ldots, b_{n_2}\}, \qquad \text{mit } n_2 < n_1$$

für die Körpererweiterung $k \subseteq k(C_1 \cup \{c_2\})$. Wie im ersten Schritt hat man auch hier algebraische Erweiterungen

$$k(C_2) \;\subseteq\; k(C_1 \cup \{c_2\}), \qquad k(C_1 \cup \{c_2\}) \;\subseteq\; \mathbb{K}$$

Folglich ist $k(C_2) \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch. Nehmen wir nun nach diesem Verfahren weitere Elemente c_i aus C hinzu, so gelangen wir wegen $|C| > n$ schließlich zu einer Menge

$$C_r \;=\; \{c_1, \ldots, c_r\}, \qquad r \leq n,$$

für die $k(C_r) \subseteq \mathbb{K}$ eine algebraische Erweiterung ist. Wegen $C_r \subsetneq C$ widerspricht das der algebraischen Unabhängigkeit von C. □

Aufgaben zu Abschnitt 4.1.

Aufgabe 4.1.15. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige: Es gilt entweder $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$ oder $\mathrm{Char}(\mathbb{K})$ ist eine Primzahl. *Hinweis:* Zeige zunächst, dass für den Primkörper $\mathbb{P}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathbb{K}} \ \cong\ \mathbb{Q} \\ \mathrm{Char}(\mathbb{K}) = p > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_{\mathbb{K}} \ \cong\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1.16 (Frobenius-Homomorphismus)**.** Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeige:

(i) Die folgende Abbildung ist ein Monomorphismus:

$$\mathrm{Frob}_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad a \mapsto a^p.$$

(ii) Der Primkörper $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}$ von $\mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}} \quad = \quad \{a \in \mathbb{K};\ \mathrm{Frob}_{\mathbb{K}}(a) = a\}$$

Aufgabe 4.1.17. Es seien $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung, und es seien $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Zeige:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[b_1, \ldots, b_n] \quad &= \quad \{f(b_1, \ldots, b_n);\ f \in k[T_1, \ldots, T_n]\}, \\ \mathbb{K}(b_1, \ldots, b_n) \quad &= \quad \left\{ \frac{f(b_1, \ldots, b_n)}{g(b_1, \ldots, b_n)};\ f, g \in k[T_1, \ldots, T_n],\ g(b_1, \ldots, b_n) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Gib ein explizites Beispiel einer Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ mit Elementen $b_1, \ldots, b_n$, sodass $k[B] \neq k(B)$ gilt

Aufgabe 4.1.18. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Zeige:

(i) Ein Element $a \in \mathbb{K}^*$ ist genau dann algebraisch über k, wenn $a^{-1} \in k[a]$ gilt.
(ii) Die Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$ ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring $R \subseteq \mathbb{K}$ mit $k \subseteq R$ ein Körper ist.

Aufgabe 4.1.19. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ eine echte algebraische Erweiterung mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}(a)$ für ein $a \in \mathbb{K}$, so ist $[\mathbb{K} : \mathbb{R}]$ eine gerade Zahl.
(ii) Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erlaubt keine Erweiterung $\mathbb{C} \subset \mathbb{K}$ mit $[\mathbb{K} : \mathbb{C}] = 2$.

Aufgabe 4.1.20. Bestimme, jeweils mit Begründung, den Grad $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ für

$$a \ = \ \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \ \in \ \mathbb{R}, \qquad a \ = \ \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \ \in \ \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4.1.21. Zeige: $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Aufgabe 4.1.22. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Zeige: Ist $[\mathbb{K} : k]$ eine Primzahl, so gilt $\mathbb{K} = k(a)$ mit einem $a \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 4.1.23. Es seien $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $a, b \in \mathbb{K}$ algebraisch. Zeige: Sind $m := [k(a) : k]$ und $n := [k(b) : k]$ teilerfremd, so gilt $[k(a, b) : k] = mn$.

Aufgabe 4.1.24. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine endliche Körpererweiterung, und es sei $a \in \mathbb{K}$. Betrachte die k-lineare Abbildung $\varphi_a \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $v \mapsto av$ und zeige:

(i) Das Minimalpolynom $f_a \in k[T]$ des Elements $a \in \mathbb{K}$ ist auch das Minimalpolynom des k-linearen Endomorphismus $\varphi_a \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(ii) Gilt $\mathbb{K} = k(a)$, so ist das Minimalpolynom f_a gerade das charakteristische Polynom $\det(T \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{K}} - \varphi_a)$ von φ_a.
(iii) Das charakteristische Polynom von φ_a ist stets eine Potenz des Minimalpolynoms f_a.

Aufgabe 4.1.25. Es seien $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $a \in \mathbb{K}$ transzendent über $\mathbb{K}$. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt

(i) $a^n \in \mathbb{K}$ ist transzendent über k,

(ii) $[k(a) : k(a^n)] = n$.

Aufgabe 4.1.26. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine transzendente Körpererweiterung. Zeige: $k \subseteq \mathbb{K}$ besitzt unendlich viele echte Zwischenkörper.

Aufgabe 4.1.27. Es seien $k \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ Körpererweiterungen. Zeige: Ist $k \subseteq \mathbb{K}$ endlich erzeugt, so ist auch $k \subseteq \mathbb{L}$ endlich erzeugt.

4.2. **Noethersche Moduln.**

Erinnerung 4.2.1. Es sei R ein K1-Ring. Ein *(unitärer) R-Modul* ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer Abbildung

$$R \times M \ \to\ M, \qquad (r,u) \ \mapsto\ r{\cdot}u,$$

genannt *Skalarmultiplikation*, sodass für $r,r' \in R$ und $u,u' \in M$ stets folgendes gilt:

$$1{\cdot}u \ = \ u, \quad (r'r){\cdot}u \ = \ r'{\cdot}(r{\cdot}u), \quad (r'+r){\cdot}u \ = \ r'{\cdot}u + r{\cdot}u, \quad r{\cdot}(u+u') \ = \ r{\cdot}u + r{\cdot}u'.$$

Jedes Ideal $\mathfrak{a} \le R$ ist ein R-Modul. Weiter ist R^n bezüglich der komponentenweisen Verknüpfungen ein R-Modul.

Ein *Homomorphismus* von einem R-Modul M in einen R-Modul N ist eine R-lineare Abbildung $\varphi\colon M \to N$, d.h., es gilt stets

$$\varphi(u_1+u_2) \ = \ \varphi(u_1)+\varphi(u_2), \qquad \varphi(r{\cdot}u) \ = \ r{\cdot}\varphi(u).$$

Ein *Untermodul* eines R-Moduls M ist eine Untergruppe $N \subseteq M$ mit $RN \subseteq N$; wir schreiben dafür auch $N \le M$. Jede Teilmenge $A \subseteq M$ erzeugt einen Untermodul

$$\langle A \rangle \ := \ \left\{ \sum r_i v_i;\ r_i \in R,\ v_i \in A \right\} \ \le \ M.$$

Falls $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gilt, so schreiben wir auch $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ für $\langle A \rangle$. Ist $\varphi\colon M \to M'$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so gilt

$$N \ \le \ M \implies \varphi(N) \le M', \qquad N' \ \le \ M' \implies \varphi^{-1}(N') \le M.$$

Das *direkte Produkt* über eine Familie M_i, $i \in I$, von R-Moduln ist das (mengentheoretische) Produkt $\prod_{i \in I} M_i$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen:

$$(u_i)_{i\in I} \ + \ (u_i')_{i \in I} \ := \ (u_i + u_i')_{i \in I}, \qquad r{\cdot}(u_i)_{i\in I} \ := \ (r{\cdot}u_i)_{i \in I}.$$

Die *direkte Summe* der R-Moduln M_i, $i \in I$, ist der Untermodul aller endlichen Folgen in $\prod_{i\in I} M_i$

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \quad := \quad \left\{ (u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i;\ u_i \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } i \in I \right\}.$$

Der *Faktormodul* eines R-Moduls M nach einem Untermodul $N \le M$ ist die Faktorgruppe M/N mit der (wohldefinierten) Skalarmultiplikation

$$R \times M/N \ \to\ M/N, \qquad r{\cdot}(u+N) \ := \ r{\cdot}u + N$$

Die kanonische Abbildung $\pi\colon M \to M/N$, $u \mapsto u+N$ ist ein Epimorphismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) = N$.

Definition 4.2.2. Es sei R ein K1-Ring. Unter einer *Sequenz* von R-Moduln versteht man eine Folge von R-Modulhomomorphismen $\varphi_i\colon M_{i-1} \to M_i$:

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

Man nennt eine solche Sequenz *exakt an der Stelle* M_i, falls $\varphi_i(M_{i-1}) = \ker(\varphi_{i+1})$ gilt. Man nennt die gesamte Sequenz *exakt*, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

Bemerkung 4.2.3. Eine Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ von R-Moduln ist genau dann exakt, wenn folgendes gilt:

(i) φ ist injektiv,
(ii) $\varphi(M') = \ker(\psi)$,
(iii) ψ ist surjektiv.

Ist die obige Sequenz exakt, so hat man $M' \cong \varphi(M')$ un der Homomorphiesatz liedert einen Isomorphismus

$$M/\varphi(M') \ \to \ M'', \qquad v + \varphi(M') \ \mapsto \ \psi(v).$$

Beispiel 4.2.4. Die beiden folgenden Sequenzen von $\mathbb{Z}$-Moduln sind exakt:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{u \mapsto nu} \mathbb{Z} \xrightarrow{v \mapsto v + n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{u \mapsto (u,0)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(u,v) \mapsto v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Definition 4.2.5. Eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ von R-Moduln *spaltet*, falls $M = \varphi(M') \oplus N$ gilt mit einem Untermodul $N \subseteq M$.

Satz 4.2.6. *Es sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Sequenz* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ *spaltet.*
(ii) *Es gibt einen Homomorphismus* $\varrho\colon M \to M'$ *mit* $\varrho \circ \varphi = \mathrm{id}_{M'}$.
(iii) *Es gibt einen Homomorphismus* $\sigma\colon M'' \to M'$ *mit* $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$.

Gilt eine dieser drei Aussagen, so hat man ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "v' \mapsto (v',0)"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "(v',v'') \mapsto v''"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)" und "(i)⇒(iii)". Es sei $N \le M$ ein Untermodul mit $M = \varphi(M') \oplus N$. Dann können wir jedes $v \in M$ eindeutig zerlegen als $v = v' + u$ mit $v' \in \varphi(M')$ und $u \in N$. Damit erhalten wir die gewünschten Homomorphismen:

$$\varrho\colon M \ \to \ M', \quad v' + u \ \mapsto \ \varphi^{-1}(v'), \qquad \sigma\colon M'' \ \to \ M, \quad w \ \mapsto \ (\psi_{|N})^{-1}(w).$$

Zu "(ii)⇒(i)". Wir zeigen, dass $N := \ker(\varrho)$ der gewünschte Untermodul ist. Dazu ist zu zeigen:

$$\varphi(M') \cap N \ = \ \{0\}, \qquad\qquad \varphi(M') + N \ = \ M$$

Zum Nachweis der ersten Eigenschaft sei $v = \varphi(v') \in \varphi(M') \cap N$ gegeben. Dann erhalten wir $v = 0$ mit

$$0 \ = \ \varrho(v) \ = \ \varrho(\varphi(v')) \ = \ v'.$$

Zum Nachweis der ersten Eigenschaft vermerken wir, dass jedes $v \in M$ sich folgendermaßen darstellen lässt

$$v \ = \ \varphi(\varrho(v)) + (v - \varphi(\varrho(v))) \ \in \ \varphi(M') + N.$$

Zu "(iii)⇒(i)". Wir zeigen, dass $N := \sigma(M'')$ der gewünschte Untermodul von M ist. Es gilt $\varphi(M') \cap N = \{0\}$, denn für jedes $v = \sigma(v'') \in \varphi(M') \cap N$ haben wir

$$0 \ = \ \psi(v) \ = \ \psi(\sigma(v'')) \ = \ v''.$$

Weiter erhalten wir $M = \varphi(M') + N$, denn jedes Element $v \in M$ besitzt eine Darstellung

$$v \ = \ (v - \sigma(\psi(v))) + \sigma(\psi(v)) \ \in \ \varphi(M') + N.$$

□

Definition 4.2.7. Es sei R ein K1-Ring. Ein R-Modul M heißt *noethersch*, falls jeder Untermodul $N \le M$ endlich erzeugt ist, d.h., von der Gestalt $N = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ mit $v_1, \ldots, v_r \in M$ ist.

Bemerkung 4.2.8. Es seien R ein K1-Ring und M ein noetherscher R-Modul. Dann ist M endlich erzeugt. Weiter ist jeder Untermodul von M noethersch.

Satz 4.2.9. *Es seien R ein K1-Ring und M ein R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der R-Modul M ist noethersch.*
(ii) *Jede Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln $N_i \le M$ wird stationär.*

Beweis. Man kann die Argumente des Beweises von Satz 1.4.4 fast wörtlich übernehmen.

Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Es sei eine aufsteigende Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln $N_i \le M$ gegeben. Dann erhält man einen Untermodul

$$N \; := \; \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\ge 1}} N_i \; \le \; M.$$

Nach (i) ist N endlich erzeugt, etwa von Elementen $v_1, \ldots, v_m$. Wir finden ein $r \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, sodass alle v_i in N_r liegen. Offenbar gilt $N_i = N_r$ für $i \ge r$.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Nehmen wir an, $N \le M$ sei nicht endlich erzeugt. Es gilt $\{0\} =: N_1 \subsetneq N$. Folglich gibt es ein $u_2 \in N \setminus N_1$. Dann ist $N_2 := Ru_2 + N_1$ endlich erzeugt, und wir haben $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N$. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man eine echt aufsteigende unendliche Kette von Untermoduln. Widerspruch zu (ii). □

Satz 4.2.10. *Es sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Moduln M' und M'' sind noethersch.*
(ii) *Der Modul M ist noethersch.*

Beweis. Zu "(i)$\Rightarrow$(ii)". Es sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ eine Kette von Untermoduln in M. Dann erhält man aufsteigende Ketten von Untermoduln in M' bzw. M'' durch Übergang zu Urbild bzw. Bild:

$$\varphi^{-1}(M_1) \subseteq \varphi^{-1}(M_2) \subseteq \ldots, \qquad \psi(M_1) \subseteq \psi(M_2) \subseteq \ldots .$$

Diese Ketten werden nach Voraussetzung stationär, d.h. es gibt ein n mit $M_i = M_n$ für alle $i \ge n$. Wir zeigen $M_{i+1} = M_i$ für jedes $i \ge n$. Dafür sei $v \in M_{i+1}$ gegeben. Dann gilt

$$v \;\in\; \psi^{-1}(\psi(M_{i+1})) \;=\; \psi^{-1}(\psi(M_i)) \;=\; M_i + \ker(\psi) \;=\; M_i + \varphi(M').$$

Also haben wir eine Darstellung $v = v_i + \varphi(v')$ mit $v_i \in M_i$ und $v' \in M'$. Dabei gilt $\varphi(v') = v - v_i \in M_{i+1}$. Es folgt $v' \in \varphi^{-1}(M_{i+1}) = \varphi^{-1}(M_i)$ und somit $\varphi(v') \in M_i$. Das impliziert $v = v_i + \varphi(v') \in M_i$.

Zu "(ii)$\Rightarrow$(i)". Offenbar ist $M' \cong \varphi(M') \le M$ noethersch. Wir zeigen, dass M'' noethersch ist. Ist $N'' \le M''$ gegeben, so ist $\psi^{-1}(N'')$ endlich erzeugt, etwa durch $v_1, \ldots, v_r$. Damit ist N'' durch $\psi(v_1), \ldots, \psi(v_r)$ erzeugt. □

Folgerung 4.2.11. *Es seien R ein K1-Ring und M, N noethersche R-Moduln. Dann ist auch die direkte Summe $M \oplus N$ ein noetherscher R-Modul.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich sofort durch Anwenden von Satz 4.2.10 auf die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u \mapsto (u,0)} M \oplus N \xrightarrow{(u,v) \mapsto v} N \longrightarrow 0$$

□

Satz 4.2.12. *Es seien R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M ein noetherscher Modul.*

Beweis. In einem ersten Schritt behandeln wir per Induktion über n den Fall $M = R^n$. Für $n = 1$ ist die Situation klar: Hier sind die Untermoduln $N \le R$ genau die Ideale $N \le_R R$. Da R noethersch ist, sind alle $N \le R$ endlich erzeugt.

Für den Induktionsschritt, d.h., den Übergang von $n-1$ nach n zerlegen wir den R-Modul R^n gemäß

$$R^n \quad = \quad R^{n-1} \oplus R$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite sind nach Induktionsvoraussetzung bzw. Induktionsanfang noethersch. Folgerung 4.2.11 liefert somit, dass R^n noethersch ist.

Im allgemeinen Fall wählen wir Erzeugende $u_1, \ldots u_n$ für den R-Modul M. Damit erhalten wir einen Epimorphismus

$$\pi\colon R^n \ \to \ M, \qquad (r_1, \ldots, r_n) \ \mapsto \ r_1 u_1 + \ldots + r_n u_n.$$

Ist nun $N \le M$ ein Untermodul, so ist $\pi^{-1}(N)$ ein Untermodul von R^n und deshalb nach Schritt 1 des Beweis endlich erzeugt, etwa durch $v_1, \ldots, v_s$. Dann sind $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_s)$ Erzeugende für N. □

Satz 4.2.13 (Satz von Artin und Tate)**.** *Es seien $R \subseteq S \subseteq T$ Ringerweiterungen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *R ist noethersch.*
(ii) *$R \subseteq T$ ist als Ringerweiterung endlich erzeugt.*
(iii) *T ist ein endlich erzeugter S-Modul.*

Dann ist auch $R \subseteq S$ als Ringerweiterung endlich erzeugt.

Beweis. Es seien $c_1, \ldots, c_m \in T$ Erzeugende der Ringerweiterung $R \subseteq T$, und es sei T als S-Modul erzeugt von $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in T$. Dann hat man Beziehungen

$$c_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_j, \quad \text{mit } s_{ij} \in S, \tag{4.2.13.1}$$

$$\gamma_i \gamma_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} s_{ijk} \gamma_k, \quad \text{mit } s_{ijk} \in S. \tag{4.2.13.2}$$

Es sei $S_0 \subseteq S$ der von den Elementen s_{ij} und s_{ijk} erzeugte Unterring über R. Dann gilt $R \subseteq S_0 \subseteq S$, und nach Folgerung 1.4.10 ist ein S_0 noetherscher Ring.

Nun ist jedes $c \in T$ ein algebraischer Ausdruck in $c_1, \ldots, c_m$ mit Koefizienten in R. Mit den beiden obigen Beziehungen erhält man, daß c eine Linearkombination in den γ_i mit Koeffizienten in S_0 ist.

Mit anderen Worten: T ist ein endlich erzeugter S_0-Modul. Da S_0 noethersch ist, muß auch S nach Satz 4.2.12 endlich erzeugter S_0-Modul sein. Da $R \subseteq S_0$ zudem eine endlich erzeugte Ringerweiterung ist, muss dies auch für $R \subseteq S$ gelten. □

Aufgaben zu Abschnitt 4.2.

Aufgabe 4.2.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $0 \to V_0 \to \ldots \to V_n \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige: Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(V_i) \quad = \quad 0.$$

Aufgabe 4.2.15. Es sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ spaltet.
(ii) Für jedes $v \in \mathbb{Z}^n$ und jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt $kv \in \varphi(M') \Rightarrow v \in \varphi(M')$.
(iii) Der Modul M'' ist torsionsfrei.

Aufgabe 4.2.16. Es sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Beweise folgende Aussagen:

(i) Existiert ein Homomorphismus $\varrho\colon M \to M'$ mit $\varrho \circ \varphi = \mathrm{id}_{M'}$, so hat man ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "v\mapsto(\varrho(v),\psi(v))"', "\cong"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "v'\mapsto(v',0)"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "(v',v'')\mapsto v''"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) Existiert ein Homomorphismus $\sigma\colon M'' \to M'$ mit $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$, so hat man ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\psi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "v'\mapsto(v',0)"'] & M' \oplus M'' \arrow[r, "(v',v'')\mapsto v''"'] \arrow[u, "\cong", "(v',v'')\mapsto\varphi(v')+\sigma(v'')"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 4.2.17. Jeder kommutative Ring R mit Einselement ist auf kanonische Weise ein R-Modul mit der Skalarmultiplikation $r \cdot a := ra$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Ring R ist noethersch.
(ii) Der R-Modul R ist noethersch.

Aufgabe 4.2.18. Gib ein Beispiel von Ringerweiterungen $R \subseteq S \subseteq T$, sodass R noethersch ist, T als R-Modul endlich erzeugt ist, aber $R \subseteq S$ keine endlich erzeugte Ringerweiterung ist.

4.3. Der Hilbertsche Nullstellensatz.

Satz 4.3.1 (Hilbertscher Nullstellensatz, Version I). *Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Gilt $\mathbb{K} = k[a_1, \ldots, a_r]$ mit Elementen $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$, so ist $k \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch.*

Erinnerung 4.3.2. Ein Element $p \in R$ eines Integritätsringes R heisst *prim*, falls $0 \neq p \notin R^*$ gilt und $p|ab$ stets $p|a$ oder $p|b$ impliziert. Man nennt $p, q \in R$ *assoziiert zueinander*, in Zeichen $p \sim q$, falls $q = cp$ mit einer Einheit $c \in R^*$ gilt. Unter einem *Primsystem* verstehen wir ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzrelation "$\sim$" auf der Menge aller Primelemente von R.

Ein Integritätsring R heisst *faktoriell*, falls jede Nichteinheit von R ein Produkt von Primelementen ist. Der Satz von Gauss besagt, dass mit R auch $R[T]$ faktoriell ist. Insbesondere ist $k[T_1, \ldots, T_r]$ für jeden Körper k ein faktorieller Ring.

Lemma 4.3.3. *Es sei R ein faktorieller Ring. Dann enthält der Polynomring $R[T_1, \ldots, T_n]$ eine unendliche Menge paarweise nichtassoziierter Primelemente.*

Beweis. Wegen $R[T_1, \ldots, T_n] \cong R[T_1, \ldots, T_{n-1}][T]$ genügt es, die Aussage für $R[T]$ zu beweisen.

Es sei $P \subset R[T]$ eine maximale Menge paarweise nichtassoziierter Primelemente. Da $T \in R[T]$ prim ist, dürfen wir $T \in P$ annehmen. Wir nehmen nun an, P sei endlich, etwa $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Wir betrachten

$$f \ := \ p_1 \cdots p_r + 1 \ \in \ R[T].$$

Wegen $T \in P$ ist f ein Polynom positiven Grades und somit kann f keine Einheit in $R[T]$ sein. Primfaktorzerlegung von f liefert

$$p_1 \cdots p_r + 1 \quad = \quad p_i g$$

mit einem $1 \leq i \leq r$ und einem Polynom $g \in R[T]$. Wir dürfen dabei $i = 1$ annehmen. Dann erhalten wir

$$1 \quad = \quad p_1(g - p_2 \cdots p_r).$$

Das bedeutet jedoch, dass p_1 eine Einheit in $R[T]$ ist. Widerspruch zu p_1 Primelement in $R[T]$. $\square$

Lemma 4.3.4. *Es sei k ein Körper. Dann ist die Ringerweiterung $k \subseteq k(T_1, \ldots, T_n)$ nicht endlich erzeugt.*

Beweis. Nehmen wir an, $k(T_1, \ldots, T_n)$ sei als Ringerweiterung über k von den Elementen $f_1, \ldots, f_s$ erzeugt. Wir schreiben

$$f_i \quad = \quad \frac{g_i(T_1, \ldots, T_n)}{h_i(T_1, \ldots, T_n)}$$

mit geeigneten Polynomen $g_i, h_i \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Nach Lemma 4.3.3 gibt es ein Primelement $p \in k[T_1, \ldots, T_n]$, das keines der h_i teilt.

Stellt man nun $1/p$ als algebraischen Ausdruck in den $f_i = g_i/h_i$ dar und bildet den Hauptnenner, so erhält man eine Darstellung $1/p = g/h$, wobei h ein Produkt gewisser Potenzen der h_i ist. Es folgt $pg = h$ und somit teilt p eines der h_i. Widerspruch zur Wahl von p. $\square$

Beweis von Satz 4.3.1. Nehmen wir an, $k \subseteq \mathbb{K}$ sei nicht algebraisch. Da $\mathbb{K}$ endlich erzeugt über k ist, gibt es dann gemäß Satz 4.1.13 eine Transzendenzbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ für die Körpererweiterung $k \subseteq \mathbb{K}$. Wir betrachten die Ringerweiterungen

$$k \ \subseteq \ k(B) \ \subseteq \ k[a_1, \ldots, a_r] \ = \ \mathbb{K}.$$

Dabei ist k noethersch und $k \subseteq \mathbb{K}$ eine endlich erzeugte Ringerweiterung. Weiter ist $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ nach Satz 4.1.10 (ii) algebraisch. Da $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ zudem endlich erzeugt ist, liefert Folgerung 4.1.3, dass $k(B) \subseteq \mathbb{K}$ von endlichem Grad ist.

Die Ringerweiterungen $k \subseteq k(B) \subseteq \mathbb{K}$ erfüllen somit die Voraussetzungen von Satz 4.2.13. Folglich ist $k \subseteq k(B)$ als Ringerweiterung endlich erzeugt. Andererseits ist $k(B) = k(b_1, \ldots, b_n)$ nach Bemerkung 4.1.9 isomorph zum Funktionenkörper $k(T_1, \ldots, T_n)$. Das widerspricht Lemma 4.3.4. □

Erinnerung 4.3.5. Ein Körper $\mathbb{K}$ heisst *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{K}[T]$ eine Nullstelle besitzt. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, so zerfällt jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{K}[T]$ in Linearfaktoren:

$$f \ = \ c(T - a_1) \cdots (T - a_r), \qquad c \in \mathbb{K}^*, \ a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}.$$

Jeder algebraisch abgeschlossene Körper besitzt unendlich viele Elemente. Ein Körper $\mathbb{K}$ ist genau dann algebraisch abgeschlossen wenn für jede algebraische Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ bereits $\mathbb{K} = \mathbb{L}$ gilt.

Erinnerung 4.3.6. Es sei $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper. Für gegebene Teilmengen $L \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ bzw. $X \subseteq \mathbb{K}^n$ hatten wir das *Nullstellengebilde* bzw. das *Verschwindungsideal* definiert:

$$\begin{aligned} V(L) \ &= \ \{x \in \mathbb{K}^n; \ f(x) = 0 \text{ für alle } f \in L\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^n, \\ I(X) \ &= \ \{f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]; \ f(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Satz 4.3.7 (Hilbertscher Nullstellensatz, Version II)**.** *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $\mathfrak{a} \subsetneq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein echtes Ideal, so gilt $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Als echtes Ideal ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ enthalten, siehe Folgerung 1.3.15. Es sei $\mathbb{L} := \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ der zugehörige Restklassenkörper. Dann hat man einen Monomorphismus

$$\jmath \colon \mathbb{K} \ \to \ \mathbb{L}, \qquad a \ \mapsto \ a + \mathfrak{m}.$$

Weiter gilt $\mathbb{L} = \jmath(\mathbb{K})[\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n]$, wobei $\overline{T}_i := T_i + \mathfrak{m}$. Nach Satz 4.3.1 ist die Erweiterung $\jmath(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{L}$ algebraisch. Da $\mathbb{K}$, und somit auch $\jmath(\mathbb{K})$, algebraisch abgeschlossen ist, folgt $\mathbb{L} = \jmath(\mathbb{K})$.

Es sei nun $a_i \in \mathbb{K}$ mit $\jmath(a_i) = \overline{T}_i$. Mit $a := (a_1, \ldots, a_n)$ erhalten wir dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \arrow[rr, "f \mapsto f + \mathfrak{m}"] \arrow[dr, "f \mapsto f(a)"'] & & \mathbb{L} \\ & \mathbb{K} \arrow[ur, "\cong", "\jmath"'] & \end{tikzcd}$$

Zur Verifikation genügt es, $T_i + \mathfrak{m}$ und $\jmath(T_i(a))$ zu vergleichen. Es folgt $f(a) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{m}$. Insbesondere gilt $a \in V(\mathfrak{a})$. □

Erinnerung 4.3.8. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $\mathfrak{a}$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \ := \ \{r \in R; \ r^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \ \leq \ R.$$

Falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gilt, so nennt man $\mathfrak{a}$ ein *Radikalideal* oder auch ein *perfektes Ideal*.

Satz 4.3.9 (Hilbertscher Nullstellensatz, Version III). *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, Dann gilt für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$:*

$$I(V(\mathfrak{a})) \quad = \quad \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis. Zur Inklusion "$\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$". Ist $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}$. Also ist $f^n|_{V(\mathfrak{a})} = 0$. Das impliziert jedoch $f|_{V(\mathfrak{a})} = 0$. Also gilt $f \in I(V(\mathfrak{a}))$.

Nun zur Inklusion "$I(V(\mathfrak{a})) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$". Es sei $0 \neq f \in I(V(\mathfrak{a}))$ gegeben. Wir fassen $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ als Unterring von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$ auf und betrachten dort das Ideal

$$\mathfrak{b} \quad := \quad \langle \mathfrak{a} \cup \{fT_{n+1} - 1\} \rangle.$$

Dann gilt $V(\mathfrak{b}) = \emptyset$, denn gäbe es ein Element $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in V(\mathfrak{b})$, so hätte man einerseits $f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0$ wegen $f \in I(V(\mathfrak{a})) \subseteq I(V(\mathfrak{b}))$ und andererseits

$$f(z_1, \ldots, z_n)z_{n+1} - 1 \quad = \quad 0,$$

Widerspruch. Nach Satz 4.3.7 kann $\mathfrak{b}$ kein echtes Ideal sein, d.h., es gilt $1 \in \mathfrak{b}$. Satz 3.3.11 liefert uns $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Satz 4.3.10. *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann hat man zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen:*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{Algebraische Mengen in } \mathbb{K}^n\} & \longleftrightarrow & \{\textit{Radikalideale in } \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\} \\ X & \mapsto & I(X) \\ V(\mathfrak{a}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Beweis. Mit Satz 2.2.15 und dem Hilbertschen Nullstellensatz 4.3.9 erhalten wir

$$V(I(X)) \; = \; X, \qquad\qquad I(V(\mathfrak{a})) \; = \; \sqrt{\mathfrak{a}} \; = \; \mathfrak{a}$$

für jede algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und jedes Radikalideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. □

Definition 4.3.11. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Der *Koordinatenring* von X ist die $\mathbb{K}$-Algebra

$$\mathbb{K}[X] \quad := \quad \{f\colon X \to \mathbb{K};\; f = F_{|X} \text{ für ein } F \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\}$$

mit den punktweise definierten Verknüpfungen und dem kanonischen Strukturhomomorphismus $a \mapsto [x \mapsto a]$.

Beispiel 4.3.12. Man hat einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren:

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \; \to \; \mathbb{K}[\mathbb{K}^n], \qquad f \; \mapsto \; [z \mapsto f(z)].$$

Bemerkung 4.3.13. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann hat man einen Epimorphismus

$$\pi_X \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \; \to \; \mathbb{K}[X], \qquad F \; \mapsto \; F_{|X}$$

mit $\mathrm{Kern}(\pi_X) = I(X)$. Gilt $X = V(\mathfrak{a})$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, so hat man

$$\mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/I(X) \;=\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Definition 4.3.14. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Eine *affine* $\mathbb{K}$-*Algebra* ist eine $\mathbb{K}$-Algebra A mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist endlich erzeugt, d.h. es gilt $A = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_r]$ mit $f_1, \ldots, f_r \in A$,
(ii) A ist *reduziert*, d.h. A besitzt keine echten nilpotenten Elemente.

Bemerkung 4.3.15. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Der Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ist eine affine $\mathbb{K}$-Algebra.

Beispiel 4.3.16. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Für das Achsenkreuz $X = V(T_1T_2) \subset \mathbb{K}^2$ gilt
$$I(X) \;=\; \langle T_1T_2 \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_1T_2 \rangle.$$
(ii) Für die Neilsche Parabel $X = V(T_2^2 - T_1^3) \subset \mathbb{K}^2$ gilt
$$I(X) \;=\; \langle T_2^2 - T_1^3 \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_2^2 - T_1^3 \rangle.$$

Aufgaben zu Abschnitt 4.3.

Aufgabe 4.3.17. Zeige: Jede affine $\mathbb{K}$-Algebra ist ein noetherscher Ring.

Aufgabe 4.3.18. Es seien R, S kommutative Ringe mit Einselement und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Zeige:

(i) Ist $\varphi\colon S \to R$ ein Homomorphismus, so gilt $\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{a})}$.
(ii) Ist $\psi\colon R \to S$ ein Epimorphismus, so gilt $\psi(\sqrt{\mathfrak{a} + \ker(\psi)}) = \sqrt{\psi(\mathfrak{a})}$.
(iii) Es gilt genau dann $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, wenn $R/\mathfrak{a}$ keine nilpotenten Elemente enthält.

Aufgabe 4.3.19. Es sei R ein kommutativer Ring mit $1_R \neq 0_R$. Zeige: $\sqrt{\langle 0 \rangle} \subseteq R$ ist der Durchschnitt aller Primideale in R.

Aufgabe 4.3.20. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und es seien $\mathfrak{p}_i \subseteq R$, $i \in I$, Primideale. Zeige: $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$ ist ein Radikalideal in R.

Aufgabe 4.3.21. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein echtes Ideal. Zeige: Es gibt bis auf Nummerierung eindeutig bestimmte Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $\sqrt{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$.

Aufgabe 4.3.22. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Zeige, dass zu je zwei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, ein $f \in \mathbb{K}[X]$ existiert mit $f(x) = 0$, $f(x') = 1$.

Aufgabe 4.3.23. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Primelement, und es sei $X := V(f)$. Zeige:

$$I(X) \;=\; \langle f \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle.$$

Aufgabe 4.3.24. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom mit Primfaktorzerlegung $f = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$, wobei $\nu_i \geq 1$. Zeige:

(i) $V(f) = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_s)$ ist die Zerlegung in irrreduzible Komponenten.
(ii) Es gilt $I(V(f)) = \langle p_1 \cdots p_s \rangle$.

Gelten diese Aussagen auch für nicht algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{K}$?

Aufgabe 4.3.25. Zeige, dass der Hilbertsche Nullstellensatz 4.3.9 für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht gilt.

Aufgabe 4.3.26. Für welche Polynome $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist $V(T_{n+1}^2 - f) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ irreduzibel?

Aufgabe 4.3.27. Beweise die Aussagen aus Beispiel 4.3.16:

(i) Für das Achsenkreuz $X = V(T_1 T_2) \subset \mathbb{K}^2$ gilt
$$I(X) \;=\; \langle T_1 T_2 \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_1 T_2 \rangle.$$
(ii) Für die Neillsche Parabel $X = V(T_2^2 - T_1^3) \subset \mathbb{K}^2$ gilt
$$I(X) \;=\; \langle T_2^2 - T_1^3 \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_2^2 - T_1^3 \rangle.$$

4.4. Berechnungen mit Gröbnerbasen II.

Vereinbarung 4.4.1. In diesem Abschnitt ist $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Erinnerung 4.4.2. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Der Hilbertsche Nullstellensatz 4.3.9 besagt

$$I(V(\mathfrak{a})) \quad = \quad \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Der Koordinatenring der algebraischen Menge $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &= \{f\colon X \to \mathbb{K};\ f = F_{|X} \text{ für ein } F \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\} \\ &\cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/I(X) \\ &\cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

Verfahren 4.4.3. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Es soll herausgefunden werden, ob $V(f_1, \ldots, f_r) = \emptyset$ gilt.

- Wähle eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$.
- Berechne eine Gröbnerbasis G für $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

Es gilt genau dann $V(f_1, \ldots, f_r) = \emptyset$, wenn G ein (nichttriviales) konstantes Polynom enthält.

Beweis. Falls G ein konstantes Polynom $a \in \mathbb{K}^*$ enthält, ist $V(f_1, \ldots, f_r) = V(G)$ offensichtlich leer. Ist $V(f_1, \ldots, f_r)$ leer, so gilt $1 \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ nach dem Hilbertschen Nullstellensatz 4.3.7. Es folgt $1 = a\widehat{g}$ mit einem $g \in G$ und einem $a \in \mathbb{K}^*$. □

Verfahren 4.4.4. Es seien $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Es soll herausgefunden werden, ob $V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq V(g_1, \ldots, g_s)$ gilt.

- Prüfe $g_j \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$ für $1 \le j \le s$ mit Verfahren 3.3.12.

Es gilt genau dann $V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq V(g_1, \ldots, g_s)$, wenn alle Radikalmitgliedschaftstests positiv verlaufen sind.

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Anwendung des Hilbertschen Nullstellensatzes 4.3.9: Es gilt

$$\begin{aligned} V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq V(g_1, \ldots, g_s) &\iff g_1, \ldots, g_s \in I(V(f_1, \ldots, f_r)) \\ &\iff g_1, \ldots, g_s \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4.5. Gröbnerbasen kann man einsetzen um polynomiale Gleichungssystem zu lösen. Als Beispiel betrachten wir das System

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \\ x_1^2 - x_2 + x_3^2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eine Gröbnerbasis G für das entsprechende Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$ bezüglich "$\le_{\text{lex}}$" ist gegeben durch

$$G \quad = \quad \left\{ T_1 - T_3,\ T_2 - 2T_3^2,\ T_3^4 + \frac{1}{2}T_3^2 - \frac{1}{4} \right\}.$$

Wegen $\mathfrak{a} = \langle G \rangle$ gilt $V(\mathfrak{a}) = V(G)$. Es genügt also, das zu G gehörige System zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3^2 & = & 0 \\ x_3^4 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4} & = & 0. \end{array}$$

Auffällig ist dabei, dass die letzte Gleichung nur von einer Variablen abhängt. Durch Lösen und sukzessives Einsetzen erhalten wir vier Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1} \\ x_2 & = & \frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1) \\ x_3 & = & \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5}-1}. \end{array}$$

Entscheidend für den Erfolg in diesem Beispiel war, dass wir eine endliche Lösungsmenge vorliegen hatten. Dies wollen wir nun allgemein untersuchen.

Satz 4.4.6. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge und $\mathbb{K}[X]$ ihr Koordinatenring. Weiter seien eine abgeschlossene Menge $Y \subseteq X$ und ein Punkt $x \in X \setminus Y$ gegeben. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{K}[X]$ mit $f_{|Y} = 0$ und $f(x) \neq 0$.*

Beweis. Die Menge Y ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ und somit gilt $Y = V(I(Y))$. Wegen $x \notin Y$ gibt es daher ein Polynom $F \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $F \in I(Y)$ und $F(x) \neq 0$. Die Funktion $f := F_{|X} \in \mathbb{K}[X]$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. □

Folgerung 4.4.7. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann trennt $\mathbb{K}[X]$ die Punkte von X, d.h. zu je zwei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{K}[X]$ mit $f(x) \neq f(x')$.*

Satz 4.4.8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine endliche (und somit algebraische) Menge. Zu $x \in X$ sei f^x die zugehörige charakteristische Funktion:*

$$f^x \colon X \ \to \ \mathbb{K}, \qquad x' \ \mapsto \ \begin{cases} 1, & x' = x, \\ 0, & x' \neq x. \end{cases}$$

Dann ist $(f^x;\ x \in X)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}[X]$. Insbesondere stimmt $\mathbb{K}[X]$ mit der Algebra aller Funktionen $X \to \mathbb{K}$ überein.

Beweis. Wir zeigen, dass jede charakteristische Funktion f^x ein Element des Koordinatenringes ist. Dazu betrachten wir die Teilmenge

$$Y \ := \ X \setminus \{x\} \ \subseteq \ X.$$

Dann ist Y endlich und somit abgeschlossen in X. Satz 4.4.6 liefert daher eine Funktion $f \in \mathbb{K}[X]$ mit $f_{|Y} = 0$ und $f(x) \neq 0$. Das impliziert

$$f^x \ = \ f(x)^{-1} f \ \in \ \mathbb{K}[X].$$

Die verbleibenden Aussagen folgen direkt aus der Tatsache, dass jede Funktion $h \colon X \to \mathbb{K}$ eine eindeutige Linearkombination charakteristischer Funktionen ist:

$$h \ = \ \sum_{x \in X} h(x) f^x.$$

□

Folgerung 4.4.9. *Es seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ die zugehörige algebraische Menge und $\mathbb{K}[X]$ ihr Koordinatenring. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}) \;\geq\; \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}) \;=\; \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X]) \;=\; |X|.$$

Beweis. Für den Nachweis der ersten Abschätzung betrachten wir die Inklusion $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Das liefert einen Epimorphismus

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \;\to\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Der Hilbertsche Nullstellensatz 4.3.9 besagt $I(X) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Das beweist die Gleichheit in der Mitte.

Falls X endlich ist, ergibt sich die zweite Gleichheit direkt aus Satz 4.4.8. Betrachten wir den Fall, dass X unendlich ist. Dann finden wir zu jedem $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine k-elementige Teilmenge $Y_k \subseteq X$. Offenbar hat man einen Epimorphismus

$$\mathbb{K}[X] \;\to\; \mathbb{K}[Y_k], \qquad f \;\mapsto\; f_{|Y_k}$$

von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Folglich gilt $\dim(\mathbb{K}[X]) \geq \dim(\mathbb{K}[Y_k])$ Mit Satz 4.4.8 erhalten wir also $\dim(\mathbb{K}[X]) \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Somit besitzt $\mathbb{K}[X]$ unendliche Dimension. □

Satz 4.4.10. *Es seien "$\leq$" eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal mit Gröbnerbasis $G \subseteq \mathfrak{a}$. Weiter sei $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Menge X ist endlich.*
(ii) *Zu jedem $1 \leq i \leq n$ gibt es ein $g_i \in G$ mit $\widehat{g}_i = c_i T_i^{k_i}$, wobei $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $c_i \in \mathbb{K}^*$.*

Gilt eine der Aussagen, so erhalten wir mit den Exponenten $k_1, \ldots, k_n$ aus (ii) die Abschätzung

$$k_1 \cdots k_n \;\geq\; \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}) \;\geq\; |X|.$$

Beweis. Zu "(i)$\Rightarrow$(ii)". Es sei $1 \leq i \leq n$ gegeben. Da die Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich ist, erhalten wir

$$\{T_i(x);\; x \in X\} \;=\; \{x_i;\; x \in X\} \;=\; \{a_1, \ldots, a_r\}$$

mit gewissen Elementen $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$. Mit dem Hilbertschen Nullstellensatz 4.3.9 ergibt sich

$$f \;:=\; (T_i - a_1) \cdots (T_i - a_r) \;\in\; I(X) \;=\; \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Also gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $f^m \in \mathfrak{a}$. Es folgt $T_i^{mr} = \widehat{f^m} \in \widehat{\mathfrak{a}}$. Somit gibt es ein $g_i \in G$ und $k_i \leq mr$, $c_i \in \mathbb{K}^*$ mit $\widehat{g}_i = T_i^{k_i}$.

Nehmen wir an, dass (ii) gilt. Es sei $\pi \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ der kanonische Epimorphismus. Weiter seien $S := \{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0};\; \nu_1 < k_1, \ldots, \nu_n < k_n\}$ und

$$U \;:=\; \left\{ \sum_{\nu \in S} a_\nu T^\nu;\; a_\nu \in \mathbb{K} \right\} \;\subseteq\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n].$$

Dann ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und nach Konstruktion gilt $\dim(U) = k_1 \cdots k_n$. Wir zeigen nun

$$\pi(U) \;=\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}.$$

Ist $f' \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ gegeben, so gilt $f' = \pi(f)$ mit einem $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Es sei $f = h_f + r_f$ die Division mit Rest von f modulo G. Dann gilt $h_f \in \mathfrak{a}$, wir haben

$f' = \pi(r_f)$ und kein Leitterm $\widehat{g}$, $g \in G$, teilt einen Term von r_f. Letzteres bedeutet insbesondere $r_f \in U$, was unsere Behauptung beweist. Es folgt

$$k_1 \cdots k_n \;=\; \dim_{\mathbb{K}}(U) \;\geq\; \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}).$$

Zusammen mit Folgerung 4.4.9 impliziert dies Aussage (i) und die gewünschten Abschätzungen. □

Folgerung 4.4.11. *Es seien $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal mit endlicher Nullstellenmenge $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ und $G \subseteq \mathfrak{a}$ eine Gröbnerbasis bezüglich $\leq_{\mathrm{lex}}$ für $\mathfrak{a}$.*

(i) *Die Gröbnerbasis G enthält ein Polynom $g \in \mathbb{K}[T_n]$.*
(ii) *Ist G reduziert, so enthält G genau ein Polynom $g \in \mathbb{K}[T_n]$.*

Beweis. Nach Satz 4.4.10 gilt $\widehat{g}_n = aT_n^{k_n}$ mit einem $g_n \in G$. Da wir die lexikographische Ordnung gewählt haben, folgt $g_n \in \mathbb{K}[T_n]$. □

Verfahren 4.4.12 (Mit Vorbehalt)**.** Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben, sodass $X = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich ist.

- Bestimme eine reduzierte Gröbnerbasis $\{g_1, \ldots, g_s\}$ bezüglich $\leq_{\mathrm{lex}}$ für das Ideal $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$; dabei sei $g_s \in \mathbb{K}[T_n]$.
- Bestimme die Nullstellen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ des Polynoms $g_s \in G \cap \mathbb{K}[T_n]$.

Dann ist die explizite Bestimmung der Punkte von X auf das Lösen von Gleichungssystemen in $n-1$ Variablen zurückgeführt: Es gilt

$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{k} V(g_1(T_1, \ldots, T_{n-1}, a_i), \ldots, g_{s-1}(T_1, \ldots, T_{n-1}, a_i)).$$

Aufgaben zu Abschnitt 4.4.

Aufgabe 4.4.13. Es sei “$\le$” eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$. Weiter sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, $\mathfrak{A}$ die Menge seiner Leitmonome und $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Menge X ist endlich.
(ii) Die Menge $\mathfrak{M}(n) \setminus \mathfrak{A}$ ist endlich.

Aufgabe 4.4.14. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal, sodass $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich ist. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.
(ii) Es gilt $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}) = |X|$.

Aufgabe 4.4.15. Betrachte die Polynome $f_1 := T_1^2 + T_2^2 - 2$, $f_2 := T_2^2 + T_3^2 - 2$, $f_3 := T_1^2 + T_3^2 - 2$ und das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{a} := \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3]$. Zeige folgende Aussagen:

(i) $G := \{T_1^2 - 1, T_2^2 - 1, T_3^2 - 1\}$ ist eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bzgl. “$\ge_{\mathrm{lex}}$”.
(ii) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[T_1, T_2, T_3] \,/\, \mathfrak{a}) = 8$.
(iii) $\mathfrak{a}$ ist ein Radikalideal.

Aufgabe 4.4.16. Entwickle ein Verfahren, das für gegebene Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit endlichem Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ ermittelt, ob $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt.

4.5. **Der Antiäquivalenzsatz.**

Vorbemerkung 4.5.1. Der Antiäquivalenzsatz vergleicht auf mathematisch präzise Weise die Welten der algebraischen Mengen einerseits und der affinen Algebren andererseits.

Definition 4.5.2. Eine *Kategorie* besteht aus einer Klasse $\mathfrak{C}$ von (mathematischen) Objekten und

- zu je zwei Objekten X, X' aus $\mathfrak{C}$ der Menge $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X')$ ihrer *Morphismen*; die Elemente von $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X')$ bezeichnet man durch $\varphi\colon X \to X'$,
- zu je drei Objekten X, X', X'' aus $\mathfrak{C}$ einer Abbildung, genannt *Komposition*,

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_{\mathfrak{C}}\colon \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X', X'') \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X') &\to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X''), \\ (\psi, \varphi) &\mapsto \mathfrak{k}_{\mathfrak{C}}(\psi, \varphi) =: \psi \circ \varphi, \end{aligned}$$

sodass folgende Regeln gelten:

(i) Für je zwei verschiedene Objektpaare X_1, X_1' und X_2, X_2' sind die Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X_1, X_1')$ und $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X_2, X_2')$ disjunkt.

(ii) Die Komposition ist assoziativ, d.h., für je drei Morphismen $\varphi\colon X \to X'$, $\psi\colon X' \to X''$ und $\kappa\colon X'' \to X'''$ gilt

$$\kappa \circ (\psi \circ \varphi) \quad = \quad (\kappa \circ \psi) \circ \varphi.$$

(iii) Jedes Objekt X besitzt eine *Identität*, d.h., einen Morphismus $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, sodass für alle Morphismen $\varphi\colon X \to X'$ und $\psi\colon X'' \to X$ gilt

$$\varphi \circ \mathrm{id}_X = \varphi, \qquad \mathrm{id}_X \circ \psi = \psi.$$

Beispiel 4.5.3. Folgende Kategorien sind uns schon bekannt:

(i) Die Kategorie $\mathfrak{S}$ der Mengen besitzt die Mengen als Objekte und ihre Morphismen sind die Abbildungen zwischen Mengen.

(ii) Die Kategorie $\mathfrak{Grp}$ der Gruppen besitzt die Gruppen als Objekte und ihre Morphismen sind die Gruppenhomomorphismen.

(iii) In Analogie zu (ii) gibt es die Kategorien $\mathfrak{Ab}$ der abelschen Gruppen, $\mathfrak{R}$ der K1-Ringe, R-$\mathfrak{Mod}$ der R-Moduln, R-$\mathfrak{VR}$ der k-Vektorräume, etc..

Beispiel 4.5.4. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir haben:

(i) Die Kategorie der algebraischen Mengen. Die Objekte sind Paare $X \subseteq \mathbb{K}^n$, wobei X algebraisch ist, und die Morphismen zwischen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ sind die algebraischen Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$, d.h., diejenigen Abbildungen, welche man als Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ erhält.

(ii) Die Kategorie der affinen $\mathbb{K}$-Algebren. Die Objekte sind die affinen $\mathbb{K}$-algebren, d.h., die endlich erzeugten $\mathbb{K}$-Algebren ohne echte nilpotente Elemente und die Morphismen sind die Algebrenhomomorphismen.

Definition 4.5.5. Es seien $\mathfrak{C}$ eine Kategorie und X, X' Objekte aus $\mathfrak{C}$.

(i) Ein Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ heißt *Isomorphismus*, falls er einen *Umkehrmorphismus* besitzt, d.h., einen Morphismus $\psi\colon X' \to X$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{X'}$.

(ii) Man nennt die Objekte X und X' *isomorph* zueinander, in Zeichen $X \cong X'$, falls es einen Isomorphismus $\varphi\colon X \to X'$ gibt.

Definition 4.5.6. Es seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ Kategorien, und F eine Vorschrift, die jedem Objekt X in $\mathfrak{C}$ ein Objekt $F(X)$ in $\mathfrak{D}$ zuordnet. Man nennt F einen

- *kovarianten Funktor* von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$, falls weiter jedem Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ in $\mathfrak{C}$ ein Morphismus $F(\varphi)\colon F(X) \to F(X')$ in $\mathfrak{D}$ zugeordnet wird, sodass stets $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ und $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ gelten,
- *kontravarianten Funktor* von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$, falls weiter jedem Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ in $\mathfrak{C}$ ein Morphismus $F(\varphi)\colon F(X') \to F(X)$ in $\mathfrak{D}$ zugeordnet wird, sodass stets $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ und $F(\psi \circ \varphi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ gelten.

Beispiel 4.5.7. Für eine Gruppe G bezeichne $\langle G, G\rangle \le G$ ihre Kommutatoruntergruppe. Dann erhält man einen kovarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} A\colon \mathfrak{Grp} & \to & \mathfrak{Ab} \\ G & \mapsto & G/\langle G, G\rangle, \\ \varphi & \mapsto & \overline{\varphi}, \end{array}$$

wobei $\overline{\varphi}$ den durch einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to G'$ induzierten Homomorphismus $G/\langle G, G\rangle \to G'/\langle G', G'\rangle$ bezeichnet.

Beispiel 4.5.8. Es sei k ein beliebiger Körper. Für einen k-Vektorraum sei V^* der zugehörige Dualraum. Dann hat man einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rcl} k\text{-}\mathfrak{Vr} & \to & k\text{-}\mathfrak{Vr} \\ V & \mapsto & V^*, \\ \varphi & \mapsto & \varphi^*, \end{array}$$

wobei $\varphi^*\colon V^* \to W^*$, $u \mapsto u \circ \varphi$ die zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon W \to V$ gehörige duale Abbildung bezeichnet.

Konstruktion 4.5.9. Wir haben einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der algebraischen Mengen in die Kategorie der affinen Algebren:

(i) Jeder algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ordnen wir ihren Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ zu.
(ii) Jeder algebraischen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ordnen wir ihren *Komorphismus* $\varphi^*\colon \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$, $g \mapsto g \circ \varphi$ zu.

Beweis. Der Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ist stets eine affine Algebra; also ist die Zuordnung (i) wohldefiniert.

Zum Nachweis der Wohldefiniertheit von (ii) sei ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ algebraischer Mengen $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ gegeben. Wir wählen eine polynomiale Abbildung $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\varphi = \Phi_{|X}$ und zu jedem $g \in \mathbb{K}[Y]$ ein $G \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]$ mit $g = G_{|Y}$. Dann erhalten wir

$$\varphi^*(g) \ = \ g \circ \varphi \ = \ (G \circ \Phi)_{|X} \ \in \ \mathbb{K}[X].$$

Man prüft leicht nach, dass φ^* stets ein Algebrenhomomorphismus ist, und man hat immer $\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$. Weiter erhält man für jede Komposition algebraischer Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ und jedes $h \in \mathbb{K}[Z]$:

$$(\psi\circ\varphi)^*(h) \ = \ h\circ(\psi\circ\varphi) \ = \ (h\circ\psi)\circ\varphi \ = \ (\psi^*(h))\circ\varphi \ = \ \varphi^*(\psi^*(h)) \ = \ (\varphi^*\circ\psi^*)(h).$$

□

Definition 4.5.10. Es seien $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Kategorien und $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ein kovarianter Funktor. Man nennt

(i) *wesentlich surjektiv*, falls es zu jedem Objekt Y in $\mathfrak{D}$ ein Objekt X in $\mathfrak{C}$ gibt mit $F(X) \cong Y$,

(ii) *voll*, falls zu je zwei Objekten X, X' in $\mathfrak{C}$ die folgende Abbildung surjektiv ist

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X') \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(F(X), F(X')), \qquad \varphi \mapsto F(\varphi),$$

(iii) *treu*, falls zu je zwei Objekten X, X' in $\mathfrak{C}$ die folgende Abbildung injektiv ist

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, X') \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(F(X), F(X')), \qquad \varphi \mapsto F(\varphi),$$

(iv) *volltreu*, falls er voll und treu ist.

Für einen kontravarianten Funktor $G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ werden die obigen Begriffe analog definiert.

Theorem 4.5.11 (Antiäquivalenzsatz, Version I)**.** *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Durch $X \mapsto \mathbb{K}[X]$, $\varphi \mapsto \varphi^*$ wird ein kontravarianter, wesentlich surjektiver, volltreuer Funktor von der Kategorie der algebraischen Mengen in die Kategorie der affinen $\mathbb{K}$-Algebren definiert, d.h., es gilt:*

(i) *Die Zuordnungen $X \mapsto \mathbb{K}[X]$ und $\varphi \mapsto \varphi^*$ definieren einen kontravarianten Funktor.*
(ii) *Zu jeder affinen Algebra A existiert eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $A \cong \mathbb{K}[X]$.*
(iii) *Sind $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen, so hat man eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{Morphismen } X \to Y\} & \to & \{\textit{Homomorphismen } \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi^* \end{array}$$

Beweis. Eigenschaft (i) haben wir bereits in Bemerkung 4.5.9 eingesehen. Zu Eigenschaft (ii). Ist A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra, so besitzt A Erzeugende $f_1, \ldots, f_n$. Diese definieren einen Epimorphismus

$$\Phi\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to A, \qquad T_i \mapsto f_i.$$

Da A keine nilpotenten Elemente besitzt, ist $\mathfrak{a} := \ker(\Phi)$ ein Radikalideal in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz besitzt $X := V(\mathfrak{a})$ den Koordinatenring

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/I(X) \\ &= \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/I(V(\mathfrak{a})) \\ &= \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\sqrt{\mathfrak{a}} \\ &= \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a} \\ &\cong A. \end{aligned}$$

Zu Eigenschaft (iii): Wir zeigen zunächst, dass $\varphi \mapsto \varphi^*$ surjektiv ist. Dazu sei $\alpha\colon \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ ein Homomorphismus. Wir betrachten die Erzeugenden

$$f_i := T_i|_X \in \mathbb{K}[X], \qquad g_j := T_j|_Y \in \mathbb{K}[Y].$$

Dann haben wir für jedes $j = 1, \ldots, m$ eine Darstellung $\alpha(g_j) = \Phi_j(f_1, \ldots, f_n)$ mit einem Polynom $\Phi_j \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Diese Polynome definieren eine Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad z \mapsto (\Phi_1(z), \ldots, \Phi_m(z)).$$

Der zugehörige Komorphismus passt nach Konstruktion in das folgende kommutative Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n] \arrow[d, "f\mapsto f_{|X}"'] & \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m] \arrow[l, "\Phi^*"'] \arrow[d, "g\mapsto g_{|Y}"] \\
\mathbb{K}[X] & \mathbb{K}[Y] \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Zum Nachweis der Kommutativität genügt es dabei, die Variablen $T_j \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]$ zu verfolgen.

Für den Kern $I(Y)$ von $g \mapsto g_{|Y}$ gilt $\Phi^*(I(Y)) \subseteq I(X)$, was $X \subseteq V(\Phi^*(I(Y)))$ und somit $\Phi(X) \subseteq Y$ impliziert. Wir können $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ also zu einer algebraischen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ einschränken. Es gilt $\varphi^* = \alpha$ wegen

$$\varphi^*(g_j) \;=\; \Phi^*(T_j)_{|X} \;=\; \Phi_j(T_1,\ldots,T_n)_{|X} \;=\; \Phi_j(f_1,\ldots,f_n) \;=\; \alpha(g_j).$$

Kommen wir zur Injektivität von $\varphi \mapsto \varphi^*$. Es seien $\varphi, \psi\colon X \to Y$ algebraische Abbildungen mit $\varphi^* = \psi^*$. Wir wählen polynomiale Abbildungen

$$\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \Psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

mit $\varphi = \Phi|_X$ bzw. $\psi = \Psi|_X$. Für die zugehörigen Komorphismen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n] \arrow[d, "f\mapsto f_{|X}"'] & \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m] \arrow[l, shift right, "\Psi^*"'] \arrow[l, shift left, "\Phi^*"] \arrow[d, "g\mapsto g_{|Y}"] \\
\mathbb{K}[X] & \mathbb{K}[Y] \arrow[l, "\varphi^*=\psi^*"]
\end{tikzcd}$$

Für die Koordinaten $T_1,\ldots,T_n$ auf $\mathbb{K}^n$ bzw. $T_1,\ldots,T_m$ auf $\mathbb{K}^m$ bedeutet das

$$\Phi_j(T_1,\ldots,T_n) \;=\; \Phi^*(T_j) \;=\; \Psi^*(T_j) + f_j \;=\; \Psi_j(T_1,\ldots,T_n) + f_j$$

mit gewissen Funktionen $f_j \in I(X)$. Schränkt man diese Gleichung auf X ein, so ergibt sich $\varphi = \psi$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 4.5.

Aufgabe 4.5.12. Es sei F ein Funktor von einer Kategorie $\mathfrak{C}$ in eine Kategorie $\mathfrak{D}$. Zeige: Sind zwei Objekte X und X' aus $\mathfrak{C}$ isomorph zueinander, so sind auch die Objekte $F(X)$ und $F(X')$ aus $\mathfrak{D}$ isomorph zueinander.

Aufgabe 4.5.13. Betrachte die algebraischen Mengen $X = \mathbb{K}$ und $Y := V(T_1^3 - T_2^2)$. Zeige unter Verwendung des Antiäquivalenzsatzes sowie Aufgabe 4.5.12: Die Abbildung $X \to Y$, $z \mapsto (z^2, z^3)$ ist eine bijektive Abbildung algebraischer Mengen, aber kein Isomorphismus.

Aufgabe 4.5.14. Sind die beiden folgenden algebraischen Mengen isomorph zueinander:

$$X := V(T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^3, \qquad Y := V(T_1T_2(T_1 - T_2)) \subseteq \mathbb{K}^2\,?$$

5. Affine Varietäten

5.1. **Lokalisierung.**

Definition 5.1.1. Es sei R ein K1-Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ nennt man *multiplikatives Monoid*, falls $1_R \in S$ gilt und mit $a, b \in S$ stets auch $ab \in S$ gilt.

Beispiel 5.1.2. Es sei R ein K1-Ring.

(i) Ist R ein Integritätsring, so ist $S := R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Monoid.
(ii) Für jedes $r \in R$ ist $S := \{r^n;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ein multiplikatives Monoid.
(iii) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist $S := R \setminus \mathfrak{p}$ ein multiplikatives Monoid.
(iv) Die Menge $\mathfrak{M}(n)$ aller Monome ist ein multiplikatives Monoid in $R[T_1, \ldots, T_n]$.

Konstruktion 5.1.3. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Dann hat man eine Äquivalenzrelation auf der Menge $R \times S$:

$$(r, s) \sim (r', s') \ :\Leftrightarrow\ u(rs' - r's) = 0 \quad \text{mit einem } u \in S.$$

Es sei $S^{-1}R := (R \times S)/\sim$ die zugehörige Restklassenmenge. Die Restklasse eines Paares (r, s) wird mit r/s bezeichnet. Mit den Verknüpfungen

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} \ :=\ \frac{rs' + r's}{ss'}, \qquad \frac{r}{s}\frac{r'}{s'} \ :=\ \frac{rr}{ss'}.$$

ist $S^{-1}R$ ein kommutativer Ring mit Nullelement $0/1$ und Einselement $1/1$, der *Bruchring* bzw. die *Lokalisierung* von R nach S. Es gilt

$$\left\{\frac{s}{1};\ s \in S\right\} \quad \subseteq \quad (S^{-1}R)^*.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass "$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich gegeben.

Zum Nachweis der Transitivität seien $(r, s) \sim (r', s') \sim (r'', s'')$ gegeben. Dann gibt es Elemente $u, v \in S$ mit

$$u(rs' - r's) \ =\ 0 \ =\ v(r's'' - r''s').$$

Es folgt

$$s'uv(rs'' - r''s) \ =\ s''uv(rs' - r's) + suv(r's'' - r''s') \ =\ 0.$$

Wir kommen zur Wohldefiniertheit der Verknüpfungen. Dazu seien $a \sim a'$ und $b \sim b'$ gegeben, wobei $a = (a_1, a_2)$, etc. gelte. Dann haben wir

$$(*) \quad ua_1a'_2 \ =\ ua_2a'_1, \qquad\qquad (**) \quad vb_1b'_2 \ =\ vb_2b'_1.$$

mit Elementen $u, v \in S$. Für die Wohldefiniertheit der Addition müssen wir zeigen, dass

$$\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2b_2} \quad = \quad \frac{a'_1b'_2 + a'_2b'_1}{a'_2b'_2}$$

gilt. Multipliziert man die Gleichung $(*)$ mit $vb_2b'_2$ und die Gleichung $(**)$ mit $ua_2a'_2$, so ergibt sich nach Umsortieren

$$uva'_2b'_2a_1b_2 \ =\ uva_2b_2a'_1b'_2, \qquad uva'_2b'_2a_2b_1 \ =\ uva_2b_2a'_2b'_1.$$

Addition dieser beiden Gleichungen und anschließendes Ausklammern von $a'_2b'_2$ bzw. a_2b_2 ergibt die gewünschte Äquivalenz: Man erhält

$$uva'_2b'_2(a_1b_2 + a_2b_1) \quad = \quad uva_2b_2(a'_1b'_2 + a'_2b'_1).$$

Zur Multiplikation. Es seien $a \sim a'$ und $b \sim b'$ gelten, wobei wieder $a = (a_1, a_2)$, etc. gelte. Dann haben wir

$$ua_1a'_2 \ =\ ua_2a'_1, \qquad vb_1b'_2 \ =\ vb_2b'_1.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich die gewünschte Äquivalenz

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_2} = \frac{a_1'b_1'}{a_2'b_2'}.$$

Damit ist die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen nachgewiesen. Der Nachweis der Ringaxiome ist ohne jede Schwierigkeit zu führen. □

Beispiel 5.1.4. Es seien R ein Integritätsring und $S := R \setminus \{0\}$. Dann ist $S^{-1}R$ der Quotientenkörper von R.

Satz 5.1.5. *Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Dann hat man einen kanonischen Homomorphismus*

$$\imath\colon R \to S^{-1}R, \qquad r \mapsto \frac{r}{1}.$$

Ist $\varphi\colon R \to R'$ ein Homomorphismus von K1-Ringen mit $\varphi(S) \subseteq (R')^*$, so gibt es kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\imath"'] & & R' \\ & S^{-1}R \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

mit einem eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi\colon S^{-1}R \to R'$; dieser ist gegeben durch $\psi(r/s) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$.

Beweis. Nach Definition von $S^{-1}R$ ist klar, dass $\imath\colon R \to S^{-1}R$ ein Homomorphismus ist. Um die Wohldefiniertheit von ψ einzusehen, betrachten wir zwei Darstellungen $a_1/a_2 = a_1'/a_2'$ eines Elements in $S^{-1}R$. Dann gilt $ua_1a_2' = ua_1'a_2$ mit einem $u \in S$. Die Wohldefiniertheit von ψ ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \varphi(ua_1a_2') = \varphi(ua_1'a_2) \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(u)\varphi(a_1)\varphi(a_2)^{-1} = \varphi(u)\varphi(a_1')\varphi(a_2')^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad \varphi(a_1)\varphi(a_2)^{-1} = \varphi(a_1')\varphi(a_2')^{-1}, \end{aligned}$$

wobei $\varphi(S) \subseteq (R')^*$ verwendet wurde. Der nächste Schritt ist es, die Homomorphieeigenschaften von $\psi\colon S^{-1}R \to S$ nachzuprüfen. Es gilt

$$\psi\left(\frac{1}{1}\right) = \varphi(1)\varphi(1)^{-1} = 1,$$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}\right) &= \psi\left(\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2b_2}\right) \\ &= \varphi(a_1b_2 + a_2b_1)\varphi(a_2b_2)^{-1} \\ &= \varphi(a_1)\varphi(a_2)^{-1} + \varphi(b_1)\varphi(b_2)^{-1} \\ &= \psi\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \psi\left(\frac{b_1}{b_2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{a_1}{a_2}\,\frac{b_1}{b_2}\right) &= \psi\left(\frac{a_1b_1}{a_2b_2}\right) \\ &= \varphi(a_1b_1)\varphi(a_2b_2)^{-1} \\ &= \varphi(a_1)\varphi(a_2)^{-1}\varphi(b_1)\varphi(b_2)^{-1} \\ &= \psi\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\psi\left(\frac{b_1}{b_2}\right). \end{aligned}$$

Schließlich müssen wir uns noch davon überzeugen, dass ψ eindeutig bestimmt ist. Für jeden weiteren Homomorphismus $\psi' \colon Q(R) \to S$ mit $\psi' \circ \imath = \varphi$ erhalten wir

$$\psi'\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi(a), \qquad \psi'\left(\frac{1}{b}\right) = \psi'\left(\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}\right) = \psi'\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \varphi(b)^{-1}$$

und somit

$$\psi'\left(\frac{a}{b}\right) = \psi'\left(\frac{a}{1}\frac{1}{b}\right) = \psi'\left(\frac{a}{1}\right)\psi'\left(\frac{1}{b}\right) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}.$$

□

Bemerkung 5.1.6. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Der Homomorphismus $\imath \colon R \to S^{-1}R$, $r \mapsto r/1$ ist injektiv.
(ii) Das multiplikative Monoid S enthält keine Nullteiler.

Bemerkung 5.1.7. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Man hat genau dann $S^{-1}R = \{0\}$, wenn $0 \in S$ gilt.

Bemerkung 5.1.8. Ist R eine $\mathbb{K}$-Algebra mit Strukturhomomorphismus $\jmath \colon \mathbb{K} \to R$ und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid, so ist $S^{-1}R$ eine $\mathbb{K}$-Algebra mit Strukturhomomorphismus $\imath \circ \jmath \colon \mathbb{K} \to S^{-1}R$.

Bemerkung 5.1.9. Ist R ein Integritätsring und $S \subseteq R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Monoid, so hat man ein kommutatives Diagramm von Monomorphismen:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "r \mapsto \frac{r}{1}"] \arrow[dr, "r \mapsto \frac{r}{1}"'] & & Q(R) \\ & S^{-1}R \arrow[ur, "\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 5.1.10. *Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Jedes Ideal $\mathfrak{a} \leq_R R$ definiert ein Ideal*

$$S^{-1}\mathfrak{a} := \left\{\frac{a}{s};\ a \in \mathfrak{a},\ s \in S\right\} \leq_{S^{-1}R} S^{-1}R.$$

Beweis. Wegen $0/1 \in S^{-1}\mathfrak{a}$ ist $S^{-1}\mathfrak{a}$ nicht leer. Sind weiter a_1/a_2 und b_1/b_2 in $S^{-1}\mathfrak{a}$ sowie r/s aus $S^{-1}R$ gegeben, so erhält man

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1b_2 + b_1a_2}{a_2b_2} \in S^{-1}\mathfrak{a}, \qquad \frac{r}{s}\frac{a_1}{a_2} = \frac{ra}{sa_2} \in S^{-1}\mathfrak{a}.$$

□

Satz 5.1.11. *Es seien R ein K1-Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid und $\mathfrak{a} \leq_R R$ ein Ideal. Man hat genau dann $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}R$, wenn $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$ gilt.*

Beweis. Gilt $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}R$, so hat man eine Darstellung $1/1 = a/s$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $s \in S$. Das bedeutet $u(s - a) = 0$ mit einem $u \in S$. Es folgt $us = sa \in \mathfrak{a}$ und somit $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$. Gilt $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$, so betrachten wir ein $s \in \mathfrak{a} \cap S$. Es gilt dann $1/1 = s/s \in S^{-1}\mathfrak{a}$ und wir erhalten $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}R$, □

Satz 5.1.12. *Es seien R ein K1-Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leq_R R$ Ideale. Dann gilt*

(i) $S^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$,
(ii) $S^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a}S^{-1}\mathfrak{b}$,
(iii) $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$.

Beweis. Aussagen (i) und (ii) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. Die Inklusion "$\subseteq$" in Aussage (iii) ist offensichtlich gegeben. Zum Nachweis von "$\supseteq$" sei $r/s \in S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$. Dann gilt

$$\frac{a}{s_1} \;=\; \frac{r}{s} \;=\; \frac{b}{s_2} \qquad \text{mit } a \in \mathfrak{a},\; b \in \mathfrak{b},\; s_1, s_2 \in S.$$

Also haben wir $uas = urs_1$ und $vbs = vrs_2$ mit Elementen $uv \in S$. Das impliziert $uvs_1s_2r \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und wir erhalten

$$\frac{r}{s} \;=\; \frac{uvs_1s_2r}{uvs_1s_2s} \;\in\; S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

□

Definition 5.1.13. Es seien R ein K1-Ring und $f \in R$. Für das multiplikative Monoid $S := \{f^r;\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ setzt man $R_f := S^{-1}R$.

Beispiel 5.1.14. Es seien $R := \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $f := T_1 \cdots T_n$. Dann ist R_f die Algebra der *Laurentpolynome* in $T_1, \ldots, T_n$ über $\mathbb{K}$:

$$R_f \;=\; \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu T^\nu;\ a_\nu \neq 0 \text{ für nur endlich viele } \nu \in \mathbb{Z}^n \right\} \;\subseteq\; \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n).$$

Definition 5.1.15. Ein K1-Ring heißt *lokal*, falls er genau ein maximales Ideal besitzt.

Definition 5.1.16. Es seien R ein K1-Ring, $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $S := R \setminus \mathfrak{p}$ das zugehörige multiplikative Monoid. Die *Lokalisierung* von R in $\mathfrak{p}$ ist der Ring $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$.

Satz 5.1.17. *Es seien R ein K1-Ring, $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $S := R \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $S^{-1}\mathfrak{p} \neq S^{-1}R$ gilt. Anderfalls hätten wir $1/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Es gibt dann Elemente $r \in \mathfrak{p}$ und $u, s \in S$ mit $us = ur \in \mathfrak{p}$. Das ist wegen $us \in S$ nicht möglich.

Um zu zeigen, dass $S^{-1}\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal in $S^{-1}R$ ist, genügt es zu zeigen, dass jedes echte Ideal von $S^{-1}R$ bereits in $S^{-1}\mathfrak{p}$ enthalten ist. Es sei also $\mathfrak{a} \subseteq S^{-1}R$ ein echtes Ideal, und es sei $r/s \in \mathfrak{a}$. Dann gilt

$$r/1 \;=\; (s/1)(r/s) \;\in\; \mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{a}$ als echtes Ideal keine Einheiten enthält, muss $r \notin S$ gelten. Es folgt $r \in \mathfrak{p}$. Das bedeutet $r/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$. □

Aufgaben zu Abschnitt 5.1.

Aufgabe 5.1.18. Beweise Bemerkungen 5.1.6 und 5.1.7.

Aufgabe 5.1.19. Es seien $A := \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_1 T_2 \rangle$ und $f \in A$ die Restklasse von T_1. Zeige: Es gilt $A_f \cong \mathbb{K}[T]_T$.

Aufgabe 5.1.20. Es sei R eine $\mathbb{K}$-Algebra, und es sei $f \in R$. Zeige: Gilt $R = \mathbb{K}[g_1, \ldots, g_r]$ mit $g_i \in R$, so gilt $R_f = [1/f, g_1, \ldots, g_r]$.

Aufgabe 5.1.21. Es sei R eine $\mathbb{K}$-Algebra, und es sei $f \in R$. Zeige: Ist R affin, so ist auch R_f affin.

Aufgabe 5.1.22. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid. Zeige: Ist R noethersch, so ist auch $S^{-1}R$ noethersch.

Aufgabe 5.1.23. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Monoid. Zeige: Ist R faktoriell, so ist auch $S^{-1}R$ faktoriell.

Aufgabe 5.1.24. Zeige: Ein K1-Ring R ist genau dann lokal, wenn die Menge seiner Nichteinheiten ein Ideal ist.

Aufgabe 5.1.25. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass man eine wohldefinierte Bijektion hat:

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} \le_R R;\ \mathfrak{p} \text{ Primideal mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \quad &\to \quad \{\mathfrak{q} \le_{S^{-1}R} S^{-1}R;\ \mathfrak{q} \text{ Primideal}\}, \\ \mathfrak{p} \quad &\mapsto \quad S^{-1}\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.1.26. Es sei R ein Integritätsring, und es seien $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ die Mengen aller Prim- bzw. aller maximalen Ideale von R. Beweise die folgenden Identitäten in dem Quotientenkörper $Q(R)$ von R:

$$R \;=\; \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}} R_{\mathfrak{p}} \;=\; \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} R_{\mathfrak{m}}.$$

5.2. **Reguläre Funktionen.**

Erinnerung 5.2.1. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Der Koordinatenring von X ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &= \{f\colon X \to \mathbb{K};\ f = F_{|X} \text{ für ein } F \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\} \\ &\cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/I(X). \end{aligned}$$

Definition 5.2.2. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge und $\mathbb{K}[X]$ ihr Koordinatenring.

(i) Jede Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X]$ definiert ein *Nullstellengebilde*

$$V_X(\mathfrak{a}) \ := \ \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\} \ \subseteq \ X.$$

Für $\mathfrak{a} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ schreiben wir auch $V_X(f_1, \ldots, f_r) := V_X(\mathfrak{a})$.

(ii) Jede Teilmenge $Y \subseteq X$ definiert ein *Verschwindungsideal*

$$I_X(Y) \ := \ \{f \in \mathbb{K}[X];\ f_{|Y} = 0\} \ \subseteq \ \mathbb{K}[X].$$

Satz 5.2.3. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge und $\mathbb{K}[X]$ ihr Koordinatenring.*

(i) *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \subseteq \mathbb{K}[X]$ zwei Teilmengen, so gilt*

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' \quad \Longrightarrow \quad V_X(\mathfrak{a}) \supseteq V_X(\mathfrak{a}').$$

(ii) *Sind $Y, Y' \subseteq X$ zwei Teilmengen, so gilt*

$$Y \subseteq Y' \quad \Longrightarrow \quad I_X(Y) \supseteq I_X(Y').$$

(iii) *Sind eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X]$ und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ gegeben, so gilt*

$$\mathfrak{a} \ \subseteq \ I_X(V_X(\mathfrak{a})), \qquad Y \ \subseteq \ V_X(I_X(Y)).$$

(iv) *Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist ihr Abschluss in X gegeben als*

$$\overline{Y} \quad = \quad V_X(I_X(Y)).$$

(v) *Die Mengen $X_f := X \setminus V_X(f)$, wobei $f \in \mathbb{K}[X]$, bilden eine Basis der Topologie auf X.*

(vi) *X ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathbb{K}[X]$ ein Integritätsring ist.*

(vii) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X]$ ein Ideal, so gilt $I_X(V_X(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Lemma 5.2.4. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und $\pi_X\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{K}[X]$ der Einschränkungsepimorphismus.*

(i) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X]$ eine Teilmenge, so gilt $V_X(\mathfrak{a}) = V_X(\langle \mathfrak{a} \rangle)$.*

(ii) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X]$ eine Teilmenge, so gilt $V_X(\mathfrak{a}) = V(\pi_X^{-1}(\mathfrak{a}))$.*

(iii) *Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so gilt $I_X(Y) = \pi_X(I(Y))$.*

Beweis. Aussagen (i) und (iii) sind offensichtlich. Zu Aussage (ii). Nach (i) dürfen wir annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathbb{K}[X]$ ist. Dann gilt $I(X) \subseteq \pi_X^{-1}(\mathfrak{a})$ und somit $V(\pi_X^{-1}(\mathfrak{a})) \subseteq X$. Damit ergibt sich

$$V(\pi_X^{-1}(\mathfrak{a})) \ = \ \bigcap_{f \in \pi_X^{-1}(\mathfrak{a})} V(f) \ = \ \bigcap_{f \in \pi_X^{-1}(\mathfrak{a})} V_X(f_{|X}) \ = \ \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V_X(f) \ = \ V_X(\mathfrak{a}).$$

$\square$

Beweis von Satz 5.2.3. Die ersten drei Aussagen ergeben sich direkt aus den Definitionen, man kann sie aber auch mit Lemma 5.2.4 auf die entsprechenden Aussagen über algebraische Mengen in $\mathbb{K}^n$ zurückführen.

Für Aussage (iv) beachte man, dass der Abschluss von Y in X mit dem Abschluss von Y in $\mathbb{K}^n$ übereinstimmt. Lemma 5.2.4 liefert daher

$$V_X(I_X(Y)) \;=\; V(\pi_X^{-1}(I_X(Y))) \;=\; V(I(Y)) \;=\; \overline{Y}.$$

Aussage (v) folgt sofort aus Satz 2.3.16. Aussage (vi) ergibt sich mit Satz 2.4.9. Aussage (vii) ist eine Anwendung des Hilbertschen Nullstellensatzes 4.3.9: Mit Lemma 5.2.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} I_X(V_X(\mathfrak{a})) &= \pi_X(I(V_X(\mathfrak{a}))) \\ &= \pi_X(I(V(\pi_X^{-1}(\mathfrak{a})))) \\ &= \pi_X\left(\sqrt{\pi_X^{-1}(\mathfrak{a})}\right) \\ &= \pi_X\left(\pi_X^{-1}\left(\sqrt{\mathfrak{a}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

□

Definition 5.2.5. Es seine $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge mit Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Man nennt eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{K}$

(i) *regulär* im Punkt $x \in U$, falls es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x und Funktionen $g, h \in \mathbb{K}[X]$ gibt, sodass h keine Nullstelle in V besitzt und $f = g/h$ auf V gilt,

(ii) *regulär* (auf U), falls sie in jedem Punkt $x \in U$ regulär ist.

Beispiel 5.2.6. Für $X = \mathbb{K}$ und $U = \mathbb{K}^*$ ist $f\colon U \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z^{-1}$ eine reguläre Funktion auf U.

Satz 5.2.7. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, und $U \subseteq X$ offen. Ist $f\colon U \to \mathbb{K}$ regulär, so ist f eine stetige Abbildung.*

Beweis. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir annehmen, dass $f = g/h$ auf U mit $g, h \in \mathbb{K}[X]$ gilt. Wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{K}$ das Urbild $f^{-1}(A) \subseteq U$ abgeschlossen in U ist. Für einpunktige Mengen $A = \{a\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) &= \{x \in U;\ f(x) = a\} \\ &= \{x \in U;\ g(x) - ah(x) = 0\} \\ &= U \cap \{x \in X;\ g(x) - ah(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Das Nullstellengebilde von $g - ah \in \mathbb{K}[X]$ ist abgeschlossen in X. Folglich ist $f^{-1}(a)$ abgeschlossen in U. Damit sehen wir, dass $f^{-1}(A) \subseteq U$ für jede endliche Menge $A \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossen in U ist. □

Bemerkung 5.2.8. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge mit Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ und $U \subseteq X$ offen. Sind $f, g\colon U \to \mathbb{K}$ regulär in $x \in U$ und $a \in \mathbb{K}$, so sind auch af, $f + g$ und fg regulär in x.

Definition 5.2.9. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge mit Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$, und es sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Wir schreiben

$$\mathcal{O}(U) \;:=\; \mathcal{O}_X(U) \;:=\; \{f\colon U \to \mathbb{K};\ f \text{ regulär auf } U\}.$$

für die $\mathbb{K}$-Algebra aller auf U regulären Funktionen; als Verknüpfungen legt man dabei die punktweise Verknüpfungen zu Grunde. Weiter setzt man $\mathcal{O}_X(\emptyset) := \{0\}$.

Bemerkung 5.2.10. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ von den offenen Mengen von X in die $\mathbb{K}$-Algebren besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Sind $V \subseteq W \subseteq X$ offene Mengen, so hat man *Einschränkungshomomorphismen*

$$\varrho_V^W : \mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(V), \qquad f \mapsto f|_V.$$

Diese sind in folgendem Sinn miteinander verträglich: Für je drei offene Teilmengen $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$ gilt

$$\varrho_U^W = \varrho_U^V \circ \varrho_V^W.$$

(ii) Ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit offenen Mengen $U_i \subseteq X$, so hat man folgende Regeln:

(G1) Ist $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben mit $f|_{U_i} = 0 \in \mathcal{O}_X(U_i)$, so gilt $f = 0$.

(G2) Sind $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ gegeben mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, so existiert ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Definition 5.2.11. Es sei X ein topologischer Raum. Eine *Prägarbe* von abelschen Gruppen (Ringen, $\mathbb{K}$-Algebren etc.) auf X ist eine Zuordnung

$$\mathcal{F} : \{\text{offene Mengen von } X\} \to [\text{abelsche Gruppen}], \qquad U \mapsto \mathcal{F}(U)$$

mit Homomorphismen $\varrho_V^W : \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}(V)$, $f \mapsto f_{|V} := \varrho_V^W(f)$ für jedes Paar $V \subseteq W \subseteq X$ offener Mengen, sodass die Bedingung aus 5.2.10 (i) erfüllt ist.

Eine Prägarbe auf X heisst *Garbe*, falls sie den beiden Bedingungen (G1) und (G2) aus 5.2.10 (ii) genügt.

Ist $\mathcal{F}$ eine Pägarbe auf X und ist $U \subseteq X$ offen, so nennt man die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ auch die *Schnitte* von $\mathcal{F}$ über U.

Bemerkung 5.2.12. Wegen der Eigenschaften (G1) und (G2) kennt man eine Garbe auf einem topologischen Raum bereits, wenn man sie auf den Mengen einer Basis der Topologie kennt.

Satz 5.2.13. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, und es sei $g \in \mathbb{K}[X]$. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren*

$$\mathbb{K}[X]_g \to \mathcal{O}_X(X_g), \qquad \frac{f}{g^r} \mapsto [x \mapsto f(x)/g(x)^r].$$

Beweis. Da g eine Einheit in $\mathcal{O}(X_g)$ ist, liefert die universelle Eigenschaft 5.1.5 des Bruchringes $\mathbb{K}[X]_g$, dass die obige Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren ist.

Zur Injektivität: Ist $f \in \mathbb{K}[X]$ eine Funktion mit $f(x)/g(x)^r = 0$ für alle $x \in X_g$, so gilt $fg = 0$ auf X und man erhält $f/g^r = 0$ in $\mathbb{K}[X]_g$ wegen

$$g(f1 - 0g^r) = 0 \in \mathbb{K}[X].$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass jedes $h \in \mathcal{O}(X_g)$ von der Gestalt $h = f/g^r$ mit einem $f \in \mathbb{K}[X]$ und $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist.

Nach Satz 5.2.3 (v) finden wir zu jedem $x \in X_g$ eine offene Umgebung $X_{g''} \subseteq X_g$, wobei $g'' \in \mathbb{K}[X]$, sodass man h auf $X_{g''}$ darstellen kann als $h = \widetilde{f}/\widetilde{g}$ mit Funktionen $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathbb{K}[X]$, wobei $\widetilde{g}$ keine Nullstellen in $X_{g''}$ hat.

Da X_g nach Bemerkung 2.4.13 als noetherscher topologischer Raum quasikompakt ist, reichen endlich viele der Funktionen g'', etwa $g_1'', \ldots, g_k''$, aus, um X_g durch die

Mengen $X_{g_i''}$ zu überdecken. Es seien $\widetilde{f}_i, \widetilde{g}_i \in \mathbb{K}[X]$ die entsprechend nummerierten Funktionen mit $h = \widetilde{f}_i/\widetilde{g}_i$ auf $X_{g_i''}$.

Wir setzen nun $f_i' := g_i''\widetilde{f}_i$ und $g_i' := g_i''\widetilde{g}_i$. Dann gilt $X_{g_i'} = X_{g_i''}$, und man hat auf diesen Mengen jeweils $h = f_i'/g_i'$. Auf den Durchschnitten $X_{g_i'} \cap X_{g_j'}$ haben wir $f_i'g_j' = f_j'g_i'$. Also gilt

$$g_i'g_j'(f_i'g_j' - f_j'g_i') \quad = \quad 0$$

auf ganz X. Mit $f_i := g_i'f_i'$ und $g_i = (g_i')^2$ erhalten wir $X_{g_i} = X_{g_i'}$ und $h|_{X_{g_i}} = f_i/g_i$. Weiter gilt $f_ig_j = f_jg_i$ auf ganz X. Aus $X_g = X_{g_1} \cup \ldots \cup X_{g_k}$ folgt durch Übergang zum Komplement $V_X(g) = V_X(g_1) \cap \ldots \cap V_X(g_k)$ und somit

$$g \in I_X(V_X(g_1) \cap \ldots \cap V_X(g_k)) \ = \ I_X(V_X(g_1, \ldots, g_k)) \ = \ \sqrt{\langle g_1, \ldots, g_k \rangle}.$$

Man beachte, dass für die letzte Gleichung der Hilbertsche Nullstellensatz 5.2.3 (vii) benötigt wird. Es sei r eine natürliche Zahl mit $g^r \in \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$. Dann gibt es eine Darstellung $g^r = \sum_{i=1}^k h_ig_i$. Setze nun $f := \sum_{i=1}^k h_if_i$. Damit ergibt sich

$$g^rf_j \ = \ \sum_{i=1}^k (h_ig_i)f_j \ = \ \sum_{i=1}^k (h_if_i)g_j \ = \ fg_j.$$

Das impliziert $h = f_j/g_j = f/g^r$ auf X_{g_j}. Da diese Mengen ganz X_g überdecken, erhalten wir die gewünschte Darstellung der Funktion f auf X_g. □

Folgerung 5.2.14. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}[X]$.*

Beweis. Man setze $g = 1$ in Satz 5.2.13. □

Beispiel 5.2.15. Für die Algebra der regulären Funktionen auf $\mathbb{K}^n$ hat man $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

Beispiel 5.2.16. Für $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n;\ z_i \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n\} = \mathbb{K}^n_{T_1 \cdots T_n}$ ist $\mathcal{O}(\mathbb{T}^n)$ isomorph zur Algebra der Laurentpolynome in $T_1, \ldots, T_n$:

$$\mathcal{O}(\mathbb{T}^n) \quad \cong \quad \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu T^\nu;\ a_\nu \in \mathbb{K} \right\}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 5.2.

Aufgabe 5.2.17. Betrachte die algebraische Menge $X = \mathbb{K}$ und bestimme die Algebra $\mathcal{O}_X(U)$ der regulären Funktionen für

$$U = \mathbb{K}, \qquad U = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \qquad U = \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}.$$

Aufgabe 5.2.18. Es seien $A := \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_1 T_2 \rangle$ und $f \in A$ die Restklasse von $T_1 \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Zeige: Es gilt $A_f \cong \mathbb{K}[T]_T$.

Aufgabe 5.2.19 (Identitätssatz)**.** Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine irreduzible algebraische Menge, und es seien $\emptyset \neq V \subseteq U$ offene Mengen in X.

(i) Zeige: Der Einschränkungshomomorphismus $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ ist injektiv, d.h., $f_{|V} = 0$ impliziert $f = 0$.
(ii) Zeige anhand eines Beispiels, dass man in (i) die Voraussetzung "X irreduzibel" nicht durch "X zusammenhängend" ersetzen kann.

Aufgabe 5.2.20. Bestimme die Algebra $\mathcal{O}(U_i)$ der regulären Funktionen für die folgenden offenen Mengen $U_i \subseteq \mathbb{K}^2$:

$$U_1 = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}^2, \qquad U_2 = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{K}^2, \qquad U_2 = (\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{K}^2.$$

5.3. Affine Varietäten.

Vorbemerkung 5.3.1. Die bislang untersuchte Kategorie der algebraischen Mengen hat den Nachteil, dass man "eingebettete" Objekte $X \subseteq \mathbb{K}^n$ betrachtet. Das bringt einen Mangel an Flexibilität mit sich: Betrachtet man z.B. die Hauptmenge $\mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{K}$, so hat man einen Homöomorphismus

$$\mathbb{K}^* \to V(T_1T_2 - 1), \qquad z \mapsto (z, z^{-1}),$$

auf eine algebraische Menge, aber es gibt keine kanonische Möglichkeit, $\mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{K}$ selbst zu einer algebraischen Menge zu machen. Um hier und in anderen Konstruktionen mehr Spielraum zu gewinnen, erweitern wir nun die Kategorie der algebraischen Mengen.

Definition 5.3.2. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein *Raum mit ($\mathbb{K}$-)Funktionen* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ (auch $\mathcal{O}$) von Algebren $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen, d.h.,

- jeder offenen Menge $U \subseteq X$ wird eine Menge $\mathcal{O}_X(U)$ von Funktionen $U \to \mathbb{K}$ zugeordnet,
- jedes $\mathcal{O}_X(U)$ ist eine $\mathbb{K}$-Algebra bezüglich der punktweisen Verküpfungen $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ bzw. $(fg)(x) := f(x)g(x)$.
- für je zwei offene Mengen $V \subseteq U \subseteq X$ hat man den kanonischen Einschränkungshomomorphismus $\varrho_V^U \colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$, $f \mapsto f_{|V}$.
- Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ zusammen mit den Einschränkungshomomorphismen ϱ_V^U erfüllt die Axiome einer Garbe.

Dabei nennt man $\mathcal{O}_X$ in dann die *Strukturgarbe* von X und man nennt X auch einen Raum mit Strukturgarbe.

Beispiel 5.3.3. Ist $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, so machen die Zariski-Topologie und die Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen X zu einem Raum mit Funktionen.

Bemerkung 5.3.4. Räume mit Funktionen sind auch in anderen Zweige der Geometrie eine grundlegende Begriffsbildung, beispielsweise

- differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit der Garbe der differenzierbaren Funktionen in der Differentialgeometrie,
- komplexe Mannigfaltigkeiten bzw. Räume mit der Garbe der holomorphen Funktionen in der komplexen Geometrie.

Konstruktion 5.3.5. Es sei X ein Raum mit $\mathbb{K}$-Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$. Dann erbt jedes $Y \subseteq X$ die Teilraumtopologie und eine $\mathbb{K}$-Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_Y(V) &:= \{f \colon V \to \mathbb{K};\ \text{zu jedem } y \in V \text{ existieren eine Umgebung } U \subseteq X \\
&\qquad\qquad \text{von } y \text{ und } F \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f_{|U\cap V} = F_{|U\cap V}\} \\
&= \{f \colon V \to \mathbb{K};\ \text{lokal } f = F \text{ mit } F \in \mathcal{O}_X(U)\}.
\end{aligned}$$

Man nennt $\mathcal{O}_Y$ die durch $\mathcal{O}_X$ *induzierte Strukturgarbe* auf Y und Y zusammen mit $\mathcal{O}_Y$ den durch Y definierten *Unterraum* von X.

Bemerkung 5.3.6. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Dann besitzt X die Teilraumtopologie bezüglich $\mathbb{K}^n$, und für jedes offene $V \subseteq X$ hat man

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_X(V) &= \{f \colon V \to \mathbb{K};\ \text{lokal } f = g/h \text{ mit } g, h \in \mathbb{K}[X]\} \\
&= \{f \colon V \to \mathbb{K};\ \text{lokal } f = G/H \text{ mit } G, H \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\}.
\end{aligned}$$

Die Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen auf X ist genau die durch $\mathcal{O}_{\mathbb{K}^n}$ induzierte Strukturgarbe, d.h., X ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung 5.3.7 (Offene Unterräume)**.** Es sei X ein Raum mit Funktionen, und es sei $Y \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann gilt $\mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_X(V)$ für jede offene Menge $V \subseteq Y$.

Beispiel 5.3.8. Für $X = \mathbb{K}$ und $Y = \mathbb{K}^*$ gilt $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_X(Y) \cong \mathbb{K}[T]_T$. Man beachte, dass dies eine affine Algebra ist.

Lemma 5.3.9. *Es seien X ein Raum mit Funktionen, $Y \subseteq X$ ein Unterraum und $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

(i) *Die Teilraumtopologien von Z in Y und Z in X stimmen überein.*
(ii) *Die durch $\mathcal{O}_Y$ bzw. $\mathcal{O}_X$ auf Z induzierten Strukturgarben stimmen überein.*

Beweis. Zu (i). Eine Teilmenge $W \subseteq Z$ ist genau dann offen in der Teilraumtopologie bezüglich Y, wenn $W = Z \cap V$ mit einer offenen Menge $V \subseteq Y$ gilt. Da Y die Teilraumtopologie in X trägt, ist letzteres äquivalent zu $W = Z \cap Y \cap U = Z \cap U$ mit einer offenen Menge $U \subseteq X$. Dies wiederum ist äquivalent zur Offenheit von V in Z als Teilraum von X.

Zu (ii). Für jede offene Teilmenge $W \subseteq Z$ und jede Funktion $f\colon W \to \mathbb{K}$ erhalten wir nach Definition der induzierten Strukturgarbe:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}_Z(W) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{lokal } f = g_{|W} \text{ mit } g \in \mathcal{O}_Y(V) \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{lokal } f = h_{|U} \text{ mit } h \in \mathcal{O}_X(U). \end{aligned}$$

□

Definition 5.3.10. Ein *Morphismus* von Räumen X und Y mit Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$, sodass für jedes offene $V \subseteq Y$ und jedes $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt:

$$f \circ \varphi \quad \in \quad \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)).$$

Bemerkung 5.3.11. Ist $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen, so hat man für jedes offene $V \subseteq Y$ einen wohldefinierten *Komorphismus*

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(V) \;\to\; \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)), \qquad f \;\mapsto\; f \circ \varphi.$$

Bemerkung 5.3.12. Der Morphismenbegriff 5.3.10 macht die Räume mit Funktionen zu einer Kategorie; es gilt:

(i) Für jeden Raum X mit Funktionen ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.
(ii) Die Komposition zweier Morphismen von Räumen mit Funktionen ist wieder ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.

Insbesondere ist damit der Begriff des Isomorphismus von Räumen mit Funktionen definiert: Dies ist ein Morphismus $\varphi\colon X \to X'$, der einen Umkehrmorphismus $\psi\colon X' \to X$ erlaubt, d.h., man hat $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{X'}$.

Bemerkung 5.3.13. Es sei X ein Raum mit Funktionen, und es sei $Y \subseteq X$ ein Unterraum. Dann ist die Inklusionsabbildung $\imath\colon Y \to X$ ein Morphismus.

Lemma 5.3.14 (Einschränkungslemma)**.** *Es sei $\varphi\colon X \to X'$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen. Weiter seien $Y \subseteq X$ und $Y' \subseteq X'$ Unterräume mit $\varphi(Y) \subseteq Y'$. Dann ist die Einschränkung $\varphi_{|Y}\colon Y \to Y'$ wieder ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\varphi_{|Y}: Y \to Y'$ stetig ist. Dazu sei $V' \subseteq Y'$ offen. Dann gibt es ein offenes $U' \subseteq X'$ mit $V' = Y' \cap U'$. Das Urbild von V' unter $\varphi_{|Y}$ ist offen, denn es gilt

$$(\varphi_{|Y})^{-1}(V') \;=\; \varphi^{-1}(U \cap Y') \cap Y \;=\; \varphi^{-1}(U) \cap Y.$$

Wir zeigen nun, dass $\varphi_{|Y}: Y \to Y'$ ein Morphismus ist. Dazu seien $V' \subseteq Y'$ offen und $f \in \mathcal{O}_{Y'}(V')$. Dann ist f lokal von der Gestalt $f = F_{|X'}$ mit Funktionen $F \in \mathcal{O}_{X'}(U')$ und offenen Mengen $U' \subseteq X$. Lokal erhält man daher $f \circ \varphi_{|Y} = (F \circ \varphi)_{|Y}$. Wegen $F \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U'))$ folgt $f \circ \varphi_{|Y} \in \mathcal{O}_Y((\varphi_{|Y})^{-1}(V'))$. $\square$

Satz 5.3.15. *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen, die wir mit den Garbe $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ der regulären Funktionen versehen. Für jede Abbildung $\varphi: X \to Y$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$\varphi: X \to Y$ ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.*
(ii) *$\varphi: X \to Y$ ist Einschränkung einer polynomialen Abbildung $\Phi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.*

Beweis. Zu „(i)⇒(ii)“. Wir betrachten die regulären Funktionen $T_1|_Y, \ldots, T_m|_Y$ auf Y. Nach Definition des Morphismus liefern diese reguläre Funktionen

$$f_i \;:=\; T_i|_Y \circ \varphi \;\in\; \mathcal{O}_X(X) \;=\; \mathbb{K}[X].$$

Man beachte, dass für die letzte Gleichung Korollar 5.2.14 benötigt wird. Nach Definition des Koordinatenringes $\mathbb{K}[X]$ ist jede Funktion $f_i: X \to \mathbb{K}$ Einschränkung eines Polynomes $F_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Die gesuchte polynomiale Abbildung ist also

$$\Phi: \mathbb{K}^n \;\to\; \mathbb{K}^m, \qquad z \;\mapsto\; (F_1(z), \ldots, F_m(z)).$$

Zu „(ii)⇒(i)“. Nach dem Einschränkungslemma 5.3.14 genügt es zu zeigen, dass jede polynomiale Abbildung $\Phi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ein Morphismus ist.

Wir wissen bereits, dass Φ stetig ist. Sind weiter eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{K}^m$ und $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}^m}(V)$ gegeben, so hat man lokale Darstellungen $f = g/h$ mit Polynomen $g, h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]$. Also hat man lokale Darstellungen $f \circ \Phi = g \circ \Phi / h \circ \Phi$. Dabei gilt $g \circ \Phi, h \circ \Phi \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Das bedeutet $f \circ \Phi \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}^m}(\Phi^{-1}V)$. $\square$

Definition 5.3.16 (Kategorie der affinen Varietäten)**.** Es sei $\mathbb{K}$ ein (wie immer) algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Eine *affine ($\mathbb{K}$-)Varietät* ist ein Raum mit ($\mathbb{K}$-)Funktionen, der (als Raum mit Funktionen) isomorph zu einer algebraischen Menge in einem $\mathbb{K}^n$ ist.
(ii) Ein *Morphismus* affiner Varietäten ist ein Morphismus der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Vereinbarung 5.3.17. Von nun an versehen wir jede algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ mit der Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen und sehen sie als affine Varietät an.

Theorem 5.3.18 (Antiäquivalenzsatz, Version II)**.** *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Zuordnungen $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ und $\varphi \mapsto \varphi^*$ definieren einen kontravarianten, wesentlich surjektiven, volltreuen Funktor von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der affinen $\mathbb{K}$-Algebren, d.h., es gilt:*

(i) *Die Zuordnungen $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ und $\varphi \mapsto \varphi^*$ definieren einen kontravarianten Funktor.*
(ii) *Zu jeder affinen Algebra A existiert eine affine Varietät X mit $A \cong \mathcal{O}_X(X)$.*
(iii) *Sind X und Y affine Varietäten, so hat man eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{\textit{Morphismen } X \to Y\} \;&\to\; \{\textit{Homomorphismen } \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)\} \\ \varphi \;&\mapsto\; \varphi^*. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist klar, dass die Zuordnungen einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der Algebren definieren.

Wir zeigen, dass für jede affine Varieät X die Algebra $\mathcal{O}_X(X)$ affin ist. Dazu wählen wir einen Isomorphismus $\imath\colon X \to Y$ auf eine algebraische Menge $Y \subseteq \mathbb{K}^m$. Dieser liefert einen Isomorphismus von Algebren $\imath^*\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$. Nach Folgerung 5.2.14 gilt $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathbb{K}[Y]$ und der Koordinatenring $\mathbb{K}[Y]$ ist eine affine Algebra. Folglich ist $\mathcal{O}_X(X)$ affin.

Die wesentliche Surjektivität des Funktors ergibt sich sofort mit dem Antiäquivalenzsatz 4.5.11: Ist eine affine Algebra A gegeben, so gibt es eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K}[X] \cong A$. Folgerung 5.2.14 liefert $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}[X]$.

Wir zeigen nun, dass der Funktor volltreu ist. Sind affine Varietäten X und Y gegeben, so ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mathrm{Mor}(X,Y) \;\to\; \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)), \qquad \varphi \;\mapsto\; \varphi^*$$

bijektiv ist. Dazu wählen wir Isomorphismen $\rangle\colon X \to X'$ und $\jmath\colon Y \to Y'$ auf algebraische Mengen $X' \subseteq \mathbb{K}^n$ bzw. $Y' \subseteq \mathbb{K}^m$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}(X,Y) \arrow[r, "\varphi\mapsto\varphi^*", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi\mapsto\jmath\circ\varphi\circ\imath^{-1}"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)) \arrow[d, "\cong"', "\alpha\mapsto(\imath^{-1})^*\circ\alpha\circ\jmath^*"] \\
\mathrm{Mor}(X',Y') \arrow[r, "\cong", "\psi\mapsto\psi^*"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y'}(Y'), \mathcal{O}_{X'}(X'))
\end{tikzcd}$$

wobei der Antiäquivalenzsatz 4.5.11 und Folgerung 5.2.14 die Bijektivität der unteren waagerechten Abbildung gewährleisten und die Bijektivität der beiden senkrechten Abbildungen sich elementar einsehen lässt. □

Aufgaben zu Abschnitt 5.3.

Aufgabe 5.3.19. Es sei X ein Raum mit Funktionen, und es sei $Y \subseteq X$ ein Unterraum. Zeige: Die Inklusionsabbildung $Y \to X$ ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.

Aufgabe 5.3.20. Es seien X eine affine Varietät und $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $f \in \mathcal{O}(X)$.
(ii) $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist ein Morphismus.

5.4. Erste Eigenschaften affiner Varietäten.

Erinnerung 5.4.1. Eine *affine Varietät* ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu einer algebraischen Menge ist.

Definition 5.4.2. Es seien X eine affine Varietät und $\mathcal{O}_X(X)$ die Algebra ihrer globalen Funktionen.

(i) Jede Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ definiert ein *Nullstellengebilde*
$$V_X(\mathfrak{a}) \ := \ \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\} \ \subseteq \ X.$$
Wir schreiben $V_X(f_1, \ldots, f_r) := V_X(\mathfrak{a})$, falls $a = \{f_1, \ldots, f_r\}$ gilt.

(ii) Jede Teilmenge $Y \subseteq X$ definiert ein *Verschwindungsideal*
$$I_X(Y) \ := \ \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f_{|Y} = 0\} \ \subseteq \ \mathcal{O}_X(X).$$

Bemerkung 5.4.3. Es sei $\varphi\colon X \to X'$ ein Isomorphismus affiner Varietäten. Für alle $\mathfrak{a}' \subseteq \mathcal{O}_{X'}(X')$ und $Y' \subseteq X'$ haben wir dann
$$\varphi^{-1}(V_{X'}(\mathfrak{a}') \ = \ V_X(\varphi^*(\mathfrak{a}')), \qquad I_X(\varphi^{-1}(Y')) \ = \ \varphi^*(I_{X'}(Y')).$$

Bemerkung 5.4.4. Es sei X eine affine Varietät, und es seien Teilmengen $Y, Y' \subseteq X$ sowie $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ gegeben. Dann gilt
$$\begin{array}{rcl} Y \ \subseteq \ Y' & \Longrightarrow & I_X(Y) \ \supseteq \ I_X(Y'), \\ \mathfrak{a} \ \subseteq \ \mathfrak{a}' & \Longrightarrow & V_X(\mathfrak{a}) \ \supseteq \ V_X(\mathfrak{a}'), \\ V_X(I_X(Y)) & = & \overline{Y}, \\ I_X(V_X(\mathfrak{a})) & = & \sqrt{\mathfrak{a}}, \end{array}$$
wobei $\mathfrak{a}$ in der letzten Gleichung ein Ideal sei; siehe Satz 5.2.3. Insbesondere erhält man inklusionsumkehrende zueinander inverse Bijektionen:
$$\begin{array}{rcl} \{\text{Abgeschlossene Teilmengen von } X\} & \longleftrightarrow & \{\text{Radikalideale in } \mathcal{O}_X(X)\} \\ Y & \mapsto & I_X(Y), \\ V_X(\mathfrak{a}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a}. \end{array}$$
Dabei entsprechen die irreduziblen abgeschlossenen Mengen $Y \subseteq X$ genau den Primidealen $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$.

Satz 5.4.5. *Es sei X eine affine Varietät und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist Y mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe eine affine Varietät, die Inklusionsabbildung $\imath\colon Y \to X$ ist ein Morphismus, und es gilt*
$$\mathcal{O}(Y) \ = \ \imath^*(\mathcal{O}(X)), \qquad \operatorname{Kern}(\imath^*) \ = \ I_X(Y).$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass X eine algebraische Menge in einem $\mathbb{K}^n$ ist. Lemma 5.3.9 garantiert dann, dass die Teilraumtopologie von Y in X die Zariskitopologie auf Y ist und dass die durch $\mathcal{O}_X$ induzierte Strukturgarbe auf Y die Garbe der regulären Funktionen auf Y ist. Folglich ist der abgeschlossene Unterraum Y von X eine affine Varietät. □

Bemerkung 5.4.6. Es sei X eine affine Varietät. Die Mengen $X_f := X \setminus V_X(f)$, wobei $f \in \mathcal{O}_X(X)$, bilden eine Basis der Topologie auf X. Weiter ist X genau dann irreduzibel, wenn $\mathcal{O}_X(X)$ ein Integritätsring ist.

Satz 5.4.7. *Es sei X eine affine Varietät, und es sei $f \in \mathcal{O}(X)$. Dann ist die Hauptmenge*
$$X_f \ = \ \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$$
zusammen mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe wieder eine affine Varietät, und es gilt $\mathcal{O}(X_f) \cong \mathcal{O}(X)_f$.

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $X = \mathbb{K}^n$. Dann ist $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom. Wir betrachten $Z := V(fT_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ und die Abbildung:

$$\Phi\colon \mathbb{K}^n_f \to Z, \qquad z \mapsto (z, f(z)^{-1}).$$

Wir zeigen, das Φ stetig ist. Dazu sei eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq Z$ gegeben. Dann gilt $Y = V(h_1, \ldots, h_r)$ mit Polynomen $h_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$. Man hat

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(Y) &= \{z \in \mathbb{K}^n_f;\ h_1 \circ \Phi(z) = \ldots = h_r \circ \Phi(z) = 0\} \\ &= \mathbb{K}^n_f \cap V(f^k h_1(T_1, \ldots, T_n, 1/f), \ldots, f^k h_r(T_1, \ldots, T_n, 1/f)). \end{aligned}$$

wobei k so groß gewählt sei, dass jede der Funktionen $f^k h_i(T_1, \ldots, T_n, 1/f)$ ein Polynom ist. Das beweist die Abgeschlossenheit von $\Phi^{-1}(Y)$ und somit die Stetigkeit von Φ.

Wir zeigen weiter, dass Φ ein Morphismus ist. Dazu seien eine offene Menge $U \subseteq Z$ und $g \in \mathcal{O}_Z(U)$ gegeben. Dann ist g lokal von der Gestalt g_2/g_2 mit Polynomen $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$. Also ist $\Phi^*(g)$ lokal von der Form

$$\frac{g_1 \circ \Phi}{g_2 \circ \Phi} = \frac{g_1(T_1, \ldots, T_n, 1/f)}{g_2(T_1, \ldots, T_n, 1/f)}$$

und deshalb regulär. Somit ist Φ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen von $\mathbb{K}^n_f$ nach $Z = V(fT_{n+1} - 1)$. Die Abbildung

$$\Psi\colon Z \to \mathbb{K}^n_f \qquad (z, t) \mapsto z$$

ist nach dem Einschränkungslemma ein Morphismus von Räumen mit Funktionen. Da sie ist offensichtlich eine Umkehrabbildung zu Φ ist, erhalten wir dass $\mathbb{K}^n_f$ eine affine Varietät ist.

Im allgemeinen Fall dürfen wir annehmen, dass X als algebraische Menge in einem $\mathbb{K}^n$ gegeben ist. Dann ist $f \in \mathbb{K}[X]$ Einschränkung eines Polynoms $F \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Offensichtlich gilt dabei

$$X_f = \mathbb{K}^n_F \cap X.$$

Der bereits behandelte Fall $X = \mathbb{K}^n$ und Satz 5.4.5 liefern dann, dass X_f als abgeschlossener Unterraum der affinen Varietät $\mathbb{K}^n_F$ eine affine Varietät ist. □

Beispiel 5.4.8. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ wird zu einer affinen Varietät: Es gilt

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K});\ \det(A) \neq 0\} = \mathbb{K}^{n^2}_{\det}.$$

Vereinbarung 5.4.9. Es sei X eine affine Varietät.

(i) Ist $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so versehen wir sie mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe und nennen sie dann eine *abgeschlossene Untervarietät von X*.
(ii) Ist $f \in \mathcal{O}(X)$, so versehen wir die Hauptmenge X_f mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe und nennen sie dann eine *offene Untervarietät von X*.

Konstruktion 5.4.10. Es sei X ein topologischer Raum, und es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X. Den Halm von $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in X$ definiert man wie folgt: Man betrachtet zunächst die disjunkte Vereinigung

$$F := \bigsqcup_{x \in U \subseteq X} \mathcal{F}(U),$$

wobei $U \subseteq X$ alle offenen Umgebungen des Punktes x durchläuft. Auf der Menge F führt man eine Äquivalenzrelation „$\sim$“ ein: Zwei Elemente $s \in \mathcal{F}(U)$ und $s' \in \mathcal{F}(U')$

heißen äquivalent, falls eine offene Umgebung $V \subseteq U \cap U'$ von x existiert mit $s|_V = s'|_V$. Der *Halm* von $\mathcal{F}$ in x ist die Restklassenmenge

$$\mathcal{F}_x \quad := \quad F/\sim .$$

Für ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ bezeichnet man seine Restklasse in $\mathcal{F}_x$ durch s_x und nennt sie den *Keim* von s im Punkt x.

Der Halm $\mathcal{F}_x$ besitzt auf kanonische Weise die Struktur einer abelschen Gruppe: Sind $s_x, s'_x \in \mathcal{F}_x$ mit Repräsentanten $s \in \mathcal{F}(U)$ bzw. $s' \in \mathcal{F}(U')$ gegeben, so setzt man

$$s_x + s'_x \quad := \quad (s_{|U \cap U'} + s'_{|U \cap U'})_x.$$

Dies ist offenbar wohldefiniert und macht $\mathcal{F}_x$ zu einer abelschen Gruppe. Analog sind die Halme einer Prägarbe von Ringen (Algebren, etc.) wieder Ringe (Algebren, etc.).

Satz 5.4.11. *Es sei X eine affine Varietät und $\mathcal{O}_X(X)$ ihre Algebra der globalen Funktionen Dann hat man eine kanonische Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \{\textit{maximale Ideale in } \mathcal{O}_X(X)\} \\ x & \mapsto & \mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f(x) = 0\}. \end{array}$$

Beweis. Die einpunktigen Mengen in X sind genau die minimalen nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von X und die maximalen Ideale von $\mathbb{K}[X]$ sind genau die maximalen von $\mathbb{K}[X]$ verschiedenen Radikalideale in $\mathbb{K}[X]$. Die Behauptung ergibt sich also direkt aus Folgerung 5.4.4. □

Folgerung 5.4.12. *Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann hat man eine kanonische Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \{\textit{maximale Ideale in } \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\} \\ a = (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \mathfrak{m}_a = \langle T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n \rangle. \end{array}$$

Beweis. Es ist nur zu $\mathfrak{m}_a = \langle T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n \rangle$ etwas zu zeigen. Die Inklusion "$\supseteq$" ist dabei offensichtlich. Es genügt also zu zeigen, dass $\langle T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n \rangle$ ein maximales Ideal ist.

Falls $a = 0$ gilt, ist dies klar, denn dann ist $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ offensichtlich der Kern des Epimorphismus

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; \mathbb{K}, \qquad f \;\mapsto\; f(0).$$

Für den allgemeinen Fall verwende man, dass $\mathfrak{m}_a$ das Bild von $\mathfrak{m}_0$ ist unter dem Isomorphismus

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n], \qquad T_i \;\mapsto\; T_i - a_i.$$

□

Satz 5.4.13. *Es seien X eine affine Varietät, $x \in X$ ein Punkt und $\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f(x) = 0\}$ das zugehörige maximale Ideal. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren*

$$\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}, \qquad \frac{f}{g} \;\mapsto\; (fg^{-1})_x.$$

Beweis. Zur Wohldefiniertheit von $f/g \mapsto (fg^{-1})_x$. Offensichtlich haben wir einen Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X(X) \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}, \qquad f \;\mapsto\; f_x.$$

Weiter gilt $g(x) \neq 0$ für jedes $g \in \mathcal{O}_X(X) \setminus \mathfrak{m}_x$. Also gilt $x \in X_g$ und dort ist $g^{-1} \in \mathcal{O}_X(X_g)$ ein multiplikatives Inverses zu $g \in \mathcal{O}_X(X_g)$. Die universelle Eigenschaft des Bruchringes $\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$ liefert daher ein kommutatives Diagramm von Algebrenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) \arrow[rr, "f \mapsto f_x"] \arrow[dr, "f \mapsto \frac{f}{1}"'] & & \mathcal{O}_{X,x} \\ & \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x} \arrow[ur, "\frac{f}{g} \mapsto (fg^{-1})_x"'] & \end{tikzcd}$$

Zur Surjektivität: Es sei $h_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit einem $h \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben. Nach Verkleinern von U können wir annehmen, dass $h = fg^{-1}$ mit $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt. Also ist $f/g \in \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$ das gesuchte Urbild.

Zur Injektivität: Es sei $(f/g)_x = 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq X_g$ von x mit $fg^{-1} = 0 \in \mathcal{O}_X(U)$. Es folgt $f = 0 \in \mathcal{O}_X(U)$. Wir wählen ein Element $h \in I(X \setminus U)$ mit $h(x) \neq 0$. Dann gilt $hf = 0$ auf ganz X. Das bedeutet $f/g = 0 \in \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 5.4.

Aufgabe 5.4.14. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen, und es sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeige: Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Element mit $s_x = 0 \in \mathcal{F}_x$ für alle $x \in U$, so gilt $s = 0$.

Aufgabe 5.4.15. Es sei X eine irreduzible affine Varietät, und es sei $\mathbb{K}(X)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_X(X)$. Zeige: Man hat kanonische Monomorphismen:

(i) $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}(X)$ für jeden Punkt $x \in X$,
(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathbb{K}(X)$ für jede offene Menge $U \subseteq X$.

Zeige weiter: Ist $U \subseteq X$ eine offene Menge, so gilt in dem Körper $\mathbb{K}(X)$ die Gleichung

$$\mathcal{O}_X(U) \quad = \quad \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

6. Affine Varietäten II*

6.1. **Produkte*.**

Definition 6.1.1. Es seien X und Y Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Ein *Produkt* für X und Y in $\mathfrak{C}$ ist ein Objekt W in $\mathfrak{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_X\colon W \to X$ und $\pi_Y\colon W \to Y$, sodass folgendes gilt:

(PR) Ist Z ein Objekt in $\mathfrak{C}$ und sind $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ Morphismen, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\kappa\colon Z \to W$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[uu, "\kappa"] &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 6.1.2. In der Kategorie der Mengen ist das kartesische Produkt $X \times Y$ mit den beiden Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ ein Produkt in obigem Sinn.

Bemerkung 6.1.3. Sofern es existiert, ist das Produkt zweier Objekte X, Y einer Kategorie durch die Eigenschaft (PR) bis auf Isomorphie festgelegt; man bezeichnet es daher auch mit $X \times Y$.

Satz 6.1.4 (Produkt in der Kategorie algebraischer Mengen)**.** *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Dann ist $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge,*

$$\pi_X\colon X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto x, \qquad \pi_Y\colon X \times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y$$

sind algebraische Abbildungen und $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ ist zusammen mit π_X und π_Y ist ein Produkt für $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ in der Kategorie der algebraischen Mengen. Weiter gilt

$$\mathbb{K}[X \times Y] \quad = \quad \mathbb{K}[\pi_X^*(f),\, \pi_Y^*(g);\ f \in \mathbb{K}[X],\, g \in \mathbb{K}[Y]].$$

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge ist und dass die Projektionen π_X und π_Y algebraische Abbildungen sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}[X \times Y] &= \mathbb{K}[T_{i|X\times Y}, S_{j|X\times Y};\ 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m] \\
&= \mathbb{K}[\pi_{\mathbb{K}^n}^*(T_i)_{|X\times Y},\, \pi_{\mathbb{K}^m}^*(S_j)_{|X\times Y};\ 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m] \\
&= \mathbb{K}[\pi_X^*(f),\, \pi_Y^*(g);\ f \in \mathbb{K}[X],\, g \in \mathbb{K}[Y]].
\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Eigenschaft (PR) seien eine algebraische Menge $Z \subseteq \mathbb{K}^l$ und algebraische Abbildungen $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ gegeben. Dann sind φ und ψ Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m$ bzw. $\Psi\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^n$. Die gesuchte algebraische Abbildung ist

$$\kappa\colon Z \ \to\ X \times Y, \qquad z \ \mapsto\ (\Phi(x), \Psi(y)).$$

$\square$

Erinnerung 6.1.5 (Tensorprodukt)**.** Es seien R ein K1-Ring und M, N zwei R-Moduln.

Das *Tensorprodukt* von M und N über R wird folgendermaßen konstruiert. In einem ersten Schritt betrachtet man den "freien R-Modul" über der Menge $M \times N$:

$$F(M \times N) \quad := \quad \bigoplus_{(u,v) \in M \times N} R \cdot (u, v), \qquad \text{wobei } R \cdot (u,v) \cong R.$$

Dann bildet man in $F(M \times N)$ den R-Untermodul $B(M \times N) \subseteq F(M \times N)$ der "bilinearen Relationen"; dieser wird definitionsgemäß erzeugt durch die Elemente

$$\begin{array}{ll} (au, v) - a(u, v), & u \in M, \ v \in N, \ a \in R, \\ (u + u', v) - (u, v) - (u', v), & u, u' \in M, \ v \in N, \\ (u, av) - a(u, v), & u \in M, \ v \in N, \ a \in R, \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v'), & u \in M, \ v, v' \in N. \end{array}$$

Das *Tensorprodukt* von M und N ist dann der Restklassenmodul von $F(M \times N)$ nach $B(M \times N)$:

$$M \otimes_R N \quad := \quad F(M \times N) / B(M \times N).$$

Man schreibt $u \otimes v$ für die Restklasse $(u, v) + B(M \times N)$. Das allgemeine Element von $M \otimes_R N$ eine endliche Summe $\sum u_i \otimes v_i$ und man hat eine bilineare Abbildung

$$\Pi \colon M \times N \ \to \ M \otimes_R N, \qquad (u, v) \ \mapsto \ u \otimes v.$$

Das Tensorprodukt erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder *bilinearen* Abbildung $\varphi \colon M \times N \to L$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & L \\ & M \otimes_R N \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer eindeutig bestimmten *linearen* Abbildung $\widetilde{\varphi} \colon M \otimes_R N \to L$; diese ist explizit gegeben durch

$$\widetilde{\varphi}(u_1 \otimes v_1 + \ldots + u_r \otimes v_r) \quad = \quad \varphi(u_1, v_1) + \ldots + \varphi(u_r, v_r).$$

Konstruktion 6.1.6 (Koprodukt in der Kategorie der Algebren)**.** Es seien A und B zwei $\mathbb{K}$-Algebren. Wir betrachten das Tensorprodukt

$$R \quad = \quad A \otimes_{\mathbb{K}} B.$$

Dies ist a priori nur ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir führen eine Multiplikation ein, indem wir zunächst setzen

$$(f \otimes g) \cdot (f' \otimes g') \quad := \quad ff' \otimes gg'.$$

Mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts prüft man nach, dass sich dies (eindeutig und wohldefiniert) zu einer Multiplikation auf R fortsetzen lässt, welche R zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht. Weiter hat man kanonische Homomorphismen

$$\imath_A \colon A \to R, \ f \mapsto f \otimes 1, \qquad \imath_B \colon B \to R, \ g \mapsto 1 \otimes g.$$

Zusammen mit diesen Homomorphismen erfüllt das Tensorprodukt R die folgende universelle Eigenschaft:

(KoPR) Sind eine $\mathbb{K}$-Algebra C und Homomorphismen $\varphi\colon A \to C$ sowie $\psi\colon B \to C$ gegeben, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\mu\colon R \to C$ mit dem das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dd, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "\imath_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[ul, "\imath_B"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

kommutativ wird. Tatsächlich kann man den Homomorphismus $\varphi\colon R \to C$ direkt angeben; er ist definiert durch

$$\mu\colon R \ \to \ C, \qquad f \otimes g \ \mapsto \ \varphi(f)\psi(g).$$

Satz 6.1.7. *Es seien X und Y affine Varietäten. Dann besitzt das kartesische Produkt $X \times Y$ die Struktur einer affinen Varietät, sodass es zusammen mit*

$$\pi_X : X \times Y \ \to \ X, \ (x, y) \mapsto x, \qquad \pi_X : X \times Y \ \to \ Y, \ (x, y) \mapsto y$$

zu einem Produkt für die affinen Varietäten X und Y wird. Weiter hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren

$$\begin{aligned}\mu\colon \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \ &\to \ \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y),\\ \sum f_i \otimes g_i \ &\mapsto \ \sum \pi_X^*(f_i)\pi_Y^*(g_i).\end{aligned}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen sind. Nach Satz 6.1.4 ist dann $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ zusammen mit den Projektionen π_X und π_Y ein Produkt in der Kategorie der algebraischen Mengen.

Die Abbildung μ ist der durch die universelle Eigenschaft (Kopr) des Tensorproduktes gegebene Algebrenhomomorphismus zu

$$\pi_X^* : \mathbb{K}[X] \ \to \ \mathbb{K}[X \times Y], \qquad \pi_Y^* : \mathbb{K}[Y] \ \to \ \mathbb{K}[X \times Y].$$

Die Surjektivität von μ ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass $\mathbb{K}[X \times Y]$ gemäß Satz 6.1.4 erzeugt wird von den Funktionen

$$\pi_X^*(f) = \mu(f \otimes 1), \ f \in \mathbb{K}[X], \qquad \pi_Y^*(g) = \mu(1 \otimes g), \ g \in \mathbb{K}[Y].$$

Um zu sehen, dass μ injektiv ist, betrachten wir ein $h = \sum f_i \otimes g_i$ mit $\mu(h) = 0$. Dabei darf man annehmen, dass die g_i eine über $\mathbb{K}$ linear unabhängige Familie bilden. Für festes $x \in X$ hat man

$$0 \ = \ \mu(h)(x, ?) \ = \ \sum f_i(x) g_i \ \in \ \mathbb{K}[Y].$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der g_i bedeutet dies $f_i(x) = 0$ für alle i. Das geht für jedes $x \in X$, und man erhält $f_i = 0$ für alle i. Das impliziert $h = 0$ und folglich ist μ injektiv.

Wir kommen zum allgemeinen Fall. Die affinen Varietäten X und Y sind, als Räume mit Funktionen, isomorph zu algebraischen Mengen $X' \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y' \subseteq \mathbb{K}^m$, etwa vermöge

$$\imath\colon X \ \to \ X', \qquad \jmath\colon \ Y \to \ Y'.$$

Wir wissen bereits, dass $X' \times Y'$ eine affine Varietät ist, und diese Struktur transportieren wir nun nach $X \times Y$ vermöge der bijektiven Abbildung

$$\imath \times \jmath\colon X \times Y \ \to \ X' \times Y', \qquad (x, y) \ \mapsto \ (\imath(x), \jmath(y)).$$

Die offenen Mengen in $X \times Y$ sind genau die Urbilder $U := (\imath \times \jmath)^{-1}(V)$ offener Mengen in $V \subseteq X' \times Y'$, und die Strukturgarbe auf $X \times Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_{X\times Y}(U) \ := \ \{f \circ (\imath \times \jmath);\ f \in \mathcal{O}_{X'\times Y'}(V)\},$$

Damit ist $X \times Y$ ein Raum mit Funktionen, und $\imath \times \jmath$ ist ein Isomorphismus auf eine affine Varietät; insbesondere ist $X \times Y$ nun eine affine Varietät.

Die Tatsache, dass die beiden Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ Morphismen sind, ergibt sich sofort aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\imath\times\jmath", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_X"'] & X' \times Y' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\
X \arrow[r, "\cong", "\imath"'] & X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\imath\times\jmath", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X' \times Y' \arrow[d, "\pi_{Y'}"] \\
Y \arrow[r, "\cong", "\jmath"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft eines Produktes seien eine affine Varietät Z und Morphismen $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ gegeben. Dann gibt es einen Isomorphismus $\eta\colon Z \to Z'$ auf eine algebraische Menge $Z' \subseteq \mathbb{K}^l$. Rein mengentheoretisch erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & X\times Y \arrow[d, "\cong"', "(\imath\times\jmath)"] \arrow[ddll, bend right, "\pi_X"'] \arrow[ddrr, bend left, "\pi_Y"] & & \\
& & X'\times Y' \arrow[dl, "\pi'_X"'] \arrow[dr, "\pi'_Y"] & & \\
X \arrow[r, "\imath"] & X' & & Y' & Y \arrow[l, "\jmath"'] \\
& & Z' \arrow[ul, "\varphi'"] \arrow[ur, "\psi'"'] \arrow[uu, "\kappa'"'] & & \\
& & Z \arrow[u, "\cong", "\eta"'] \arrow[uull, bend left, "\varphi"] \arrow[uurr, bend right, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

von Abbildungen. Die Abbildungen φ' und ψ' sind, als Verkettung von Morphismen wieder Morphismen, und somit algebraische Abbildungen. Satz 6.1.4 sagt uns also, dass κ' eine algebraische Abbildung ist. Damit ist die Abbildung $\kappa := (\imath\times\jmath)^{-1}\circ\kappa'\circ\eta$ der gewünschte Morphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $\mu\colon \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y)$ ein Isomorphismus ist. Die entsprechende Aussage für X' und Y' haben wir bereits in Satz 6.1.4 gezeigt. Den allgemeinen Fall erhalten wir wieder mit einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \arrow[l, "\imath^*\otimes\jmath^*"', "\cong"] \arrow[d, "\mu"', "\cong"] \\
\mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y) & \mathcal{O}_{X'\times Y'}(X' \times Y') \arrow[l, "\cong"', "(\imath\times\jmath)^*"]
\end{tikzcd}$$

□

Folgerung 6.1.8. *Das Koprodukt zweier affiner Algebren ist wieder eine affine Algebra. Insbesondere existieren in der Kategorie der affinen Algebren Koprodukte.*

Aufgaben zu Abschnitt 6.1.

Aufgabe 6.1.9. Beweise Bemerkung 6.1.3: Sind X_1, X_2 Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$ und W mit $\pi_i \colon W \to X_i$ sowie W' mit $\pi_i' \colon W' \to X_i$ Produkte für X_1, X_2, so gilt $W \cong W'$.

Aufgabe 6.1.10. Es seien X, Y, Z Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$, in der Produkte existieren. Beweise folgende Aussagen:

$$X \times Y \;\cong\; Y \times X, \qquad\qquad (X \times Y) \times Z \;\cong\; X \times (Y \times Z).$$

Aufgabe 6.1.11. Es seien $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige: Es gilt $\mathbb{K}^{n+m} \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$.

Aufgabe 6.1.12. Es seien X und Y topologische Räume. Betrachte die Menge $X \times Y$ und die beiden Projektionen π_X, π_Y. Die Mengen

$$\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V), \qquad U \subseteq X,\ V \subseteq Y \text{ offen}$$

biden die Basis einer Topologie auf $X \times Y$, der *Produkttopologie*. Beweise folgende Aussagen:

(i) Sind X, Y affine Varietäten, so ist die Topologie der affinen Varietät $X \times Y$ feiner als die Produkttopologie auf $X \times Y$.
(ii) Die Zariskitopologie auf $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{K}^1 \times \mathbb{K}^1$ ist *echt* feiner als die Produkttopologie auf $\mathbb{K}^1 \times \mathbb{K}^1$.

Aufgabe 6.1.13. Beweise die Aussagen aus Konstruktion 6.1.6.

6.2. **Maximalspektrum*.**

Definition 6.2.1. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Das *(Maximal-)Spektrum* von A ist die Kollektion ihrer maximalen Ideale:

$$\mathrm{Spec}(A) \quad := \quad \{\mathfrak{m} \subseteq A;\ \mathfrak{m} \text{ ist maximales Ideal in } A\}.$$

Definition 6.2.2. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Jedem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ordnen wir ein *Nullstellengebilde* in $\mathrm{Spec}(A)$ zu:

$$V(\mathfrak{a}) \ := \ \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A);\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\} \ \subseteq \ \mathrm{Spec}(A).$$

Satz 6.2.3. *Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Dann sind die Mengen $V(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ die Ideale von A durchläuft, die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf* $\mathrm{Spec}(A)$. *Genauer hat man:*

(i) *Es gilt $\emptyset = V(A)$ und $\mathrm{Spec}(A) = V(0)$.*
(ii) *Sind $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, Ideale in A, so gilt*

$$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \quad = \quad V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

(iii) *Sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ Ideale in A, so gilt*

$$\bigcup_{i=1}^{r} V(\mathfrak{a}_i) \quad = \quad V\left(\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i\right).$$

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Zu (ii). Für jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m} \text{ für alle } i \in I \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{m} \in V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right). \end{aligned}$$

Zu (iii). Als maximales Ideal ist jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein Primideal in A. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} \in \bigcup_{i=1}^{r} V(\mathfrak{a}_i) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m} \text{ für ein } i \\ &\Longleftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{m} \in V\left(\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i\right). \end{aligned}$$

Dabei sieht man die Implikation „$\Leftarrow$“ in der mittleren Zeile durch Induktion über r. Der Fall $r = 1$ ist klar. Zum Induktionsschritt: Falls $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{m}$ gilt, ist $i = r$ der gesuchte Index. Andernfalls gibt es ein $a \in \mathfrak{a}_r \setminus \mathfrak{m}$. Für jedes $b \in \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{r-1}$ gilt dann $ab \in \mathfrak{m}$ und somit $b \in \mathfrak{m}$. Das bedeutet $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{r-1} \subseteq \mathfrak{m}$, und die Induktionsvoraussezung liefert das gewünschte $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{m}$. □

Vereinbarung 6.2.4. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Von nun an versehen wir das Spektrum $\mathrm{Spec}(A)$ mit der Topologie aus Satz 6.2.3; diese nennen wir auch die *Zariski-Topologie* auf $\mathrm{Spec}(A)$.

Lemma 6.2.5. *Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra, und es sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann erlaubt A eine Zerlegung $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \cdot 1_A \subseteq A$ identifiziert wird.*

Beweis. Zunächst sei vermerkt, daß $\mathbb{K} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ in A gilt. Folglich liefert Einschränken der Restklassenabbilung $A \to A/\mathfrak{m}$ einen Monomorphismus $\mathbb{K} \to A/\mathfrak{m}$. Wir dürfen $\mathbb{K}$ daher als Unterkörper von $A/\mathfrak{m}$ auffassen.

Da A endlich erzeugt ist, entsteht $\mathbb{K} \subseteq A/\mathfrak{m}$ durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente. Nach Satz 4.3.1 ist $\mathbb{K} \subseteq A/\mathfrak{m}$ algebraisch. Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, ergibt sich $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Damit folgt die Behauptung. □

Konstruktion 6.2.6. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra, und es sei $f \in A$. Nach Lemma 6.2.5 liefert jedes Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ eine eindeutige Zerlegung

$$f \quad = \quad f(\mathfrak{m}) + f'$$

mit $f(\mathfrak{m}) \in \mathbb{K}$ und $f' \in \mathfrak{m}$. Man nennt $f(\mathfrak{m})$ den *Wert* von f in $\mathfrak{m}$. Dieses Auswerten definiert einen Homomorphismus

$$A \ \to \ \mathrm{Abb}(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{K}), \qquad f \ \mapsto \ [\widetilde{f} \colon \mathfrak{m} \mapsto f(\mathfrak{m})].$$

Wie angedeutet, bezeichnen wir die einem Element $f \in A$ zugeordnete $\mathbb{K}$-wertige Funktion $\mathfrak{m} \mapsto f(\mathfrak{m})$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ mit $\widetilde{f}$.

Definition 6.2.7. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Die *Strukturgarbe* auf $X := \mathrm{Spec}(A)$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \{f \colon U \to \mathbb{K}; \ \text{lokal } f = \widetilde{g}/\widetilde{h} \text{ mit } g, h \in A\}.$$

Lemma 6.2.8. *Es sei $\psi \colon B \to A$ ein Homomorphismus affiner $\mathbb{K}$-Algebren. Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset B$ wieder ein maximales Ideal.*

Beweis. Bekanntermaßen ist $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq B$ ein Ideal und wegen $1 \notin \psi^{-1}(\mathfrak{m})$ ist es ein echtes Ideal.

Um zu sehen, dass $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal ist, sei ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ mit $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \subsetneq \mathfrak{b}$ gegeben. Ist $g \in \mathfrak{b} \setminus \psi^{-1}(\mathfrak{m})$, so liefert Lemma 6.2.5 eine Zerlegung $\psi(g) = a + f$ mit $a \in \mathbb{K}^*$ und $f \in \mathfrak{m}$. Es folgt $g - a \in \psi^{-1}(\mathfrak{m})$ und somit $a = g - (g - a) \in \mathfrak{b}$. Das bedeutet $\mathfrak{b} = B$. □

Konstruktion 6.2.9. Es sei $\psi \colon B \to A$ ein Homomorphismus affiner $\mathbb{K}$-Algebren. Nach Lemma 6.2.8 hat man eine Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\psi) \colon \mathrm{Spec}(A) \ \to \ \mathrm{Spec}(B), \qquad \mathfrak{m} \ \mapsto \ \psi^{-1}(\mathfrak{m}).$$

Satz 6.2.10. *Es sei $\psi \colon B \to A$ ein Homomorphismus affiner $\mathbb{K}$-Algebren. Dann ist $\varphi := \mathrm{Spec}(\psi) \colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen. Weiter gilt*

$$\varphi^*(\widetilde{f})(\mathfrak{m}) \ = \ \widetilde{f}(\varphi(\mathfrak{m})) \ = \ \widetilde{\psi(f)}(\mathfrak{m}) \qquad \text{für jedes } f \in B \text{ und jedes } \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A).$$

Beweis. Für die Stetigkeit von φ ist zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Das folgt mit

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(V(\mathfrak{b})) \quad &= \quad \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A); \ \varphi(\mathfrak{m}) \in V(\mathfrak{b})\} \\
&= \quad \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A); \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{b}\} \\
&= \quad \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A); \ \mathfrak{m} \supseteq \psi(\mathfrak{b})\} \\
&= \quad \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A); \ \mathfrak{m} \supseteq \langle \psi(\mathfrak{b}) \rangle\} \\
&= \quad V(\langle \psi(\mathfrak{b}) \rangle).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Zusatzaussage. Nach Definition des Wertes von f in $\varphi(\mathfrak{m}) = \psi^{-1}(\mathfrak{m})$ haben wir eine Darstellung

$$f \ = \ f(\varphi(\mathfrak{m})) + f' \qquad \text{mit } f(\varphi(\mathfrak{m})) \in \mathbb{K},\ f' \in \varphi(\mathfrak{m}).$$

Anwenden des $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus ψ auf diese Darstellung ergibt

$$\psi(f) \ = \ \psi(f(\varphi(\mathfrak{m}))) + \psi(f') \ = \ f(\varphi(\mathfrak{m})) + \psi(f').$$

Wegen $\varphi(\mathfrak{m}) = \psi^{-1}(\mathfrak{m})$ und $f' \in \mathfrak{m}$ erhalten wir $\psi(f') \in \mathfrak{m}$. Damit ergibt sich die Zusatzaussage $(\psi(f))(\mathfrak{m}) = f(\varphi(\mathfrak{m}))$.

Die Tatsache, dass φ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen ist, folgt nun sofort aus der Definition der Strukturgarben. □

Bemerkung 6.2.11. Wir haben einen *kontravarianten Funktor* von der Kategorie der affinen $\mathbb{K}$-Algebren in die Kategorie der Räume mit Funktionen konstruiert:

- Jeder affinen $\mathbb{K}$-Algebra A ordnen wir den Raum mit Funktionen $\mathrm{Spec}(A)$ zu.
- Jedem Homomorphismus $\psi\colon B \to A$ affiner $\mathbb{K}$-Algebren ordnen wir den Morphismus $\mathrm{Spec}(\psi)\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ zu. Dabei gilt stets

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{id}) \ = \ \mathrm{id}, \qquad \mathrm{Spec}(\psi_2 \circ \psi_1) \ = \ \mathrm{Spec}(\psi_1) \circ \mathrm{Spec}(\psi_2).$$

Satz 6.2.12. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, und es sei $A := \mathbb{K}[X]$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\imath\colon X \ \to \ \mathrm{Spec}(A), \qquad x \ \mapsto \ \mathfrak{m}_x$$

von Räumen mit Funktionen. Für jedes Element $f \in A = \mathbb{K}[X]$ des Koordinatenringes gilt dabei $\imath^*(\widetilde{f}) = f$.

Beweis. Nach Folgerung 5.4.11 ist die Abbildung $\imath\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ bijektiv. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ erhält man

$$\begin{aligned} \imath\,(V_X(\mathfrak{a})) \ &= \ \{\mathfrak{m}_x;\ f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\} \\ &= \ \{\mathfrak{m}_x;\ f \in \mathfrak{m}_x \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\} \\ &= \ \{\mathfrak{m}_x;\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_x\}. \\ &= \ V(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Folglich ist $\imath$ eine abgeschlossene Abbildung. Anwenden von $\imath^{-1}$ auf die obige Gleichung liefert Stetigkeit. Somit sind $\imath$ und $\imath^{-1}$ stetig.

Für jede Funktion $f \in A = \mathbb{K}[X]$ und jeden Punkt $x \in X$ hat man offensichtlich eine Zerlegung

$$f \ = \ f(x) \ + \ (f - f(x)), \qquad \text{mit } f(x) \in \mathbb{K},\ (f - f(x)) \in \mathfrak{m}_x.$$

Es folgt $f(\mathfrak{m}_x) = f(x)$. Aus der Definition der Strukturgarben auf $\mathrm{Spec}(A)$ und X ergibt sich nun, dass sind $\imath$ und $\imath^{-1}$ Morphismen von Räumen mit Funktionen sind. □

Satz 6.2.13. *Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Dann ist $\mathrm{Spec}(A)$ eine affine Varietät und man hat einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren*

$$\jmath\colon A \ \to \ \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)), \qquad f \ \mapsto \ [\widetilde{f}\colon \mathfrak{m} \mapsto f(\mathfrak{m})].$$

Beweis. Falls $A = \mathbb{K}[X]$ gilt mit einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$, liefert Satz 6.2.12 einen Isomorphismus $\imath\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ von Räumen mit Funktionen. Der zugehörige Komorphismus $\imath^*\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \to A$ ist, wie man direkt überprüft, die Umkehrabbildung zu $\jmath\colon A \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A))$.

Im allgemeinen Fall hat man nach Satz 4.5.11 einen Isomorphismus $\psi\colon A \to \mathbb{K}[X]$ mit einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Das liefert uns einen Isomorphismus $\mathrm{Spec}(\psi)\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[X]) \to \mathrm{Spec}(A)$. Da $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[X])$ eine affine Varietät ist, gilt dies auch für $\mathrm{Spec}(A)$. Weiter haben wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d, "\jmath"'] & \mathbb{K}[X] \arrow[d, "\jmath"] \\
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Spec}(\psi)^*"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[X])}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[X]))
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 6.2.10 ist dieses Diagramm kommutativ. Damit sehen wir sofort, dass $\jmath\colon A \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A))$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 6.2.

Aufgabe 6.2.14. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Zeige: Die Menge $\operatorname{Spec}(A) \setminus V(f)$ mit $f \in A$ bilden eine Basis der Topologie von $\operatorname{Spec}(A)$.

Aufgabe 6.2.15. Es sei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra. Zeige: Der Durchschnitt über alle maximalen Ideale von A enthält 0 als einziges Element.

Aufgabe 6.2.16. Zeige: Die Gruppenalgebra $\mathbb{K}[\mathbb{Z}]$ ist eine affine Algebra, und $\operatorname{Spec}(\mathbb{K}[\mathbb{Z}])$ ist isomorph zu der algebraischen Menge $V(\mathbb{K}^2; T_1T_2 - 1)$.

Aufgabe 6.2.17. Es seien $\psi : R \to S$ ein Homomorphismus von K1-Ringen $\mathfrak{m} \leq_S S$ ein maximales Ideal.

(i) Zeige anhand eines expliziten Beispiels, dass das Ideal $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ nicht notwendigerweise maximal in R ist.
(ii) Zeige, dass für surjektives ψ das Urbild $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ stets maximal in R ist.

Aufgabe 6.2.18. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten. Beweise folgende Aussagen:

(i) φ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ das Ideal $\langle \varphi^*(\mathfrak{m}) \rangle \subseteq \mathcal{O}(X)$ echt ist.
(ii) φ ist genau dann injektiv, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ entweder $\langle \varphi^*(\mathfrak{m}) \rangle = \mathcal{O}(X)$ gilt, oder $\sqrt{\langle \varphi^*(\mathfrak{m}) \rangle}$ maximal ist.

6.3. **Der Antiäquivalenzsatz II*.**

Definition 6.3.1. Es seien $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ zwei Kategorien und $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ sowie $G\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ Funktoren, die entweder beide kovariant oder beide kontravariant seien. Man nennt F und G *wesentlich invers zueinander*, falls folgendes gilt:

(i) Es gibt eine Vorschrift σ, die jedem Objekt X in $\mathfrak{C}$ einen Isomorphismus $\sigma_X\colon X \to G(F(X))$ zuordnet, sodass man für Morphismen $\varphi\colon X \to X'$ stets ein kommutatives Diagramm erhält

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(\varphi))"] \\ X' \arrow[r, "\sigma_{X'}"'] & G(F(X')) \end{tikzcd}$$

(ii) Es gibt eine Vorschrift τ, die jedem Objekt Y in $\mathfrak{D}$ einen Isomorphismus $\tau_Y\colon Y \to F(G(Y))$ zuordnet, sodass man für Morphismen $\psi\colon Y \to Y'$ stets ein kommutatives Diagramm erhält

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\psi"'] & F(G(Y)) \arrow[d, "F(G(\psi))"] \\ Y' \arrow[r, "\tau_{Y'}"'] & F(G(Y')) \end{tikzcd}$$

Satz 6.3.2. *Es seien $F\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $G\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ zwei Funktoren. Sind F und G wesentlich invers zueinander, so sind sie wesentlich surjektiv und volltreu.*

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften wesentlich surjektiv, treu und voll jeweils für F nach, für G erhält man sie analog.

Ist ein Objekt Y in $\mathfrak{D}$ gegeben, so leistet das Objekt $X := G(Y)$ in $\mathfrak{C}$ offensichtlich $F(X) \cong Y$. Somit ist F wesentlich surjektiv.

Um zu sehen, dass F bijektiv auf den Morphismen ist, betrachten wir zwei Objekte X, X'. Dann definiert jeder Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(\varphi))"] \\ X' \arrow[r, "\sigma_{X'}"'] & G(F(X')) \end{tikzcd}$$

Damit sehen wir, dass F injektiv auf Morphismen ist: Sind zwei Morphismen $\varphi_i\colon X \to X'$ mit $F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ gegeben, so ergibt sich

$$\varphi_1 \;=\; \sigma_{X'}^{-1} \circ G(F(\varphi_1)) \circ \sigma_X \;=\; \sigma_{X'}^{-1} \circ G(F(\varphi_2)) \circ \sigma_X \;=\; \varphi_2.$$

Für den Nachweis der Surjektivität sei ein Morphismus $\psi\colon F(X) \to F(X')$ gegeben. Mit $\varphi := \sigma_{X'}^{-1} \circ G(\psi) \circ \sigma_X$ erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(\psi)"] \\ X' \arrow[r, "\sigma_{X'}"'] & G(F(X')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(\varphi))"] \\ X' \arrow[r, "\sigma_{X'}"'] & G(F(X')) \end{tikzcd}$$

Mit der Injektivität von G auf Morphismen ergibt sich dann $F(\varphi) = \psi$; wir haben also das gesuchte Urbild gefunden. $\square$

Theorem 6.3.3 (Antiäquivalenzsatz, Version II)**.** *Wir haben zueinander wesentlich inverse kontravariante Funktoren:*

(i) *Von der Kategorie der affinen Varietäten in die Kategorie der affinen Algebren*
$$X \ \mapsto \ \mathcal{O}(X), \qquad \varphi \ \mapsto \ \varphi^*.$$
(ii) *Von der Kategorie der affinen Algebren in die Kategorie der affinen Varietäten*
$$A \ \mapsto \ \mathrm{Spec}(A), \qquad \psi \ \mapsto \ \mathrm{Spec}(\psi).$$

Insbesondere erhält man für jede affine Varietät X und für jede affine Algebra A:
$$X \ \cong \ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)), \qquad A \ \cong \ \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)).$$

Lemma 6.3.4. *Es sei X eine affine Varietät. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus affiner Varietäten:*
$$\imath\colon X \ \to \ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)), \qquad x \ \mapsto \ \mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}(X);\ f(x) = 0\}.$$

Beweis. Nach Satz 6.2.12 gilt die Aussage für den Fall einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$. Im allgemeinen Fall hat man einen Isomorphismus $\varphi\colon X \to Y$ auf eine algebraische Menge $Y \subseteq \mathbb{K}^m$. Der zugehörige Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ ist dann ebenfalls ein Isomorphismus. Es gilt
$$(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \ = \ \{g \in \mathcal{O}(Y);\ g \circ \varphi(x) = 0\} \ = \ \mathfrak{m}_{\varphi(x)}.$$
für jeden Punkt $x \in X$. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm anhand dessen wir die Behauptung unmittelbar einsehen:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\imath\colon x \mapsto \mathfrak{m}_x"] \arrow[d, "\varphi\colon x \mapsto \varphi(x)"', "\cong"] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{Spec}(\varphi^*)\colon \mathfrak{m}_x \mapsto \mathfrak{m}_{\varphi(x)}"] \\
Y \arrow[r, "\cong", "\imath\colon y \mapsto \mathfrak{m}_y"'] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(Y))
\end{tikzcd}$$

□

Beweis von Theorem 6.3.3. Wir arbeiten mit den kanonischen Isomorphismen aus Lemma 6.3.4 und Satz 6.2.13:
$$\sigma_X : X \ \to \ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)), \quad x \ \mapsto \ \mathfrak{m}_x, \qquad \tau_A : A \ \to \ \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)), \quad f \ \mapsto \ \widetilde{f}.$$
Es sei zunächst ein Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ affiner Varietäten gegeben. Dann gilt für jeden Punkt $x \in X$:
$$(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \ = \ \{g \in \mathcal{O}(Y);\ g \circ \varphi(x) = 0\} \ = \ \mathfrak{m}_{\varphi(x)}.$$
Damit erhalten wir bereits das in Definition 6.3.1 (i) verlangte kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sigma_X : x \mapsto \mathfrak{m}_x"] \arrow[d, "\varphi\colon x \mapsto \varphi(x)"'] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\varphi^*)\colon \mathfrak{m}_x \mapsto \mathfrak{m}_{\varphi(x)}"] \\
X' \arrow[r, "\sigma_{X'} : x' \mapsto \mathfrak{m}_{x'}"'] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X'))
\end{tikzcd}$$

Es sei nun $\psi\colon B \to A$ ein Homomorphismus affiner Algebren. Dann erhalten wir das erforderliche kommutative Diagramm mit Satz 6.2.10:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau_B\colon g\mapsto\widetilde{g}"] \arrow[d, "\psi\colon g\mapsto\psi(g)"'] & \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(B)) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(\psi)^*\colon \widetilde{g}\mapsto\widetilde{\psi(g)}"] \\ A \arrow[r, "\tau_A\colon f\mapsto\widetilde{f}"'] & \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) \end{tikzcd}$$

$\square$

Aufgaben zu Abschnitt 6.3.

Aufgabe 6.3.5. Es seien X eine affine Varietät, $f, f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$ und $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige, dass die folgende Abbildung ein Morphismus affiner Varietäten ist:

$$X_f \to \mathbb{K}^r, \qquad x \mapsto \left(\frac{f_1(x)}{f(x)^{l_1}}, \ldots, \frac{f_r(x)}{f(x)^{l_r}}\right).$$

Aufgabe 6.3.6. Betrachte die offene Teilmenge $X := \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als offenen Unterraum der affinen Varietät $\mathbb{K}^2$. Zeige, dass X keine affine Varietät ist.

Aufgabe 6.3.7. Betrachte die affine Varietät $X := V(T_1T_2 - T_3T_4) \subseteq \mathbb{K}^4$ und die offene Menge $U := X \setminus V(T_1, T_3) = X_{T_1} \cup X_{T_3}$. Beweise folgende Aussagen.

(i) Der Unterraum U von X ist keine affine Varietät.
(ii) Die Funktionen T_4/T_1 auf X_{T_1} und T_2/T_3 auf X_{T_3} lassen sich zu einer Funktion $f \in \mathcal{O}_X(U)$ zusammensetzen.
(iii) Es gibt keine Funktionen $g, h \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $f = g/h$ auf U.

7. Geometrie affiner Varietäten I

7.1. **Funktionenkörper und Dimension.**

Erinnerung 7.1.1. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in \mathbb{L}$ nennt man *algebraisch über* $\mathbb{K}$, falls es ein Polynom $0 \neq f \in \mathbb{K}[T]$ gibt mit $f(a) = 0$. Die Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt *algebraisch*, falls jedes $a \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$ ist.

Man nennt ein Element $a \in \mathbb{L}$ *transzendent über* $\mathbb{K}$, falls es nicht algebraisch über $\mathbb{K}$ ist. Die Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt *rein transzendent*, falls jedes $a \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ transzendent über $\mathbb{K}$ ist.

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{L}$ heißt *algebraisch abhängig* über $\mathbb{K}$, falls es paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ und ein Polynom $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gibt mit

$$f(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad 0.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{L}$ nennt man *algebraisch unabhängig* über $\mathbb{K}$ falls sie nicht algebraisch abhängig über $\mathbb{K}$ ist.

Eine *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ist eine maximale über $\mathbb{K}$ algebraisch unabhängige Teilmenge $B \subseteq \mathbb{L}$. Es gilt:

(i) Sind $A \subseteq B \subseteq \mathbb{L}$ Teilmengen, und ist A algebraisch unabhängig über $\mathbb{K}$, so gibt es eine Transzendenzbasis $C \subseteq B$ für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(B)$ mit $A \subseteq C \subseteq B$.
(ii) Ist $B \subseteq \mathbb{L}$ eine Transzendenzbasis für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, so ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(B)$ rein transzendent und $\mathbb{K}(B) \subseteq \mathbb{L}$ ist algebraisch.
(iii) Je zwei Transzendenzbasen der Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ sind gleich mächtig.

Insbesondere besitzt jede Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Transzendenzbasis $B \subseteq \mathbb{L}$. Man definiert den *Transzendenzgrad* der Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ dann als

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \quad := \quad |B|.$$

Beispiel 7.1.2. Es sei $\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$ der Quotientenkörper des Polynomringes $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann gilt:

(i) $\{T_1, \ldots, T_n\}$ ist eine Transzendenzbasis für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$.
(ii) Die Erweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$ ist rein transzendent.

Ist weiter $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine über $\mathbb{K}$ algebraisch unabhängige Teilmenge, so erhält man einen Isomorphismus

$$\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n) \ \to \ \mathbb{K}(B), \qquad T_i \ \mapsto \ b_i.$$

Definition 7.1.3. Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Der *Körper der rationalen Funktionen* ist der Quotientenkörper $\mathbb{K}(X)$ des Ringes $\mathcal{O}(X)$ der globalen Funktionen.

Beispiel 7.1.4. Der Körper der rationalen Funktionen von $X = \mathbb{K}^n$ ist $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$.

Vereinbarung 7.1.5. Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Als Quotientenkörper der $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}(X)$ ist $\mathbb{K}(X)$ ebenfalls eine $\mathbb{K}$-Algebra. Wir fassen $\mathbb{K}$ vermöge $a \mapsto \frac{a}{1}$ als Unterkörper von $\mathbb{K}(X)$ auf.

Definition 7.1.6. Es sei X eine affine Varietät.

(i) Ist X irreduzibel, so definiert man die *Dimension* von X als

$$\dim(X) \quad := \quad \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)).$$

(ii) Besitzt X die irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$, so setzt man

$$\dim(X) \quad := \quad \max_{i=1,\ldots,r} \dim(X_i).$$

Beispiel 7.1.7. Die affine Varietät besitzt $\mathbb{K}^n$ besitzt $\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$ als Funktionenkörper und besitzt somit die Dimension n.

Satz 7.1.8. *Es sei X eine affine Varietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist endlich.*
(ii) *Es gilt* $\dim(X) = 0$.

Beweis. Zur Implikation „(i)⇒(ii)". Es seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann ist jedes X_i einpunktig, denn andernfalls könnte man ein X_i als disjunkte Vereinigung echter abgeschlossener Teilmengen schreiben:

$$X_i \quad = \quad \{x_1\} \sqcup \{x_2, \ldots, x_s\}.$$

Es genügt also, zu zeigen, dass jede einpunktige affine Varietät $X = \{x\}$ die Dimension 0 besitzt. Offensichtlich gilt $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}$. Das impliziert $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}$, und wir erhalten $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) = 0$.

Zur Implikation „(ii)⇒(i)". Wir dürfen annehmen, dass X irreduzibel ist. Wegen $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) = 0$ ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(X)$ eine algebraische Erweiterung. Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt $\mathbb{K} = \mathbb{K}(X)$. Das impliziert $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}$. Da $\mathcal{O}_X(X)$ die Punkte von X trennt, muss X einpunktig sein. □

Satz 7.1.9. *Es seien X eine affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Untervarietät. Dann gilt* $\dim(Y) \le \dim(X)$.

Beweis. Zum Beweis der Aussage genügt es, den Fall, dass X und Y irreduzibel sind zu behandeln. Weiter dürfen wir annehmen, dass X und Y als algebraische Mengen in $\mathbb{K}^n$ gegeben sind. Dann gilt

$$\mathcal{O}_Y(Y) \;=\; \mathbb{K}[T_{1|Y}, \ldots, T_{n|Y}], \qquad \mathbb{K}(Y) \;=\; \mathbb{K}(T_{1|Y}, \ldots, T_{n|Y}).$$

Es sei nun $d := \dim(Y)$. Nach 4.1.10 besitzt die Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(Y)$ eine Transzendenzbasis der Form $\{T_{i_1|Y}, \ldots, T_{i_d|Y}\}$. Insbesondere erhalten wir für jedes $f \in \mathbb{K}[S_1, \ldots, S_d]$ die Implikation

$$f(T_{i_1}, \ldots, T_{i_d})_{|Y} \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad f \;=\; 0.$$

Damit ergibt sich, dass die Menge $\{T_{i_1|X}, \ldots, T_{i_d|X}\} \subseteq \mathbb{K}(X)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{K}$ ist. Folglich gilt $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) \ge d$. □

Satz 7.1.10 (Identitätssatz)**.** *Es seien X eine irreduzible affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Untervarietät. Gilt* $\dim(Y) = \dim(X)$*, so folgt* $Y = X$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraische Mengen in $\mathbb{K}^n$ sind, und dass Y irreduzibel ist. Es sei $d := \dim(Y) = \dim(X)$. Wie im Beweis des vorangehenden Satzes wählen wir eine Transzendenzbasis der Form $\{T_{i_1|Y}, \ldots, T_{i_d|Y}\}$ für die Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(Y)$. Die Menge $\{T_{i_1|X}, \ldots, T_{i_d|X}\} \subseteq \mathbb{K}(X)$ ist wieder algebraisch unabhängig und ist somit eine Transzendenzbasis für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(X)$.

Nehmen wir nun an, es gelte $Y \neq X$. Dann gilt $I_X(Y) \neq \langle 0 \rangle$, und wir finden eine Funktion $0 \neq f \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $f \in I_X(Y)$. Die Menge $\{T_{i_1|X}, \ldots, T_{i_d|X}, f\} \subseteq \mathbb{K}(X)$ ist algebraisch abhängig über $\mathbb{K}$. Es gibt also auf X eine Gleichung

$$a_{k|X} f^k + \ldots + a_{1|X} f + a_{0|X} \quad = \quad 0$$

mit $a_i \in \mathbb{K}[T_{i_1}, \ldots, T_{i_d}]$. Da X irreduzibel ist, muss $\mathcal{O}_X(X)$ nullteilerfrei sein. Wegen $f \neq 0$ können wir also nach Ausklammern der niedrigsten Potenz von f in obiger

Gleichung annehmen, dass $a_{0|X} \neq 0$ gilt. Wegen $f \in I_X(Y)$ gilt dann $a_{0|X} \in I_X(Y)$. Das widerspricht der Tatsache, dass $\{T_{i_1|Y}, \ldots, T_{i_d|Y}\} \subseteq \mathbb{K}(Y)$ algebraisch unabhängig ist. $\square$

Definition 7.1.11. Man nennt eine affine Varietät X *rein k-dimensional*, wenn jede irreduzible Komponente von X die Dimension k besitzt.

Beispiel 7.1.12. Das Achsenkreuz $V(T_1T_2) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist rein eindimensional.

Satz 7.1.13. *Es sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein nicht konstantes Polynom. Dann ist $V(f) \subset \mathbb{K}^n$ rein $(n-1)$-dimensional.*

Erinnerung 7.1.14. Es sei R ein Integritätsring. Ein Element $0 \neq f \in R \setminus R^*$ nennt man *prim*, falls f keine Einheit in R ist und $f|ab$ stets $f|a$ oder $f|b$ impliziert. Ein Element $f \in R$ ist genau dann prim, wenn es ein Primideal in R erzeugt.

Man nennt einen Integritätsring R *faktoriell*, falls jede Nichteinheit $f \in R$ ein Produkt von Primelementen ist. In einem faktoriellen Ring R besitzt jedes $f \in R$ eine Darstellung mit paarweise nichtassoziierten Primelementen $p_1, \ldots, p_r \in R$:

$$f \quad = \quad p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}.$$

Bis auf Nummerierung und Assoziertheit sind die Primelemente p_i in dieser Darstellung eindeutig. Dabei nennt man zwei Elemente $g, h \in R$ *assoziiert*, wenn $g = ah$ mit einer Einheit $a \in R$ gilt.

Der Satz von Gauß besagt, das mit jedem faktoriellen Ring R auch der Polynomring $R[T]$ faktoriell ist. Als Folgerung erhält man, dass $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ faktoriell ist.

Lemma 7.1.15. *Es seien X eine irreduzible affine Varietät, $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$ paarweise nicht assoziierte Primelemente, und $f := f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r}$ mit $\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.*

(i) *Die irreduziblen Komponenten von $Y := V_X(f)$ sind gegeben als $Y_i := V_X(f_i)$, wobei $i = 1, \ldots, r$.*
(ii) *Das Verschwindungsideal $I_X(Y) \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ von $Y \subseteq X$ ist gegeben als $I_X(Y) = \langle f_1 \cdots f_r \rangle$.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt $I_X(Y_i) = \sqrt{\langle f_i \rangle}$. Da jedes f_i prim ist, gilt weiter $\sqrt{\langle f_i \rangle} = \langle f_i \rangle$. Insbesondere ist jedes Y_i irreduzibel. Offensichtlich haben wir

$$Y \;=\; V_X(f_1^{\nu_1} \ldots f_r^{\nu_r}) \;=\; V_X(f_1) \cup \ldots \cup V_X(f_r) \;=\; Y_1 \cup \ldots \cup Y_r.$$

Wir zeigen, dass $Y_i \not\subseteq Y_j$ gilt, falls $i \neq j$. Andernfalls hätte man $f_j \in \langle f_i \rangle$ für zwei verschiedene i, j. Widerspruch zu f_i, f_j nicht assoziierte Primelemente.

Es bleibt zu zeigen, dass $I_X(Y)$ von der Funktion $f_1 \cdots f_r$ erzeugt wird. Dazu sei $g \in I_X(Y)$. Dann gilt $g_{|Y_i} = 0$. Wie eben gesehen, gilt $I_X(Y_i) = \langle f_i \rangle$ und somit ist jedes f_i ein Teiler von g. Da die f_i paarweise nicht assoziiert sind, muss wird g durch $f_1 \cdots f_r$ geteilt. $\square$

Beweis von Satz 7.1.13. Da $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein faktorieller Ring ist, können wir f schreiben als $f = f_1^{\nu_1} \ldots f_r^{\nu_r}$ mit paarweise nicht assoziierten Primelementen $f_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Nach Lemma 7.1.15 sind $V(f_1), \ldots, V(f_r)$ die irreduziblen Komponenten von $V(f)$. Es ist zu zeigen, dass jedes $V(f_i)$ von der Dimension $n-1$ ist. Wir dürfen also von vorneherein annehmen, dass f prim ist.

Es seien $X := V(f)$ und $d = \dim(X)$. Satz 7.1.9 liefert $d \leq n$. Wegen $f \neq 0$ gilt $X \neq \mathbb{K}^n$. Mit Satz 7.1.10 erhalten wir daher $d < n$. Es ist also nur zu zeigen, dass

$d \geq n-1$ gilt. Dazu wählen wir $1 \leq j \leq n$, sodass die Variable T_j in f auftaucht. Wir betrachten die Menge

$$A \ := \ \{T_{1|X}, \ldots, T_{j-1|X}, T_{j+1|X}, \ldots, T_{n|X}\}.$$

Wir behaupten, dass A algebraisch unabhängig über $\mathbb{K}$ ist. Nehmen wir an, A sei algebraisch abhängig. Dann gibt es ein Polynom $g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, das nicht von der Variablen T_j abhängt und $g_{|X} = 0$ erfüllt.

Für dieses Polynom gilt $g \in I(X) = \langle f \rangle$. Als ist g von der Gestalt $g = hf$ mit einem Polynom h. Das widerspricht der Tatsache, dass g nicht von T_j abhängt. Folglich muss A algebraisch abhängig sein. Also folgt $d = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) \geq n-1$. □

Satz 7.1.16. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine rein $(n-1)$-dimensionale algebraische Teilmenge. Dann gilt $I(X) = \langle f \rangle$ mit einem $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass X irreduzibel ist. Dann ist das Verschwindungsideal $I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Primideal. Wegen $\dim(X) = n-1$ ist X eine echte Teilmenge von $\mathbb{K}^n$. Das impliziert $I(X) \neq \langle 0 \rangle$. Folglich gibt es ein Element $0 \neq g \in I(X)$. Da $I(X)$ prim ist, gibt es einen Primfaktor f von g mit $f \in I(X)$. Für diesen gilt

$$X \ \subseteq \ V(f), \qquad \dim(V(f)) \ = \ n-1 \ = \dim(X).$$

Dabei beruht die zweite Beobachtung auf Satz 7.1.13. Mit dem Identitätssatz 7.1.10 erhält man $X = V(f)$. Lemma 7.1.15 garantiert $I(X) = \langle f \rangle$.

Im allgemeinen Fall betrachten wir die Zerlegung $X = X_1, \ldots, X_r$ in irreduzible Komponenten. Nach den obigen Ausführungen gilt $I(X_i) = \langle f_i \rangle$ mit gewissen Primelementen $f_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Wegen $X_i \neq X_j$ für $i \neq j$ haben wir $\langle f_i \rangle \neq \langle f_j \rangle$ für $i \neq j$. Die $f_1, \ldots, f_r$ sind also paarweise nicht assoziert. Lemma 7.1.15 liefert somit $I(X) = \langle f_1 \cdots f_r \rangle$. □

Aufgaben zu Abschnitt 7.1.

Aufgabe 7.1.17. Es sei X eine irreduzible affine Varität, und es sei $f \in \mathcal{O}(X)$. Zeige: Es gilt $\dim(X_f) = \dim(X)$.

Aufgabe 7.1.18 (Halbstetigkeit der Dimension)**.** Es sei X eine affine Varietät mit den irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$. Für $x \in X$ setzen wir

$$\dim(X_x) \quad := \quad \max(\dim(X_i);\ 1 \le i \le r,\ x \in X_i).$$

Zeige: Die Funktion $X \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dim(X_x)$ ist halbstetig nach oben, d.h., jedes $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung $U \subseteq X$ mit $\dim(X_u) \le \dim(X_x)$ für alle $u \in U$.

Aufgabe 7.1.19. Bestimme den Körper der rationalen Funktionen und die Dimension der Neillschen Parabel $X = V(T_1^2 - T_2^3) \subseteq \mathbb{K}^2$.

Aufgabe 7.1.20. Es seien $\mathbb{T}^n := \mathbb{K}^n_{T_1 \cdots T_n}$, und es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{T}^n)$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $V_{\mathbb{T}^n}(f) = \emptyset$.
(ii) Es gilt $f = \alpha T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}$ mit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ und $\nu_i \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7.1.21. Es seien $f, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Polynome f und g sind teilerfremd.
(ii) Es gilt $\dim(V(f,g)) \le n - 2$.

Aufgabe 7.1.22. Es seien X und Y irreduzible affine Varietäten. Dann ist die Dimension des Produktes gegeben durch

$$\dim(X \times Y) \quad = \quad \dim(X) \ + \ \dim(Y).$$

7.2. **Morphismen.**

Erinnerung 7.2.1. Ein Morphismus affiner Varietäten X und Y ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$, die für jedes offene $V \subseteq Y$ einen Komorphismus induziert:

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(V) \ \to \ \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)), \qquad g \ \mapsto \ g \circ \varphi.$$

Die Morphismen affiner Varietäten entsprechen den Homomorphismen ihrer Ringe globaler Funktionen: Der Antiäquivalenzsatz liefert eine Bijektion

$$\mathrm{Mor}(X, Y) \ \to \ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)), \qquad \varphi \ \mapsto \varphi^*.$$

Sind $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen, so sind die Morphismen $\varphi\colon X \to Y$ genau die Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Satz 7.2.2. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten, und es sei $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ der zugehörige Komorphismus.*

(i) *Ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ ein Ideal, und $B := V_Y(\mathfrak{b})$ die zugehörige abgeschlossene Teilmenge, so gilt*

$$\varphi^{-1}(B) \ = \ V_X(\langle \varphi^*(\mathfrak{b})\rangle), \qquad I_X(\varphi^{-1}(B)) \ = \ \sqrt{\langle \varphi^*(\mathfrak{b})\rangle}.$$

(ii) *Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ein Ideal, und $A := V_X(\mathfrak{a})$ die zugehörige abgeschlossene Teilmenge, so gilt*

$$\overline{\varphi(A)} \ = \ V_Y\left((\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{a})\right), \qquad I_Y(\varphi(A)) \ = \ (\varphi^*)^{-1}(I_X(A)).$$

Beweis. Aussage (i) lässt sich leicht direkt nachweisen: Für jeden Punkt $x \in X$ haben wir

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}(B) \quad &\iff \quad \varphi(x) \in B \\ &\iff \quad g(\varphi(x)) = 0 \text{ für alle } g \in \mathfrak{b} \\ &\iff \quad f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \varphi^*(\mathfrak{b}) \\ &\iff \quad x \in V_X(\langle \varphi^*(\mathfrak{b})\rangle). \end{aligned}$$

Zu (ii): Wir zeigen zunächst, dass $I_Y(\varphi(A)) = (\varphi^*)^{-1}(I_X(A))$ gilt: Für jedes $g \in \mathcal{O}(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} g \in I_Y(\varphi(A)) \quad &\iff \quad g(\varphi(x)) = 0 \text{ für alle } x \in A \\ &\iff \quad \varphi^*(g) \in I_X(A) \\ &\iff \quad g \in (\varphi^*)^{-1}(I_X(A)). \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun mit

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(A)} \quad &= \quad V_Y(I_Y(\varphi(A))) \\ &= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(I_X(A))) \\ &= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(\sqrt{\mathfrak{a}})) \\ &= \quad V_Y(\sqrt{(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{a})}) \\ &= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{a})). \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.2.3. Das Bild der Hyperbel $V(T_1T_2 - 1) \subseteq \mathbb{K}^2$ unter der Projektion $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1$ ist genau $\mathbb{K}^*$ und ist somit nicht abgeschlossen in $\mathbb{K}$.

Folgerung 7.2.4. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten, und für $y \in Y$ sei $X_y := \varphi^{-1}(y)$ die zugehörige Faser. Dann ist X_y eine abgeschlossene Untervarietät von X, und es gilt*

$$\mathcal{O}(X_y) \ = \ \mathcal{O}(X)/\sqrt{\langle \varphi^*(\mathfrak{m}_y)\rangle}.$$

Definition 7.2.5. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ affiner Varietäten heisst *abgeschlossene Einbettung*, falls das Bild $\varphi(X)$ abgeschlossen in Y ist und φ einen Isomorphismus von X auf die abgeschlossene Untervarietät $\varphi(X) \subseteq Y$ definiert.

Satz 7.2.6. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten mit Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\varphi\colon X \to Y$ ist eine abgeschlossene Einbettung.*
(ii) *$\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ ist surjektiv.*

Beweis. Zur Implikation "(i)⇒(ii)". Nach Voraussetzung ist $B := \varphi(X)$ abgeschlossen in Y. Nach dem Einschränkungslemma 5.3.14 hat man kanonische Morphismen

$$\imath\colon B \to Y,\ y \mapsto\ y, \qquad \psi\colon X\ \to\ B,\ x\ \mapsto\ \varphi(x).$$

Nach Satz 5.4.5 ist $\imath^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(B)$ surjektiv. Weiter ist $\psi^*\colon \mathcal{O}(B) \to \mathcal{O}(X)$ ein Isomorphismus, da $\psi\colon X \to B$ nach Voraussetzung ein Isomorphismus ist. Folglich ist $\varphi^* = \psi^* \circ \imath^*$ surjektiv.

Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Es seien $\mathfrak{b} := \mathrm{Kern}(\varphi^*)$ und $B := V_Y(\mathfrak{b})$. Mit Satz 7.2.2 ergibt sich

$$\varphi(X)\ \subseteq\ V_Y((\varphi^*)^{-1}(I_X(X)))\ =\ V_Y((\varphi^*)^{-1}(\langle 0\rangle))\ =\ B.$$

Damit können wir wiederum das Einschränkungslemma 5.3.14 anwenden und erhalten kanonische Morphismen

$$\imath\colon B \to Y,\ y \mapsto\ y, \qquad \psi\colon X\ \to\ B,\ x\ \mapsto\ \varphi(x).$$

Nach Satz 5.4.5 ist der Komorphismus $\imath^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(B)$ surjektiv, und zusammen mit dem Hilbertschen Nullstellensatz liefert Satz 5.4.5 weiter

$$\mathrm{Kern}(\imath^*)\ =\ I_Y(B)\ =\ \sqrt{\mathfrak{b}}\ =\ \{g \in \mathcal{O}(Y); g^r\circ\varphi = 0\}\ =\ \{g \in \mathcal{O}(Y); g\circ\varphi = 0\}\ =\ \mathfrak{b}.$$

Nach Voraussetzung ist φ^* surjektiv; weiter haben wir $\varphi^* = \psi^* \circ \imath^*$ und, wie eben gesehen $\mathrm{Kern}(\varphi^*) = \mathrm{Kern}(\imath^*)$. Folglich ist ψ^* ein Isomorphismus. Nach dem Antiäquivalenzsatz ist damit auch ψ ein Isomorphismus. □

Definition 7.2.7. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ affiner Varietäten heißt *dominant*, falls sein Bild $\varphi(X)$ dicht in Y liegt.

Satz 7.2.8. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein beliebiger Morphismus affiner Varietäten. Dann gibt es eine Zerlegung $\varphi = \imath \circ \psi$ mit einem dominanten Morphismus $\psi\colon X \to Z$ und einer abgeschlossenen Einbettung $\imath\colon Z \to Y$.*

Beweis. Man setze $Z := \overline{\varphi(X)} \subset Y$, definiere $\imath\colon Z \to Y$ als die Inklusion und $\psi\colon X \to Z$ durch $x \mapsto \varphi(x)$. □

Satz 7.2.9. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ ist dominant.*
(ii) *Der Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ ist injektiv.*

Beweis. Die Äquivalenz der beiden Aussagen (i) und (ii) ist eine einfache Anwendung von Satz 7.2.2 (ii). Danach gilt

$$\overline{\varphi(X)}\ =\ V_Y((\varphi^*)^{-1}(I_X(X)))\ =\ V_Y(\ker(\varphi^*)).$$

□

Folgerung 7.2.10. *Jeder dominante Morphismus* $\varphi\colon X \to Y$ *irreduzibler affiner Varietäten definiert einen Monomorphismus der zugehörigen Funktionenkörper*

$$\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \ \to\ \mathbb{K}(X), \qquad \frac{g}{h} \ \mapsto\ \frac{\varphi^*(g)}{\varphi^*(h)}.$$

Dabei ist φ^* *Homomorphismus von* $\mathbb{K}$*-Algebren bezüglich der kanonischen Strukturhomomorphismen.*

Satz 7.2.11. *Es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *ein dominanter Morphismus affiner Varietäten. Dann gilt* $\dim(X) \geq \dim(Y)$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass X und Y irreduzibel sind. Satz 7.2.9 liefert dann eine Körpererweiterung $\mathbb{K}(Y) \cong \varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \subseteq \mathbb{K}(X)$. Damit folgt die Behauptung: Es gilt

$$\dim(Y) \ =\ \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y)) \ \leq\ \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) \ =\ \dim(X).$$

Wir kommen zum allgemeinen Fall. Es sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gilt

$$Y \ =\ \overline{\varphi(X)} \ =\ \overline{\varphi(X_1)} \cup \ldots \cup \overline{\varphi(X_n)}.$$

Als Bild eines irreduziblen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist jedes $\varphi(X_i)$ irreduzibel. Somit ist auch jeder Abschluss $\overline{\varphi(X_i)}$ irreduzibel.

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Komponenten, tauchen die irreduziblen Komponenten von Y unter den $\overline{\varphi(X_i)}$ auf. Insbesondere finden wir eine irreduzible Komponente $Y_0 = \overline{\varphi(X_i)}$ maximaler Dimension. Mit Fall 1 folgt

$$\dim(X) \ \geq\ \dim(X_i) \ \geq\ \dim(Y_0) \ =\ \dim(Y).$$

□

Definition 7.2.12. Ein dominanter Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ irreduzibler affiner Varietäten heißt *birational*, falls $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 7.2.13. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein birationaler Morphismus irreduzibler affiner Varietäten. Dann gilt $\dim(X) = \dim(Y)$.

Beispiel 7.2.14. Der Morphismus $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 z_2, z_2)$ ist birational, aber kein Isomorphismus.

Bemerkung 7.2.15. Es seien X eine irreduzible affine Varietät und $X_f \subseteq X$ eine Hauptmenge. Dann ist die Inklusion $\imath\colon X_f \to X$ ein birationaler Morphismus und man hat den kanonischen Isomorphismus

$$\imath^*\colon \mathbb{K}(X) \ \to\ \mathbb{K}(X_f), \qquad \frac{g}{h} \ \mapsto\ \frac{\frac{g}{1}}{\frac{h}{1}}.$$

Der zugehörige Umkehrhomomorphismus ist gegeben durch

$$\mathbb{K}(X_f) \ \to\ \mathbb{K}(X), \qquad \frac{\frac{g}{f^n}}{\frac{h}{f^m}} \ \mapsto\ \frac{gf^m}{hf^n}.$$

Satz 7.2.16. *Es seien* X *und* Y *irreduzible affine Varietäten, und es seien* $\mathbb{K}(X)$ *sowie* $\mathbb{K}(Y)$ *die zugehörigen Funktionenkörper.*

(i) *Ist* $\psi\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ *ein* $\mathbb{K}$*-Algebrenhomomorphismus, so gibt es eine Hauptmenge* $X_f \subseteq X$ *und einen dominanten Morphismus* $\varphi\colon X_f \to Y$ *mit* $\varphi^* = \psi$.

(ii) *Ist* $\psi\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ *ein* $\mathbb{K}$*-Algebrenisomorphismus, so gibt es Hauptmengen* $X_f \subseteq X$ *sowie* $Y_g \subseteq Y$ *und einen Isomorphismus* $\varphi\colon X_f \to Y_g$ *mit* $\varphi^* = \psi$.

(iii) *Ist* $\varphi\colon X \to Y$ *ein birationaler Morphismus, so gibt es eine Hauptmenge* $Y_g \subseteq Y$*, sodass man einen Isomorphismus erhält:*

$$X_{\varphi^*(g)} = \varphi^{-1}(Y_g) \;\to\; Y_g, \qquad x \;\mapsto\; \varphi(x).$$

Beweis. Zu (i). Es seien $g_1, \ldots, g_s$ Erzeugende für $\mathcal{O}(Y)$. Dann ist jedes $\psi(g_i)$ von der Gestalt h_i/f_i mit $h_i, f_i \in \mathcal{O}(X)$. Also erhalten wir mit $f := f_1 \cdots f_s$ einen $\mathbb{K}$-Algebrenmonomorphismus

$$\mathcal{O}(Y) \;\to\; \mathcal{O}(X)_f, \qquad g \;\mapsto \psi(g)$$

Dieser ist nach dem Antiäquivalenzsatz Komorphismus eines dominanten Morphismus $\varphi\colon X_f \to Y$. Nach Konstruktion besitzt $\varphi\colon X_f \to Y$ die gewünschte Eigenschaft.

Zu (ii) und (iii). In der Situation von (ii) dürfen wir nach (i) annehmen, dass es einen birationalen Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ mit $\varphi^* = \psi$ gibt. In der Situation von (iii) setzen wir $\psi := \varphi^*$.

Es seien $f_1, \ldots, f_r$ Erzeugende für $\mathcal{O}(X)$. Dann gilt $f_i = \varphi^*(h_i)/\varphi^*(g_i)$ mit gewissen $g_i, h_i \in \mathcal{O}(Y)$. Mit $g := g_1 \cdots g_r$ erhalten wir also einen Monomorphismus

$$\psi_0 := \psi_{|\mathcal{O}(Y)_g}\colon \mathcal{O}(Y)_g \;\to\; \mathcal{O}(X)_{\varphi*(g)}.$$

Dieser ist surjektiv, da die Erzeugenden $1/\varphi^*(g)$ und $f_1, \ldots, f_r$ von $\mathcal{O}(X)_{\varphi^*(g)}$ in seinem Bild enthalten sind.

Nach Konstruktion gilt $\psi_0 = \varphi_0^*$ für die Einschränkung φ_0 von φ auf $X_{\varphi*(g)}$. Da ψ_0 ein Isomorphismus ist, muss dies nach dem Antiäquivalenzsatz auch für $\varphi_0\colon X_{\varphi*(g)} \to Y_g$ gelten. □

Bemerkung 7.2.17. Es sei X eine irreduzible affine Varietät der Dimension n. Unter einer *Parametrisierung* von X versteht man einen Isomorphismus $W \to U$ von einer offenen Teilmenge $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{K}^n$ auf eine offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq X$. Satz 7.2.16 (ii) besagt, dass X genau dann eine Parametrisierung erlaubt, wenn der Funktionenkörper $\mathbb{K}(X)$ als $\mathbb{K}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$ ist; man nennt die affine Varietät X in diesem Fall auch *rational*.

Aufgaben zu Abschnitt 7.2.

Aufgabe 7.2.18. Es sei X eine affine Varietät. Zeige: Man hat eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Mor}(X, \mathbb{K}^n) \ \to \ \mathcal{O}(X)^n, \qquad \varphi \ \mapsto \ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Aufgabe 7.2.19. Zeige, dass Aussage 7.2.2 (ii) ohne die Voraussetzung "$\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen" im allgemeinen nicht stimmt. Betrachte dazu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $X = Y = \mathbb{K}$ sowie $\varphi\colon X \to Y$, $x \mapsto x^2$ und das Ideal $\mathfrak{a} = \langle T^2 + 1 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$.

Aufgabe 7.2.20. Es seien Polynome $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Betrachte den Morphismus

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \ \to \ \mathbb{K}^m, \qquad z \ \mapsto \ (f_1(z), \ldots, f_s(z)).$$

Weiter sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und es sei $I(X) = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ mit $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Betrachte das Ideal

$$J \ := \ \langle S_1 - f_1, \ldots, S_m - f_m, g_1, \ldots, g_r \rangle \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m].$$

Zeige, dass $I(\varphi(X))$ der Durchschnitt von J mit der Unteralgebra $\mathbb{K}[S_1, \ldots, S_m]$ von $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$ ist.

Aufgabe 7.2.21. Gibt es einen

(i) nichtkonstanten Morphismus $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$,
(ii) surjektiven Morphismus $\psi\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$?

Aufgabe 7.2.22. Es sei X eine affine Varietät, und es seien $f_1, \ldots, f_n$ Erzeugende der $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}(X)$. Zeige: Man hat eine abgeschlossene Einbettung

$$X \ \to \ \mathbb{K}^n, \qquad x \ \mapsto \ (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Aufgabe 7.2.23. Bestimme Anzahl der irreduziblen Komponenten und den Ring der globalen Funktionen für jede Faser der folgenden Morphismen:

(i) $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $(z, w) \mapsto zw$,
(ii) $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(z, w) \mapsto (zw, w)$.

Aufgabe 7.2.24. Betrachte $X := Y := \mathbb{K}^2$ und den Morphismus $\varphi\colon X \to Y$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 z_2, z_2)$.

(i) Bestimme für jedes $w \in Y$ die Dimension der Faser $\varphi^{-1}(w)$ (setze $\dim(\emptyset) := -1$).
(ii) Zeige, dass φ birational aber kein Isomorphismus ist.
(iii) Zeige: Für $g\colon w \mapsto w_1/w_2$ gilt $g \in \mathbb{K}(Y) \setminus \mathcal{O}(Y)$ aber $\varphi^*(g) \in \mathcal{O}(X)$.

Aufgabe 7.2.25. Der Morphismus $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z^2$ bildet eine eindimensionale affine Varietät auf sich selbst ab. Zeige, dass er nicht birational ist.

Aufgabe 7.2.26 (Identitätssatz)**.** Es seien $\varphi, \psi\colon X \to Y$ Morphismen affiner Varietäten. Weiter sei $x \in X$ mit $\varphi(x) = \psi(x) =: y$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Auf jeder irreduziblen Komponente $X_0 \subseteq X$ mit $x \in X_0$ stimmen die Abbildungen φ und ψ überein.
(ii) Die beiden Abbildungen $\varphi_x^*\colon \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$, $g_y \mapsto (\varphi^*(g))_x$ und $\psi_x^*\colon \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$, $g_y \mapsto (\psi^*(g))_x$ stimmen überein.

7.3. **Ganze Ringerweiterungen.**

Definition 7.3.1. Es sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung mit K1-Ringen R und S. Ein Element $s \in S$ heißt *ganz* über R, falls es Nullstelle eines nichtkonstanten normierten Polynoms aus $R[T]$ ist, d.h., falls

$$s^k + r_{k-1}s^{k-1} + \ldots + r_1 s + r_0 \quad = \quad 0$$

mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und Elementen $r_i \in R$ existiert; die obige Gleichung nennt man dann auch eine *Ganzheitsgleichung* für s über R. Man nennt die Ringerweiterung $R \subseteq S$ *ganz*, falls jedes Element $s \in S$ ganz über R ist.

Bemerkung 7.3.2. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweitwerung, und es sei $a \in \mathbb{L}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) Das Element a ist ganz über $\mathbb{K}$.
(ii) Das Element a ist algebraisch über $\mathbb{K}$.

Satz 7.3.3. *Es sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von K1-Ringen, und es gelte $S = R[s_1, \ldots, s_n]$ mit Elementen $s_i \in S$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Ringerweiterung $R \subseteq S$ ist ganz.*
(ii) *Die Elemente $s_1, \ldots, s_n$ sind ganz über R.*
(iii) *S ist ein endlich erzeugter R-Modul.*

Lemma 7.3.4. *Es seien R ein K1-Ring, A eine $(m \times m)$-Matrix über R und $v \in R^m$. Gilt $Av = 0$, so gilt $\det(A)v_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Nach der Cramerschen Regel gibt es eine Matrix $\widetilde{A} \in \mathrm{Mat}(m, m, R)$ mit $\widetilde{A}A = \det(A)E_m$. Wendet man diese Matrix auf die Gleichung $Av = 0$ an, so ergibt sich die Behauptung. □

Beweis von Satz 7.3.3. Die Implikation „(i)⇒(ii)“ ist trivial. Zu „(ii)⇒(iii)“. Jedes der Elemente $s_1, \ldots, s_n$ erfüllt eine Ganzheitsgleichung der Form

$$s_i^{k_i} + r_{i,k-1}s_i^{k_i-1} + \ldots + r_{i,1}s_i + r_{i,0} \;=\; 0 \qquad \text{mit } r_{i,j} \in R.$$

Wir zeigen, dass S als R-Modul von den Elementen $s_1^{l_1} \cdots s_n^{l_n}$, wobei $l_i \leq k_i$, erzeugt wird. Dazu sei $s \in S$. Wegen $S = R[s_1, \ldots, s_n]$ hat man eine Darstellung

$$s \;=\; \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu s_1^{\nu_1} \ldots s_n^{\nu_n}, \qquad \text{mit } a_\nu \in R.$$

Wiederholtes Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste liefert eine Darstellung von s als R-Linearkombination der Elemente $s_1^{l_1} \cdots s_n^{l_n}$ mit $l_i \leq k_i$.

Zu „(iii)⇒(i)“. Es sei $S = Rv_1 + \ldots + Rv_m$ mit $v_i \in S$. Zu gegebenem $s \in S$ müssen wir eine Ganzheitsgleichung über R finden. Dazu verwenden wir Darstellungen

$$sv_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} b_{ij}v_j, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Mit $v := (v_1, \ldots, v_m) \in S^m$ und der Matrix $B := (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ können wir das obige Gleichungssystem schreiben als:

$$(sE_n - B)v \quad = \quad 0.$$

Lemma 7.3.4 liefert $\det(A)v_i = 0$ für $A := sE_n - B$. Das impliziert $\det(A)s = 0$. Damit erhalten wir eine Ganzheitsgleichung für s über R. □

Sprechweise 7.3.5. Ist $R \subseteq S$ eine endlich erzeugte ganze Ringerweiterung, so nennt man sie auch *endlich* bzw. man spricht von S als einer *endlichen R-Algebra.*

Lemma 7.3.6. *Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von K1-Ringen. Dann gilt*

(i) *Ist $\mathfrak{b} \subseteq S$ ein Ideal, so ist $R/(R \cap \mathfrak{b}) \subseteq S/\mathfrak{b}$ eine ganze Ringerweiterung.*
(ii) *Ist $U \subseteq R$ ein multiplikatives Monoid, so ist $U^{-1}R \subseteq U^{-1}S$ eine ganze Ringerweiterung.*

Beweis. Zu (i): Es sei $s + \mathfrak{b} \in S/\mathfrak{b}$ gegeben. Dann gibt es ein normiertes Polynom $f \in R[T]$ mit $f(s) = 0$. Das durch f bestimmte Polynom $\overline{f} \in R/(R \cap \mathfrak{b})[T]$ liefert die gesuchte Ganzheitsgleichung für $s + \mathfrak{b}$.

Zu (ii): Es sei ein Element $s/r \in U^{-1}S$ gegeben. Dann erfüllt s eine Ganzheitsgleichung

$$s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \quad = \quad 0$$

mit Elementen $a_i \in R$. Die gesuchte Ganzheitsgleichung für s/r ergibt sich durch Multiplikation $1/r^k$:

$$\left(\frac{s}{r}\right)^k + \frac{a_{k-1}}{r}\left(\frac{s}{r}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{a_1}{r^{k-1}}\frac{s}{r} + \frac{a_0}{r^k} \quad = \quad 0.$$

□

Lemma 7.3.7. *Es sei $R \subseteq S$ eine endlich erzeugte ganze Erweiterung von Integritätsringen. Dann ist $Q(R) \subseteq Q(S)$ eine endlich erzeugte algebraische Körpererweiterung und somit von endlichem Grad.*

Beweis. Es sei $S = R[s_1, \ldots, s_n]$ mit Elementen $s_i \in S$. Dann erhält man für die zugehörigen Quotientenkörper

$$Q(S) \quad = \quad Q(R)\left(\frac{s_1}{1}, \ldots, \frac{s_n}{1}\right).$$

Jedes s_i erfüllt eine Ganzheitsgleichung über R und somit ist $s_i/1$ algebraisch über $Q(R)$. Nach Satz 4.1.2 (ii) ist $Q(R) \subseteq Q(S)$ algebraisch und endlich. □

Lemma 7.3.8. *Es sei S ein Integritätsring, und es sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist ein Körper.*
(ii) *S ist ein Körper.*

Beweis. Zu „(i)⇒(ii)“. Es sei $0 \neq s \in S$ gegeben. Wir müssen ein multiplikatives Inverses finden. Dazu betrachten wir eine Ganzheitsgleichung

$$s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \quad = \quad 0$$

mit minimalem k. Da S ein Integritätsring ist, muss dabei $a_0 \neq 0$ gelten. Also entnehmen wir das Inverse zu s der Gleichung

$$-a_0^{-1}(s^{k-1} + a_{k-1}s^{k-2} + \ldots + a_1)s \quad = \quad 1.$$

Zu „(ii)⇒(i)“. Es sei $0 \neq r \in R$. Da S ein Körper ist, gibt es ein $s \in S$ mit $sr = 1$. Für dieses s gilt eine Ganzheitsgleichung

$$s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \quad = \quad 0.$$

Damit erhalten wir $s \in R$, denn Multiplizieren der Gleichung mit r^{k-1} ergibt

$$s \quad = \quad -a_{k-1} - a_{k-2}r - \ldots - a_1 r^{k-2} - a_0 r^{k-1}.$$

□

Satz 7.3.9 (Going-Up-Theorem)**.** *Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt:*

(i) *Zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq S$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$.*
(ii) *Zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \subseteq S$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap R$.*

Beweis. Es sei $U := R \setminus \mathfrak{p}$. Dies ist sowohl in R als auch in S ein multiplikatives System, und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "\alpha", "r\mapsto \frac{r}{1}"'] & S \arrow[d, "\beta"', "s\mapsto\frac{s}{1}"] \\ U^{-1}R \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & U^{-1}S \end{tikzcd}$$

Nach Lemma 7.3.6 (ii) ist dabei $U^{-1}R \subseteq U^{-1}S$ eine ganze Ringerweiterung. Wir wählen ein beliebiges maximales Ideal $\mathfrak{b} \subseteq U^{-1}S$ und betrachten das Ideal $\mathfrak{a} := U^{-1}R \cap \mathfrak{b}$ in $U^{-1}R$. Lemma 7.3.6 (i) liefert eine ganze Ringerweiterung

$$U^{-1}R/\mathfrak{a} \quad \subseteq \quad U^{-1}S/\mathfrak{b}.$$

Nach Lemma 7.3.8 ist $U^{-1}R/\mathfrak{a}$ ein Körper. Insbesondere muss $\mathfrak{a}$ das maximale Ideal des lokalen Ringes $U^{-1}R = R_{\mathfrak{p}}$ sein, siehe Satz 5.1.17. Weiter ist $\mathfrak{q} := \beta^{-1}(\mathfrak{b})$ als Urbild eines Primideales unter dem Ringhomomorphismus β wieder ein Primideal, und es gilt

$$\mathfrak{q} \cap R \;=\; \alpha^{-1}(\mathfrak{a}) \;=\; \mathfrak{p}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathfrak{q}$ maximal ist, falls $\mathfrak{p}$ dies ist. Dazu betrachten wir die nach Lemma 7.3.6 (i) ganze Ringerweiterung $R/\mathfrak{p} \subseteq S/\mathfrak{q}$. Mit Lemma 7.3.8 sehen wir, dass $S/\mathfrak{q}$ ein Körper ist. Folglich muss $\mathfrak{q} \subseteq S$ ein maximales Ideal sein. □

Definition 7.3.10. Es sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Der *ganze Abschluss* von R in S ist die Menge

$$\overline{R} \quad := \quad \{s \in S;\ s \text{ ist ganz über } R\}.$$

Der Unterring $R \subseteq S$ heisst *ganz abgeschlossen* in S, falls er mit seinem ganzen Abschluss in S übereinstimmt.

Satz 7.3.11. *E sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Dann ist der ganze Abschluss $\overline{R} \subseteq S$ ein Unterring von S.*

Beweis. Es seien Elemente $s, s' \in \overline{R}$ gegeben. Satz 7.3.3 besagt, dass dann $R \subseteq R[s, s']$ eine ganze Ringerweiterung ist. Insbesondere sind $s \pm s'$ und ss' ganz über R und gehören somit zu $\overline{R}$. □

Definition 7.3.12. Ein Integritätsring R heißt *normal*, falls R ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Satz 7.3.13. *Jeder faktorielle Ring ist normal.*

Beweis. Es sei R ein faktorieller Ring, und es sei $p/q \in Q(R)$ ganz über R. Wir dürfen annehmen, dass p und q keine gemeinsamen Primfaktoren besitzen. Es sei

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

eine Ganzheitsgleichung für p/q. Durch Multplikation dieser Gleichung mit q^k erhalten wir

$$p^k = -q(a_{k-1}p^{k-1} + \ldots + a_1pq^{k-2} + a_0q^{k-1}).$$

Mit anderen Worten q teilt p^k. Dann muss q eine Einheit in R sein, und es ist $p/q \in R$. Folglich ist R ganz abgeschlossen in $Q(R)$. $\square$

Beispiel 7.3.14. (i) $\mathbb{Z}$ ist ein normaler Ring.
(ii) $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist ein normaler Ring.

Aufgaben zu Abschnitt 7.3.

Aufgabe 7.3.15. Es seien $R \subseteq S$ und $S \subseteq T$ ganze Ringerweiterungen. Zeige, dass dann auch $R \subseteq T$ eine ganze Ringerweiterung ist.

Aufgabe 7.3.16. Es seien $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $\mathfrak{P} \subseteq S$ das von $\mathfrak{p}$ in S erzeugte Ideal. Zeige: Es gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$.

Aufgabe 7.3.17. Es sei $X = V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$. Zeige: Der Koordinatenring $\mathbb{K}[X]$ ist nicht normal.

7.4. Das Noethersche Normalisierungslemma.

Definition 7.4.1. Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ affiner Varietäten heisst *endlich*, falls $\mathcal{O}(X)$ ein endllich erzeugter Modul über $\varphi^*(\mathcal{O}(Y))$ ist.

Beispiel 7.4.2.
(i) Für jede affine Varietät X ist die Identität $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ein endlicher Morphismus.
(ii) Jede abgeschlossene Einbettung $\varphi\colon X \to Y$ affiner Varietäten ist ein endlicher Morphismus.
(iii) Die Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z^2$ ist ein endlicher Morphismus.

Satz 7.4.3. *Ist $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter endlicher Morphismus irreduzibler affiner Varietäten, so ist $\varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \subseteq \mathbb{K}(X)$ eine algebraische Körpererweiterung von endlichem Grad, und es gilt $\dim(X) = \dim(Y)$.*

Beweis. Da φ dominant ist, haben wir einen Isomorphismus von Algebren gefolgt von einer endlichen Ringerweiterung, siehe Satz 7.2.9:

$$\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\varphi^*} \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \quad \subseteq \quad \mathcal{O}(X).$$

Übergang zum Quotientenkörper macht daraus einen Körperisomorphismus gefolgt von einer algebraischen Erweiterung endlichen Grades, siehe Lemma 7.3.7:

$$\mathbb{K}(Y) \xrightarrow{\varphi^*} \varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \quad \subseteq \quad \mathbb{K}(X).$$

Das beweist die erste Aussage. Die Gleichheit der Dimensionen von X und Y ergibt sich aus der Tatsache, dass $\varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \subseteq \mathbb{K}(X)$ algebraisch ist:

$$\dim(Y) \;=\; \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y)) \;=\; \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\varphi^*(\mathbb{K}(Y))) \;=\; \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) \;=\; \dim(X).$$

□

Satz 7.4.4. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphsimus affiner Varietäten. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch das Bild $\varphi(A) \subseteq Y$ abgeschlossen und die Einschränkung $\varphi|_A\colon A \to \varphi(A)$ ist ein endlicher Morphismus.*

Beweis. Es sei $B := \overline{\varphi(A)}$ der Abschluss des Bildes. Nach dem Einschränkungslemma 5.3.14 haben wir einen Morphismus $\psi := \varphi_{|A}\colon A \to B$. Der zugehörige Komorphismus $\psi^*\colon \mathcal{O}(B) \to \mathcal{O}(A)$ passt in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X) \arrow[d] & \supseteq & \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) & \mathcal{O}(Y) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[d] \\
\mathcal{O}(X)/I_X(A) \arrow[d, "\cong"'] & \supseteq & \varphi^*(\mathcal{O}(Y))/\varphi^*(I_Y(B)) & \mathcal{O}(Y)/I_Y(B) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{O}(A) & \supseteq & \psi^*(\mathcal{O}(B)) & \mathcal{O}(B) \arrow[l, "\psi^*"]
\end{tikzcd}$$

Da $\psi\colon A \to B$ dominant ist, muss $\psi^*\colon \mathcal{O}(B) \to \mathcal{O}(A)$ injektiv sein, siehe Satz 7.2.9. Wir zeigen nun, dass $\psi\colon A \to B$ endlich ist. Die Ringerweiterung "$\supseteq$" in der oberen Zeile des Diagramms ist nach Voraussetzung endlich. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^*(I_Y(B)) &= \{\varphi^*(g);\ g \in I_Y(B)\} \\
&= \{g \circ \varphi;\ g \in \mathcal{O}(Y),\ g_{|\varphi(A)} = 0\} \\
&= \{f \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y));\ \ f_{|A} = 0\} \\
&= \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \cap I_X(A).
\end{aligned}$$

Damit ist nach Lemma 7.3.6 die Ringerweiterung "$\supseteq$" in der mittleren Zeile des Diagramms endlich. Es folgt, dass $\psi^*(\mathcal{O}(B)) \subseteq \mathcal{O}(A)$ endlich ist. Also ist $\psi\colon A \to B$ ein endlicher Morphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass $\psi\colon A \to B$ surjektiv ist. Dazu sei ein Punkt $y \in B$ gegeben. Dann gilt

$$\psi^{-1}(y) \quad = \quad V_A(\langle \psi^*(\mathfrak{m}_y) \rangle).$$

Das Bild $\psi^*(\mathfrak{m}_y)$ ist ein maximales Ideal in $\psi^*(\mathcal{O}(B))$, da ψ^* injektiv ist. Das Going-Up-Theorem 7.3.9 liefert daher ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}(A)$ mit

$$\psi^*(\mathfrak{m}_y) \quad = \quad \psi^*(\mathcal{O}(B)) \ \cap \ \mathfrak{m}.$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist dieses Ideal von der Gestalt $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ mit einem $x \in A$. Wegen $\langle \psi^*(\mathfrak{m}_y) \rangle \subseteq \mathfrak{m}_x$ erhalten wir $x \in \psi^{-1}(y)$. □

Folgerung 7.4.5. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter endlicher Morphismus affiner Varietäten. Dann ist φ surjektiv, und es gilt* $\dim(X) = \dim(Y)$.

Beweis. Nach Satz 7.2.11 genügt es zu zeigen, dass $\dim(X) \le \dim(Y)$ gilt. Wir wählen eine irreduzible Komponente $X' \subseteq X$ von maximaler Dimension, d.h., mit $\dim(X') = \dim(X)$. Als Bild eines irreduziblen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist $Y' := \varphi(X')$ irreduzibel. Nach Satz 7.4.4 ist $\varphi|_{X'}\colon X' \to Y'$ ein endlicher Morphismus affiner Varietäten. Mit Satz 7.4.3 folgt

$$\dim(X) \ = \ \dim(X') \ = \ \dim(Y').$$

Für die abgeschlossene Untervarietät $Y' \subseteq Y$ erhalten wir schließlich mit Satz 7.1.9, dass $\dim(Y') \le \dim(Y)$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Folgerung 7.4.6. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus affiner Varietäten, und es seien $A' \subsetneq A \subset X$ abgeschlossene Teilmengen. Ist A irreduzibel, so gilt* $\varphi(A') \ne \varphi(A)$.

Beweis. Nach Satz 7.4.4 sind die beiden Einschränkungen $\varphi|_{A'}\colon A' \to \varphi(A')$ und $\varphi|_A\colon A \to \varphi(A)$ dominante endliche Morphismen. Satz 7.4.5 liefert

$$\dim(A') \ = \ \dim(\varphi(A')), \qquad \dim(A) = \dim(\varphi(A)).$$

Nach dem Identitätssatz 7.1.10 gilt $\dim(A') < \dim(A)$. Also gilt $\dim(\varphi(A')) < \dim(\varphi(A))$. Das beweist die Behauptung. □

Folgerung 7.4.7. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus affiner Varietäten. Dann ist jede Faser $\varphi^{-1}(y)$ höchstens endlich.*

Beweis. Es sei $y \in Y$ gegeben. Ist die Faser $\varphi^{-1}(y)$ nicht leer, so können wir sie in irreduzible Komponenten $A_1, \ldots, A_r$ zerlegen. Für jedes i wählen wir einen Punkt $a_i \in A_i$ und erhalten mit Satz 7.4.6, dass $A_i = \{a_i\}$ gelten muss. □

Sprechweise 7.4.8. Es sei $\psi\colon R \to S$ ein Homomorphismus von K1-Ringen. Ist S ein endlich erzeugter $\psi(R)$-Modul, so nennt man $\psi\colon R \to S$ auch einen *endlichen* Homomorphismus.

Satz 7.4.9 (Noethersches Normalisierungslemma)**.** *Ist R eine endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra, so gibt es einen endlichen Monomorphismus $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_d] \to R$.*

Folgerung 7.4.10 (Noethersches Normalisierungslemma, Version II)**.** *Ist X eine affine Varität, so gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus $X \to \mathbb{K}^d$.*

Beweis. Es sei $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_d] \to \mathcal{O}(X)$ wie in Satz 7.4.9. Dann ist der zugehörige Morphismus $X \to \mathbb{K}^d$ endlich, dominant, und somit auch surjektiv. Weiter gilt $d = \dim(X)$. □

Lemma 7.4.11. *Es sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom vom Grad d. Dann gibt es einen Automorphismus $\sigma\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, von $\mathbb{K}$-Algebren, sodass*

$$\sigma(f) \quad = \quad cT_n^d \ + \ \sum_{i=0}^{d-1} h_i(T_1, \ldots, T_{n-1})T_n^i$$

gilt mit $c \in \mathbb{K}^*$ und Polynomen $h_0, \ldots, h_{d-1} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$. Man kann σ dabei als Komorphismus einer invertierbaren linearen Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wählen.

Beweis. Es sei $f = f_d + \ldots + f_0$ die Zerlegung in homogene Polynome f_i vom Grad i. Wir betrachten das Leitpolynom f_d und schreiben es als

$$f_d \quad = \quad \sum_{j=0}^{d} f_{d,j} T_n^j$$

mit Polynomen $f_{d,j} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$, welche dann homogen vom Grad $d - j$ sind. Mindestens eines davon ist nicht trivial, und folglich ist

$$h \ := \ \sum_{j=0}^{d} f_{d,j} \ \in \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

nicht trivial. Wir wählen nun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ mit $h(\alpha) \neq 0$ und definieren einen Algebrenautomorphismus durch

$$\sigma\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \ \to \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n], \qquad T_i \ \mapsto \ \begin{cases} T_i + \alpha_i T_n & \text{für } 1 \le i \le n-1, \\ T_n & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Die Wohldefiniertheit ergibt sich direkt aus der universellen Eigenschaft des Polynomrings, und die Bijektivität sieht man durch Angabe der Umkehrabbildung:

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \ \to \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n], \qquad T_i \ \mapsto \ \begin{cases} T_i - \alpha_i T_n & \text{für } 1 \le i \le n-1, \\ T_n & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Der Automorphismus σ bildet homogene Polynome in homogene Polynome ab, und somit erhalten wir für das Bild von f unter σ:

$$\sigma(f)_d \ = \ \sigma(f_d) \ = \ \sigma\left(\sum_{j=0}^{d} f_{d,j} T_n^j\right) \ = \ \sum_{j=0}^{d} \sigma(f_{d,j}) T_n^j.$$

Indem man jedes $f_{d,j}$ als Linearkombination von Monomen schreibt, welche dann wie $f_{d,j}$ homogen vom Grad $d - j$ sind, erhält man durch explizite Rechnung eine Darstellung

$$\begin{aligned} \sigma(f_{d,j})(T_1, \ldots, T_n) \quad &= \quad f_{d,j}(T_1 + \alpha_1 T_n, \ldots, T_{n-1} + \alpha_{n-1} T_n) \\ &= \quad f_{d,j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) T_n^{d-j} + \sum_{k=0}^{d-j-1} h_{d,j,k}(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^k. \end{aligned}$$

mit geeigneten $h_{d,j,k} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$. Aufsummieren über j ergibt für das Leitpolynom von $\sigma(f)$ eine Darstellung:

$$
\begin{aligned}
\sigma(f)_d &= \left(\sum_{j=0}^{d} f_{d,j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \right) T_n^d \ + \ \sum_{j=0}^{d-1} h_{d,j}(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^j \\
&= h(\alpha) T_n^d \ + \ \sum_{j=0}^{d-1} h_{d,j}(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^j
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $h_{d,j} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$. Geht man damit in die Zerlegung $\sigma(f) = \sigma(f)_d + \ldots + \sigma(f)_0$, so ergibt sich die gewünschte Darstellung für $\sigma(f)$. $\square$

Lemma 7.4.12. *Es seien S ein Integritätsring und $f = c_d T^d + \ldots c_1 T + c_0 \in S[T]$ ein Polynom mit $c_d \in S^*$. Dann gilt:*

(i) *Jedes Polynom $g \in S[T]$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung*

$$g \ = \ qf + h, \qquad \text{mit } q, h \in S[T], \ \deg(h) < d = \deg(f).$$

(ii) *Man hat einen kanonischen Isomorphismus von S-Moduln*

$$S^d \ \to \ S[T]/\langle f \rangle, \qquad (s_0, \ldots, s_{d-1}) \ \mapsto \ \sum_{i=0}^{d-1} s_i T^i \ + \ \langle f \rangle.$$

Beweis. Die Voraussetzung $c_d \in R^*$ ermöglicht Polynomdivision mit Rest durch f, wie man sie über Körpern kennt. Damit erhält man die erste Aussage. Die zweite Aussage ist eine einfache Folgerung. $\square$

Lemma 7.4.13. *Es seien* $R \xrightarrow{\jmath} R' \xrightarrow{\imath} R''$ *Ringhomomorphismen. Sind $\imath$ und $\jmath$ endlich, so ist auch $\imath \circ \jmath$ endlich.*

Beweis. Es sei R'' über $\imath(R')$ erzeugt durch $r''_1, \ldots, r''_n$, und es sei R' über $\jmath(R)$ erzeugt durch $r'_1, \ldots, r'_m$. Dann ist R'' über $\imath(\jmath(R))$ erzeugt durch $\imath(r'_i) r''_j$, wobei $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. $\square$

Beweis von Satz 7.4.9. Da R eine endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra ist, gibt es einen Epimorphismus $\imath_0 \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to R$. Insbesondere ist R dann ein endlicher Modul über $\mathrm{Bild}(\imath_0)$. Ist $\imath_0$ injektiv, so besitzt es bereits die gewünschten Eigenschaften.

Betrachten wir nun den Fall, dass $\imath_0$ nicht injektiv ist. Wir wählen ein $f \in \mathrm{Kern}(\imath_0)$ und dazu einen Automorphismus σ wie in Lemma 7.4.11. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm von $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismen

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}] \arrow[r] \arrow[dr, "\jmath"'] & \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "\sigma^{-1}"] \arrow[d] & \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[d] & R \\
& \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle \sigma(f) \rangle \arrow[r, "\cong"'] & \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle \arrow[ur, "\bar{\imath}_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

Dann ist $\bar{\imath}$ offensichtlich endlich, und eine Anwendung von Lemma 7.4.12, auf $\sigma(f)$ und $S = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$, zeigt, dass $\jmath$ endlich ist. Also ist die Komposition $\imath_1 \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}] \to R$ der Homomorphismen der oberen Zeile endlich, siehe Lemma 7.4.13.

Ist $\imath_1$ injektiv, so besitzt es die gewünschten Eigenschaften. Andernfalls iterieren wir das Verfahren, und erhalten auf diese Weise endliche Algebrenhomomorphismen $\imath_k \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-k}] \to R$. Spätestens bei $k = n$ erhalten wir damit das gesuchte injektive $\imath_k$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 7.4.

Aufgabe 7.4.14. Welche der folgenden Morphismen sind endlich (jeweils begründen):

(i) $\mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$, $z \mapsto z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,
(ii) $\mathbb{K}^* \mapsto \mathbb{K}^2$, $z \mapsto (z, z^{-1})$,
(iii) $\mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$, $(z, w) \mapsto (z^2, w^2)$,
(iv) $\mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$, $(z, w) \mapsto (zw, w)$,
(v) $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$, $(z, w) \mapsto (z^2, zw, w^2)$,
(vi) $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(z, w) \mapsto (z + w, zw)$.

Aufgabe 7.4.15.

(i) Zeige: Die Inklusion $\mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z$ ist kein endlicher Morphismus.
(ii) Zeige: Der Morphismus $\mathbb{K} \setminus \{1\} \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z^2$ ist abgeschlossen, besitzt endliche Fasern, ist aber nicht endlich.
(iii) Verwende das Verfahren aus dem Beweis von 7.4.9 um einen endlichen Morphismus $\mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$ anzugeben.

Aufgabe 7.4.16. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus irreduzibler affiner Varietäten. Zeige: Es gilt $\dim(X) \le \dim(Y)$, und im Falle gleicher Dimensionen ist φ bereits surjektiv.

Aufgabe 7.4.17. Zeige: Die elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ in n Variablen definieren einen endlichen Morphismus

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad z \mapsto (\sigma_1(z), \ldots, \sigma_n(z)).$$

Aufgabe 7.4.18. Es seien X eine affine Varietät, G eine endliche Gruppe und $G \times X \to X$ eine Wirkung, sodass jedes $T_g\colon X \to X, x \mapsto g \cdot x$ ein Morphismus ist. Betrachte den *Invariantenring*

$$\mathcal{O}(X)^G := \{f \in \mathcal{O}(X);\ g \cdot f = f \text{ für alle } g \in G\},$$

wobei $g \cdot f$ definiert ist über $g \cdot f(x) := f(g^{-1} \cdot x)$. Beweise folgende Aussagen:

(i) $\mathcal{O}(X)^G \subseteq \mathcal{O}(X)$ ist eine ganze Ringerweiterung. Hinweis: Betrachte Erzeugende $f_1, \ldots, f_r$ für $\mathcal{O}(X)$ und die Polynome

$$\prod_{g \in G} (T - g \cdot f_i) \quad \in \quad \mathcal{O}(X)^G[T].$$

(ii) Der Invariantenring $\mathcal{O}(X)^G$ ist eine endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra. Hinweis: Satz von Artin und Tate.
(iii) Die Inklusion $\mathcal{O}(X)^G \subseteq \mathcal{O}(X)$ definiert einen endlichen surjektiven Morphismus $\pi\colon X \to Y$ mit $Y := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(X)^G)$.
(iv) Die Fasern von π sind genau die G-Bahnen in X, d.h., für jede Faser $X_y := \pi^{-1}(y)$ von $\pi\colon X \to Y$ gilt $X_y = G \cdot x$ mit einem $x \in X_y$.

7.5. **Krulldimension und Krullscher Hauptidealsatz.**

Definition 7.5.1. Die *Krulldimension* eines topologischen Raumes X ist das Supremum über alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die eine echt aufsteigende Kette $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_r$ irreduzibler abgeschlossener Teilmengen $\emptyset \neq X_i \subseteq X$ erlauben.

Satz 7.5.2. *Es sei X eine affine Varietät. Dann ist die Dimension von X gleich der Krulldimension des topologischen Raumes X.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Krulldimension von X durch $\dim(X)$ beschränkt ist. Dazu sei $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_r$ eine Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen $X_i \subseteq X$. Nach Satz 7.1.9 gilt $\dim(X_i) \leq \dim(X)$, und nach dem Identitätssatz 7.1.10 muss $\dim(X_i) < \dim(X_{i+1})$ gelten. Das impliziert $r \leq \dim(X)$.

Wir zeigen nun, dass $\dim(X)$ durch die Krulldimension von X beschränkt ist. Im Fall $X = \mathbb{K}^n$ ist dies einfach: Man hat hier die Kette $\{0\} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{K}^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}^n$. Folglich hat die Krulldimension von $\mathbb{K}^n$ mindestens den Wert $n = \dim(\mathbb{K}^n)$.

Ist X eine beliebige affine Varietät, so gibt es nach dem Noetherschen Normalisierungslemma 7.4.10 einen surjektiven endlichen Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$ mit $n = \dim(X)$.

Es sei $X_n \subseteq X$ eine n-dimensionale irreduzible Komponente. Satz 7.4.4 liefert einen endlichen Morphismus

$$\varphi_n := \varphi_{|X_n} \colon X_n \ \to \ \mathbb{K}^n$$

auf die abgeschlossene Menge $Y_n := \varphi_n(X_n) \subseteq \mathbb{K}^n$. Nach Bemerkung 7.4.3 gilt $\dim(Y_n) = n$. Folglich liefert der Identitätssatz 7.1.10, dass $Y_n = \mathbb{K}^n$ gilt.

Wir betrachten $\mathbb{K}^{n-1} \subsetneq \mathbb{K}^n$. Da die Einschränkung von φ_n auf $\varphi_n^{-1}(\mathbb{K}^{n-1})$ endlich und surjektiv ist, besitzt $\varphi_n^{-1}(\mathbb{K}^{n-1})$ nach 7.4.5 die Dimension $n-1$. Insbesondere gibt es eine $n-1$-dimensionale irreduzible Komponente $X_{n-1} \subseteq \varphi_n^{-1}(\mathbb{K}^{n-1})$. Es gilt $X_{n-1} \subsetneq X_n$, und man erhält einen endlichen surjektiven Morphismus

$$\varphi_{n-1} := \varphi_{n|X_{n-1}} \colon X_{n-1} \ \to \ \mathbb{K}^{n-1}.$$

Ebenso finden wir ein $(n-2)$-dimensionales irrebuzibles $X_{n-2} \subsetneq X_{n-1}$, und so fort. Dies führt schließlich zu einer echt aufsteigende Kette $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n$ irreduzibler abgeschlossener Mengen $X_i \subseteq X$. Es folgt, dass $n = \dim(X)$ kleiner gleich der Krulldimension von X ist. □

Satz 7.5.3 (Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Es sei X eine n-dimensionale irreduzible affine Varietät, und es sei $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $\emptyset \neq V_X(f) \neq X$. Dann ist $V_X(f)$ rein $(n-1)$-dimensional, d.h., jede irreduzible Komponente von $V_X(f)$ besitzt die Dimension $n-1$.*

Folgerung 7.5.4. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät, und es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ mit $\emptyset \neq V_X(f_1, \ldots, f_r)$ gegeben. Dann besitzt jede irreduzible Komponente von $V_X(f_1, \ldots, f_r)$ mindestens die Dimension* $\dim(X) - r$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über r. Der Fall $r = 1$ ergibt sich mit Satz 7.5.3. Für den Induktionsschritt betrachten wir $X' := V_X(f_1, \ldots, f_{r-1})$. Offenbar gilt

$$V_X(f_1, \ldots, f_r) \quad = \quad V_{X'}(f_{r|X'}).$$

Ist eine irreduzible Komponente $Y \subseteq V_X(f_1, \ldots, f_r)$ gegeben, so wählen wir eine irreduzible Komponente $Y' \subseteq X'$ mit $Y \subseteq Y'$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\dim(Y') \geq \dim(X) - r + 1$. Mit Satz 7.5.3 ergibt sich daher

$$\dim(Y) \ = \ \dim(V_{Y'}(f_{r|Y'})) \ \geq \ \dim(X) - r.$$

□

Folgerung 7.5.5. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät der Dimension n, und es sei $x \in X$. Dann gibt es eine echt aufsteigende Kette $\{x\} \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n$ mit irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen $X_i \subseteq X$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über $n = \dim(X)$. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt setzen wir $X_n := X$ und wählen wir ein nicht triviales $f \in \mathcal{O}(X_n)$ mit $f(x) = 0$. Nach Satz 7.5.3 besitzt $V_X(f)$ dann eine irreduzible Komponente X_{n-1} der Dimension $n-1$ mit $x \in X_{n-1}$. Auf diese wenden wir die Induktionsvoraussetzung an und erhalten die gewünschte Kette. □

Satz 7.5.6. *Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung.*

(i) *Jedes Element $a \in \mathbb{L}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen:*

$$\mu_a \colon \mathbb{L} \ \to \ \mathbb{L}, \qquad v \ \mapsto \ av.$$

(ii) *Das Minimalpolynom $f_a \in \mathbb{K}[T]$ des Elements $a \in \mathbb{L}$ und das Minimalpolynom des Endomorphismus $\mu_a \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ stimmen überein.*

(iii) *Das charakteristische Polynom g_a des Endomorphismus $\mu_a \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ ist eine Potenz seines Minimalpolynoms*

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Für Aussage (ii) vermerken wir zunächst, dass man für jedes $v \in \mathbb{L}$ und jedes $f = \sum b_i T^i \in \mathbb{K}[T]$ erhält:

$$f(\mu_a)(v) \ = \ \sum b_i \mu_a^i(v) \ = \ \sum b_i a^i v \ = \ f(a)v.$$

Insbesondere gilt genau dann $f(\mu_a) = 0$, wenn $f(a) = 0$ gilt. Das impliziert die Gleichheit der beiden Minimalpolynome.

Zu (iii). Wir betrachten den Zwischenkörper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(a) \subseteq \mathbb{L}$. Es gilt $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = \deg(f_a)$, und man hat eine Zerlegung

$$\mathbb{L} \ = \ \bigoplus_{i=1}^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]} V_i$$

mit $\mathbb{K}(a)$-Untervektorräumen $V_i \cong \mathbb{K}(a)$. Wegen $a \in \mathbb{K}(a)$ gilt $\mu_a(V_i) = V_i$. Das charakteristische Polynom g_i von $\mu_{a|V_i}$ besitzt den Grad $\dim_{\mathbb{K}}(V_i) = \deg(f_a)$, und man hat

$$g_a \ = \ \prod_{i=1}^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]} g_i.$$

Wir zeigen nun $g_i = f_a$. Aus Gradgründen genügt es, zu zeigen, dass f_a ein Teiler von g_i ist. Dies folgt aus der Irreduzibilität von f_a und der Tatsache, dass für jedes $v \in V_i$ gilt

$$g_i(a)v \ = \ g_i(\mu_a)(v) \ = \ g_i(\mu_{a|V_i})(v) \ = \ 0.$$

□

Definition 7.5.7. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Die *Norm* des Elements $a \in \mathbb{L}$ über $\mathbb{K}$ ist definiert als

$$N(a) \quad := \quad \det(\mu_a).$$

Bemerkung 7.5.8. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung.

(i) Für jedes Element $a \in \mathbb{K}$ gilt $N(a) = a^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}$.
(ii) Für je zwei Elemente $a, a' \in \mathbb{L}$ gilt $N(aa') = N(a)N(a')$.
(iii) Für jedes Element $a \in \mathbb{L}$ gilt $g_a(T) = T^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]} + \ldots + (-1)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}N(a)$.

Satz 7.5.9. *Es sei R ein normaler Ring mit Quotientenkörper $\mathbb{K} := Q(R)$. Weiter seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und $a \in \mathbb{L}$ ein algebraisches Element mit Minimalpolynom $f_a \in \mathbb{K}[T]$ über $\mathbb{K}$. Ist $a \in \mathbb{L}$ ganz über R, so gilt $f_a \in R[T]$.*

Beweis. Wir wählen einen algebraischen Abschluss $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ mit $a \in \overline{\mathbb{K}}$. Dann zerfällt das Minimalpolynom $f_a \in \mathbb{K}[T]$ über $\overline{\mathbb{K}}$ in Linearfaktoren:

$$f_a \quad = \quad (T - a_1) \cdots (T - a_n), \qquad \text{wobei } a_i \in \overline{\mathbb{K}}, \quad a_1 = a.$$

Wir zeigen, dass mit a_1 auch $a_2, \ldots, a_n$ ganz über R sind. Dazu sei $0 \neq f \in R[T]$ ein normiertes Polynom mit $f(a_1) = 0$. Dann gilt $f = hf_a$ mit einem $h \in \mathbb{K}[T]$. Das impliziert $f(a_i) = 0$ für jedes $i = 2, \ldots, n$.

Da $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{K}}$ ganz über R sind, und die über R ganzen Elemente einen Unterring von $\overline{\mathbb{K}}$ bilden, ergibt sich, dass die Koeffizienten von f_a ebenfalls ganz über R sind. Da sie zudem in $\mathbb{K}$ liegen und R normal ist, folgt $f_a \in R[T]$. □

Folgerung 7.5.10. *Es sei R ein normaler Ring mit Quotientenkörper $\mathbb{K} := Q(R)$, und es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Ist $a \in \mathbb{L}$ ganz über R, so gilt $g_a \in R[T]$; insbesondere hat man dann $N(a) \in R$.*

Beweis von Satz 7.5.3. Es sei $Y \subseteq V_X(f)$ eine irreduzible Komponente. Wir führen das Problem zunächst auf den Fall $Y = V_X(f)$ zurück. Dazu seien $Y_1, \ldots, Y_r$ die verbleibenden irreduziblen Komponenten von $V_X(f)$. Wir betrachten die abgeschlosssene Menge

$$A \; := \; \bigcup_{i=1}^{r} Y_i \; \subseteq \; X.$$

Dann gilt $Y \not\subseteq V_X(I_X(A))$. Folglich gibt es ein $h \in I_X(A)$, sodass $h_{|Y}$ nicht die Nullfunktion auf Y ist. Für die Lokalisierungen von X und Y nach h bzw. $h_{|Y}$ erhalten wir

$$V_{X_h}(f_{|X_h}) \quad = \quad Y_{h_{|Y}}.$$

Insbesondere ist die Nullstellenmenge von $f_{|X_h}$ als offene Teilmenge von Y wieder irreduzibel. Wegen $\dim(X_h) = \dim(X)$ und $\dim(Y_{h_{|Y}}) = \dim(Y)$ genügt es die Aussage des Satzes für X_h und $f_{|X_h}$ zu zeigen. Mit anderen Worten: Wir dürfen von vorneherein annehmen, dass $Y := V_X(f)$ irreduzibel ist.

Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma 7.4.10 gibt es einen surjektiven endlichen Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$. Das Bild $\varphi(Y)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$, und die Einschränkung $\varphi|_Y : Y \to \varphi(Y)$ ist ein endlicher Morphismus, siehe Satz 7.4.4.

Nach Satz 7.4.5 gilt $\dim(Y) = \dim(\varphi(Y))$. Wir müssen also zeigen, dass $\varphi(Y)$ die Dimension $n - 1$ besitzt. Nach Satz 7.1.13 haben wir dafür lediglich zu zeigen, dass $\varphi(Y) = V(h)$ mit einem $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gilt.

Wir verwenden dazu unsere algebraischen Vorbereitungen. Der Komorphismus φ^* ist injektiv, und er definiert eine ganze Ringerweiterung

$$R := \varphi^*(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]) \; \subseteq \; \mathcal{O}(X),$$

wobei R als faktorieller Ring normal ist. Wir betrachten die zugehörige Körpererweiterung $Q(R) \subseteq \mathbb{K}(X)$. Nach Lemma 7.3.7 ist diese Körpererweiterung endlichdimensional und somit algebraisch.

Es sei $T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \ldots + a_1T + a_0$ das Minimalpolynom von $f \in \mathbb{K}(X)$ über $Q(R)$. Nach Satz 7.5.9 liegen alle Koeffizienten a_i in $R \subseteq \mathcal{O}(X)$, und die Norm $N(f)$ ist nach Bemerkungen 7.5.6 (iii) sowie 7.5.8 (iii) bis auf den Faktor ± 1 eine Potenz von a_0.

Wir zeigen nun, dass $I_X(Y) \cap R$ im wesentlichen durch die Norm $N(f)$ definiert wird; genauer verifizieren wir in $\mathcal{O}(X)$ die Gleichung

$$I_X(Y) \ \cap \ R \quad = \quad \sqrt{\langle a_0 \rangle} \ \cap \ R. \tag{7.5.10.1}$$

Zur Inklusion „$\supseteq$". Wegen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathcal{O}(X)$ erhalten wir in $\mathcal{O}(X)$ die folgende Gleichung

$$f^k + a_{k-1}f^{k-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \quad = \quad 0.$$

Schränkt man diese Gleichung auf $Y = V_X(f)$ ein, so ergibt sich $a_0 \in I_X(Y)$. Damit erhält man die gewünschte Inklusion.

Zum Nachweis von „$\subseteq$" sei $g \in I_X(Y) \cap R$ gegeben. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt $g^l \in \langle f \rangle$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wir haben also eine Darstellung $g^l = g'f$ mit einem $g' \in \mathcal{O}(X)$. Um $g \in \sqrt{\langle a_0 \rangle}$ zu erhalten, wenden wir die Norm darauf an:

$$g^{l[\mathbb{K}(X):Q(R)]} \ = \ N(g^l) \ = \ N(g')N(f) \ \in \ \langle a_0 \rangle.$$

Nun ist $a_0 \in R$ von der Gestalt $a_0 = \varphi^*(h)$ mit einem Polynom $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Mit Satz 7.2.2 und der eben nachgewiesenen Gleichung 7.5.10.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi(Y) \quad &= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(I_X(Y))) \\
&= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(I_X(Y) \cap R)) \\
&= \quad V_Y((\varphi^*)^{-1}(\sqrt{\langle a_0 \rangle})) \\
&= \quad V_Y(\sqrt{(\varphi^*)^{-1}(\langle a_0 \rangle)}) \\
&= \quad V_Y(h).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass für die letzte Gleichung $(\varphi^*)^{-1}(a_0) = \{h\}$ benötigt wird, was wegen der Injektivität von φ^* jedoch gegeben ist. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 7.5.

Aufgabe 7.5.11. Es sei X ein topologischer Raum, und es sei $Y \subseteq X$ ein Teilraum. Zeige, dass die Krulldimension von Y durch die von X beschränkt ist.

Aufgabe 7.5.12. Betrachte die affine Varietät $X := V(T_2^2 - T_1T_3, T_1^5 + T_3^3 - 2T_1T_2^3) \subseteq \mathbb{K}^3$ und beweise folgende Aussagen:

(i) X ist irreduzibel in eindimensional.
(ii) Das Verschwindungsideal $I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$ kann nicht durch zwei Elemente erzeugt werden.
(iii) Die affine Varietät X erlaubt keine abgeschlossene Einbettung in den $\mathbb{K}^2$.

8. Geometrie affiner Varietäten II*

8.1. **Morphismen II*.**

Beispiel 8.1.1. Wir betrachten den Morphismus $\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(z,w) \mapsto (z, zw)$. Bild und Fasern dieses Morphismus sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{K}^2) &= \{(0,0\} \cup \{(u,v);\ u \neq 0\} \\ \varphi^{-1}(u,v) &= \begin{cases} \{(u, v/u)\} & u \neq 0, \\ \{0\} \times \mathbb{K} & u = 0 = v, \\ \emptyset & u = 0 \neq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Das Bild $\varphi(\mathbb{K}^2)$ ist nicht lokal abgeschlossen in $\mathbb{K}^2$, enthält aber die offene Teilmenge $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$. Weiter beobachten beim Übergang $z \to 0$ einen Dimensionssprung der Faser $\varphi^{-1}(\varphi(z,w))$.

Satz 8.1.2. *Es seien $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten und $d := \dim(X) - \dim(Y)$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\varphi"'] & \supseteq & X_0 \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y_0 \times \mathbb{K}^d \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{Y_0}"] \\ & Y & \supseteq & Y_0 & \end{tikzcd}$$

wobei $Y_0 \subseteq Y$ eine nichtleere offene Menge ist, $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$ gilt und $\kappa\colon X_0 \to Y_0 \times \mathbb{K}^d$ ein surjektiver endlicher Morphismus ist.

Satz 8.1.3. *Es seien $k \subseteq \mathbb{L}$ und $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ Körpererweiterungen. Dann gilt*

$$\mathrm{trdeg}_k(\mathbb{K}) \ = \ \mathrm{trdeg}_k(\mathbb{L}) \ + \ \mathrm{trdeg}_{\mathbb{L}}(\mathbb{K}).$$

Beweis. Wir wählen Transzendenzbasen $A \subseteq \mathbb{L}$ für $k \subseteq \mathbb{L}$ und $B \subseteq \mathbb{K}$ für $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ und zeigen, dass $A \cup B$ eine Transzendenzbasis für $k \subseteq \mathbb{K}$ ist. Man beachte, dass A und B disjunkt sind. Abkürzend schreiben wir

$$a := (a_1, \ldots, a_n), \quad b := (b_1, \ldots, b_m), \quad T := (T_1, \ldots, T_n), \quad S := (S_1, \ldots, S_m).$$

Zum Nachweis der algebraischen Unabhängigkeit von $A \cup B$ über k seien paarweise verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $b_1, \ldots, b_m \in B$ sowie ein $f \in k[T,S]$ mit $f(a,b) = 0$ gegeben. Sortieren nach den Variablen S ergibt eine Darstellung

$$f \ = \ \sum g_\mu(T) S^\mu \qquad \text{mit } g_\mu \in k[T].$$

Dabei ist b Nullstelle des Polynoms $\sum g_\mu(a) S^\mu \in \mathbb{L}[S]$. Wegen der algebraischen Unabhängigkeit von B über $\mathbb{L}$ muss somit $g_\mu(a) = 0$ für alle μ gelten. Die algebraische Unabhängigkeit von A über k liefert $g_\mu = 0$ für alle μ. Es folgt $f = 0$.

Um zu zeigen, dass $A \cup B$ eine Transzendenzbasis für $k \subseteq \mathbb{K}$ ist, genügt es zu verifizieren, dass jedes $c \in \mathbb{K}$ algebraisch über $k(A \cup B)$ ist, siehe Lemma 4.1.14. Da $\mathbb{L}(b_1, \ldots, b_m) \subseteq \mathbb{K}$ algebraisch ist, besitzt c ein Minimalpolynom

$$f_c \ = \ \sum \beta_i T^i \qquad \text{mit } \beta_i \ \in \ \mathbb{L}(b_1, \ldots, b_m).$$

Die Koeffizienten β_i sind von der Gestalt $\sum \beta_{i\nu} b^\nu / \sum \gamma_{j\mu} b^\mu$ mit $\beta_{i\nu}, \gamma_{j\mu} \in \mathbb{L}$. Da $k(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{L}$ algebraisch ist, sind alle $\beta_{i\nu}$, $\gamma_{j\mu}$ algebraisch über $k(a_1, \ldots, a_n)$. Nach Satz 4.1.2 haben wir deshalb algebraische Erweiterungen

$$\begin{aligned} k(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) &\subseteq k(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, \beta_{i\nu}, \gamma_{j\mu}) \\ &\subseteq k(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m, \beta_{i\nu}, \gamma_{j\mu}, c). \end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes Element $c \in \mathbb{K}$ algebraisch über $k(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ und somit ist $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ eine Transzendenzbasis für $k \subseteq \mathbb{K}$. $\square$

Beweis von Satz 8.1.2. Der Komorphismus von $\varphi\colon X \to Y$ bettet $\mathcal{O}(Y)$ monomorph nach $\mathcal{O}(X)$ und $\mathbb{K}(Y)$ monomorph nach $\mathbb{K}(X)$ ein. Wir haben folgende Beziehungen

$$\begin{array}{ccccc} S := \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) & \subseteq & \mathcal{O}(X) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathbb{L} := \varphi^*(\mathbb{K}(Y)) & \subseteq & \mathbb{L}\cdot\mathcal{O}(X) =: R & \subseteq & \mathbb{K}(X) \end{array}$$

Man beachte, dass R eine endlich erzeugte $\mathbb{L}$-Algebra ist: Sind $f_1, \ldots, f_r$ Erzeugende der $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}(X)$, so erzeugen $f_1, \ldots, f_r$ auch R als $\mathbb{L}$-Algebra.

Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma 7.4.9 gibt es einen endlichen Monomorphismus

$$\imath\colon \mathbb{L}[T_1, \ldots, T_d] \ \to\ R, \qquad T_i \ \mapsto\ g_i.$$

Dabei ist d tatsächlich die Differenz der Dimensionen, $d = \dim(X) - \dim(Y)$, denn mit Satz 8.1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} d &= \operatorname{trdeg}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}(T_1, \ldots, T_d)) \\ &= \operatorname{trdeg}_{\mathbb{L}}(Q(R)) \\ &= \operatorname{trdeg}_{\mathbb{L}}(\mathbb{K}(X)) \\ &= \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) - \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y)) \\ &= \dim(X) - \dim(Y). \end{aligned}$$

Jedes $g_i = \imath(T_i)$ ist von der Gestalt $g_i = a_i b_i$ mit $a_i \in \mathbb{L}$ und $b_i \in \mathcal{O}(X)$. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner der a_i darf man man $g_i \in \mathcal{O}(X)$ annehmen. Man erhält also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}[T_1, \ldots, T_d] \arrow[r, "\imath"] & R \\ S[T_1, \ldots, T_d] \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\imath"'] & \mathcal{O}(X) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

Die untere Zeile stellt a priori keine endliche Ringerweiterung dar. Um dies zu erreichen, muss man geeignet lokalisieren. Es seien dazu $h_1, \ldots, h_s$ Erzeugende der S-Algebra $\mathcal{O}(X)$. Dann genügt jedes h_i einer Ganzheitsgleichung

$$h_i^{m_i} + a_{im_i-1} h_i^{m_i-1} + \ldots + a_{i1} h_i + a_{i0} = 0, \qquad a_{ij} \in \mathbb{L}[g_1, \ldots, g_d].$$

Bezeichnet $f \in S$ den Hauptnenner aller Koeffizienten der $a_{ij} \in \mathbb{L}[g_1, \ldots, g_d] \cong \mathbb{L}[T_1, \ldots, T_d]$, so erfüllt jedes h_i die obige Ganzheitsgleichung sogar über S_f. Mit $g := (\varphi^*)^{-1}(f) \in \mathcal{O}(Y)$ erhält man also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y)_g \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_d] \arrow[r, "\sum a_i \otimes b_i \mapsto \sum \varphi^*(a_i) b_i", "\cong"'] & S_f[T_1, \ldots, T_d] \arrow[r, "\imath"] & \mathcal{O}(X)_f \\ & \mathcal{O}(Y)_g \arrow[ul, "a \mapsto a \otimes 1"] \arrow[ur, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

Die Komposition $\jmath$ der Abbildungen aus der oberen Reihe ist ein endlicher Monomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Mit $Y_0 := Y_g$ und $X_0 := X_f = \varphi^{-1}(Y_0)$ hat der zu $\jmath$ gehörige Morphismus $\kappa\colon X_0 \to Y_0 \times \mathbb{K}^d$ die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Folgerung 8.1.4. *Ist $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten, so gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $Y_0 \subseteq Y$ mit $Y_0 \subseteq \varphi(X)$.*

Satz 8.1.5. *Es seien $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten und $d := \dim(X) - \dim(Y)$.*

(i) *Ist $y \in \varphi(X)$ ein beliebiger Punkt und $X_y := \varphi^{-1}(y)$ die zugehörige Faser, so besitzt jede irreduzible Komponente von X_y mindestens die Dimension d.*
(ii) *Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge $Y_0 \subseteq Y$, sodass für jeden Punkt $y \in Y_0$ die Faser $X_y := \varphi^{-1}(y)$ rein d-dimensional ist.*

Beweis. Zu (i). Nach dem noetherschen Normalisierungslemma gibt es einen endlichen Morphismus $\psi\colon Y \to \mathbb{K}^m$, wobei $m = \dim(Y)$. Wir betrachten $z := \psi(y)$, und erhalten für die Fasern

$$\psi^{-1}(z) \;=\; \{y_1, \ldots, y_r\}, \qquad (\psi \circ \varphi)^{-1}(z) \;=\; \varphi^{-1}(\psi^{-1}(z)) \;=\; \bigsqcup_{i=1}^{r} \varphi^{-1}(y_i).$$

Es gilt $y = y_i$ für ein i, und wegen der zweiten Identität sind die irreduziblen Komponenten der Faser $\varphi^{-1}(y)$ auch irreduzible Komponenten der Faser $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(z))$. Für letztere gilt

$$\varphi^{-1}(\psi^{-1}(z)) \;=\; V_X(f_1, \ldots, f_m),$$

wobei $f_i := (\psi \circ \varphi)^*(T_i - z_i)$. Nach Folgerung 7.5.4 besitzt jede irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(z))$ mindestens die Dimension $d = \dim(X) - m$.

Zu (ii). Es seien $Y_0 \subseteq Y$ und $\kappa\colon X_0 \to Y_0 \times \mathbb{K}^d$ wie in Satz 8.1.2. Dann erhält man für jedes $y \in Y_0$ einen endlichen Morphismus von der Faser $X_y := \varphi^{-1}(y)$ auf $\mathbb{K}^d$:

$$X_y \xrightarrow{\;\;\kappa\;\;} \{y\} \times \mathbb{K}^d \xrightarrow{\;\;\cong\;\;} \mathbb{K}^d .$$

Nach Satz 7.4.5 gilt $\dim(X_y) = d$. Also liefert die bereits bewiesene Aussage (i), dass jede irreduzible Komponente von X_y die Dimension d besitzt. □

Folgerung 8.1.6. *Es seien X und Y affine Varietäten. Dann gilt* $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Definition 8.1.7. Es seien X eine affine Varietät, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit den irreduziblen Komponenten $A_1, \ldots, A_r$. Die *lokale Dimension* von A in einem Punkt $x \in A$ ist

$$\dim_x(A) \;=\; \max_{x \in A_i} \dim(A_i).$$

Satz 8.1.8 (Halbstetigkeit der Faserdimension)**.** *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten. Dann erhält man für jedes $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine abgeschlossene Teilmenge in X, nämlich*

$$A_l(\varphi) := \{x \in X;\ \dim_x(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq l\}.$$

Beweis. Es seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann erhalten wir

$$A_l(\varphi) \;=\; A_l(\varphi_{|X_1}) \cup \ldots \cup A_l(\varphi_{|X_r})$$

Wir beweisen den Satz mittels Induktion über $m := \dim(Y)$. Für $m = 0$ ergibt sich die Aussage aus der obigen Gleichung: $A_l(\varphi)$ ist dann genau die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten X_i mit $\dim(X_i) \geq l$.

Zum Induktionsschritt. Nach obiger Gleichung, genügt es, die Aussage für irreduzibles X zu beweisen. Weiter darf man Y durch $\overline{\varphi(X)}$ ersetzen, d.h., wir dürfen annehmen, dass φ dominant ist und Y irreduzibel ist.

Nach Satz 8.1.5 (i) ist nur für $l > \dim(X) - \dim(Y)$ etwas zu zeigen. In diesem Fall erhalten wir mit den Teilmengen $Y_0 \subseteq Y$ und $X_0 \subseteq X$ aus Satz 8.1.5 (ii):

$$A_l(\varphi) \ \subseteq \ X' \ := \ X \setminus X_0, \qquad \varphi(A_l(\varphi)) \ \subseteq \ Y' \ := \ Y \setminus Y_0.$$

Wir erhalten also die Abgeschlossenheit von $A_l(\varphi)$ durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf die Einschränkung $\varphi_{|X'} \colon X' \to Y'$. □

Definition 8.1.9. Es sei X ein topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heisst *lokal abgeschlossen*, falls $W = U \cap A$ mit einer offenen Menge $U \subseteq X$ und einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ gilt.
(ii) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heisst *konstruierbar*, falls sie eine endliche Vereinigung lokal abgeschlossener Teilmengen ist.

Bemerkung 8.1.10. Es sei X ein topologischer Raum. Ist $A \subseteq X$ eine dichte konstruierbare Menge, so gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ mit $U \subseteq A$.

Beispiel 8.1.11. (i) Die Menge $\mathbb{K}^* \times \{0\}$ ist zwar lokal abgeschlossen in $\mathbb{K}^2$, ist jedoch weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{K}^2$.
(ii) Die Menge $(\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$ ist konstruierbar in $\mathbb{K}^2$, ist jedoch nicht lokal abgeschlossen in $\mathbb{K}^2$.

Satz 8.1.12. *Es sei $\varphi \colon X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäten. Ist $W \subseteq X$ konstruierbar, so ist das Bild $\varphi(W) \subseteq Y$ wieder konstruierbar.*

Beweis. Indem wir X durch geeignete Hauptmengen X_f überdecken, erreichen wir, dass W eine Vereinigung von Mengen $W_f \subseteq W \cap X_f$ ist, die jeweils abgeschlossen in den affinen Varietäten X_f liegen und somit wieder affine Varietäten sind. Es gilt

$$\varphi(W) \quad = \quad \bigcup \varphi_{|W_f}(W_f).$$

Es genügt also, die Aussage für $W = X$ zu beweisen. Dies geschieht durch Induktion über $n := \dim(X)$. Gilt $n = 0$, so ist X eine endliche Menge. Also ist auch das Bild $\varphi(X)$ endlich und somit konstruierbar.

Zum Induktionsschritt. Sind $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X, so erhalten wir eine Zerlegung

$$\varphi(X) \quad = \quad \varphi(X_1) \cup \ldots \cup \varphi(X_r).$$

Es genügt also, die Aussage für irreduzibles X zu beweisen. Dafür dürfen wir weiter annehmen, dass $\varphi \colon X \to Y$ dominant ist, und Y irreduzibel ist.

Nun wählen wir Teilmengen $Y_0 \subseteq Y$ und $X_0 \subseteq X$ wie in Satz 8.1.2. Mit $X' := X \setminus X_0$ erhalten wir dann

$$\varphi(X) \quad = \quad Y_0 \ \cup \ \varphi(X').$$

Es reicht daher zu zeigen, dass $\varphi(X')$ konstruierbar ist. Das ergibt sich jedoch durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf die Einschränkung $\varphi_{|X'} \colon X' \to Y$. □

Aufgaben zu Abschnitt 8.1.

Aufgabe 8.1.13. Es seien $X = V(z_1z_2 - z_3z_4) \subseteq \mathbb{C}^4$ und $Y := V(z_1, z_3) \subseteq X$. Zeige:

(i) X ist irreduzibel, und es gilt $\dim(X) = 3$.
(ii) Y ist irreduzibel, und es gilt $\dim(Y) = 2$.
(iii) Es gibt kein $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $Y = V_X(f)$.

Aufgabe 8.1.14. Betrachte die affinen Variatäten $X := V(z_1z_3 + z_2z_4 + z_5 - 1) \subseteq \mathbb{K}^5$ sowie $Y := \mathbb{K}^4$ und den Morphismus

$$\varphi\colon X \to Y, \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \mapsto (z_1, z_2, z_3z_5, z_4z_5).$$

Zeige, dass die Menge $Y_1 = \{y \in Y;\ \dim(\varphi^{-1}(y)) \geq 1\}$ nicht abgeschlossen in Y ist. Hinweis: Betrachte $(0, 0, 0, 0) \in Y$.

Aufgabe 8.1.15. Es sei X ein topologischer Raum. Beweise folgende Aussagen:

(i) Sind $A, B \subseteq X$ konstruierbar, so sind auch die folgenden Teilmengen von X konstruierbar:
$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A \setminus B.$$
(ii) Ist $A \subseteq X$ eine dichte konstruierbare Menge, so gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ mit $U \subseteq A$.

Aufgabe 8.1.16. Gib ein Beispiel eines surjektiven Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ irreduzibler affiner Varieäten, der offen, aber nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 8.1.17. Betrachte die affinen Varietäten $X := \mathbb{K}^4$ und $Y := V(T_1T_4 - T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^4$. Zeige, dass der folgende Morphismus surjektiv und weder offen noch abgeschlossen ist:

$$\varphi\colon X \to Y, \qquad z \mapsto (z_1z_2, z_1z_4, z_2z_3, z_3z_4).$$

Aufgabe 8.1.18. Gib ein Beispiel eines Morphismus $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit genau n reduziblen Fasern.

Aufgabe 8.1.19. Betrachte $X := V(T_2^2 - T_1T_3^2, T_1T_4 - 1) \subseteq \mathbb{K}^4$ und $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z_1$. Zeige, dass X irreduzibel ist und dass jede Faser von φ reduzibel aber zusammenhängend ist.

8.2. **Abbildungsgrad*.**

Bemerkung 8.2.1. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gleicher Dimension. Dann hat man

$$\mathbb{K}(Y) \;\cong\; \varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \;\subseteq\; \mathbb{K}(X).$$

Die Körpererweiterung $\varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \subseteq \mathbb{K}(X)$ ist dabei endlich erzeugt und wegen $\dim(X) = \dim(Y)$ algebraisch, also insgesamt endlich.

Definition 8.2.2. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gleicher Dimension. Dann ist der *Abbildungsgrad* von $\varphi\colon X \to Y$ definiert als

$$\deg(\varphi) \quad := \quad [\mathbb{K}(X) : \varphi^*(\mathbb{K}(Y))].$$

Beispiel 8.2.3. Der Morphismus $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $z \mapsto z^k$ hat den Grad k.

Satz 8.2.4. *Es gelte* $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$*, und es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gleicher Dimension. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\varphi"'] & \supseteq & X_0 \arrow[rr, "\imath"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y_0 \times \mathbb{K} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{Y_0}"] \\
& Y & \supseteq & Y_0 &
\end{tikzcd}$$

wobei $\emptyset \neq Y_0 \subseteq Y$ *eine Hauptmenge ist,* $X_0 = \varphi^{-1}(Y_0)$ *gilt,* $\imath\colon X_0 \to Y_0 \times \mathbb{K}$ *eine abgeschlossene Einbettung ist und* $\imath(X_0) = V_{Y_0\times\mathbb{K}}(f)$ *mit einem irreduziblen normierten Polynom* $f \in \mathcal{O}(Y)[T]$ *vom Grad* $\deg(\varphi)$ *gilt.*

Beweis. Es sei $\mathbb{L} := \varphi^*(\mathbb{K}(Y))$. Wegen $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$ ist $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}(X)$ eine separable Körpererweiterung. Der Satz vom primitiven Element liefert also ein $h \in \mathbb{K}(X)$ mit $\mathbb{K}(X) = \mathbb{L}(h)$. Wir betrachten das Minimalpolynom h über $\mathbb{L}$; es ist von der Form

$$q_h \;=\; T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_1T + a_0 \qquad \text{mit } a_i = \varphi^*(b_i), \quad b_i \in \mathbb{K}(Y).$$

Weiter arbeiten wir mit dem Polynom

$$q \;=\; T^d + b_{d-1}T^{d-1} + \ldots + b_1T + b_0 \;\in\; \mathbb{L}[T].$$

Durch sukzessives Verkleinern von Y und X wollen wir sicherstellen, dass q die gewünschten Eigenschaften besitzt. In einem ersten Schritt wollen wir $h \in \mathcal{O}(X)$ erreichen. Es gilt $h = h_1/h_2$ mit $h_i \in \mathcal{O}(X)$. Weiter haben wir

$$\dim(\overline{\varphi(V_X(h_2))}) \;\le\; \dim(V_X(h_2)) \;<\; \dim(X) \;=\; \dim(Y).$$

Also gibt es eine nichtleere Hauptmenge $Y_0 \subseteq Y \setminus \overline{\varphi(V_X(h_2))}$, sodass $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$ in X_{h_2} enthalten ist. Indem wir Y zu Y_0 und X zu X_0 verkleinern erreichen wir $h \in \mathcal{O}(X)$.

In einem zweiten Verkleinerungsschritt wollen wir $b_i \in \mathcal{O}(Y)$ sicherstellen. Es gilt $b_i = b'_i/b''_i$ mit $b'_i, b''_i \in \mathcal{O}(Y)$. Es sei $b = b''_0 \cdot \ldots \cdot b''_{d-1}$ der Hauptnenner. Indem wir Y_0 zu $Y_0 \setminus V_Y(b)$ und X_0 zu $\varphi^{-1}(Y_0)$ verkleinern, erreichen wir $b_i \in \mathcal{O}(Y)$.

Wir wählen nun Erzeugende $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}(X)$ der $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}(X)$. Wegen $\mathbb{K}(X) = \mathbb{L}(h)$ erhalten wir dann

$$f_i \;=\; \sum_{j=0}^{d-1} b_{ij}h^j, \qquad \text{mit } b_{ij} \in \mathbb{L}.$$

In einem dritten Verkleinerungsschritt wollen wir $b_{ij} \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$ erreichen. Es gilt $b_{ij} = b'_{ij}/b''_{ij}$ mit $b_{ij'}, b''_{ij} \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$. Für den Hauptnenner $c = \prod b_{ij}$ gilt $c = \varphi^*(g)$

mit $g \in \mathcal{O}(Y)$. Verkleinert man Y zu $Y \setminus V_Y(g)$ und X zu $\varphi^{-1}(Y)$, so erreicht man $b_{ij} \in \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$. Das impliziert insbesondere

$$\mathcal{O}(X) \quad = \quad \sum_{i=0}^{d-1} \varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \cdot h^j.$$

Damit erhält man einen surjektiven Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{O}(Y) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[T] \;\to\; \mathcal{O}(X), \qquad \sum g_i \otimes p_i \;\mapsto\; \sum \varphi^*(g_i) p_i(h).$$

Der zugehörige Morphismus $\imath\colon X \to Y \times \mathbb{K}$, $x \mapsto (\varphi(x), h(x))$ ist also eine abgeschlossene Einbettung. Weiter passt er in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \times \mathbb{K} \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Das eingangs definierte Polynom $q \in \mathcal{O}(Y)[T]$ ist eine reguläre Funktion auf $Y \times \mathbb{K}$. Nach Konstruktion gilt

$$\imath^*(q) \;=\; h^d a_{d-1} h^{d-1} + \ldots + a_1 h + a_0 \;=\; 0$$

auf X. Das impliziert $\imath(X) \subseteq V_{Y \times \mathbb{K}}(q)$. Da $\mathrm{pr}_Y : \imath(X) \to Y$ dominant ist, erhalten wir $\dim(\imath(X)) \geq \dim(Y)$ und somit $\dim(\imath(X)) \geq \dim(Y \times \mathbb{K})$. Es folgt $\imath(X) = V_{Y \times \mathbb{K}}(q)$. $\square$

Erinnerung 8.2.5. Es seien R ein Integritätsring, und es seien zwei Polynome in $R[T]$ gegeben:

$$f \;=\; a_0 T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m, \qquad g \;=\; b_0 T^n + b_1 T^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Aus den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m$ und $b_0, \ldots, b_n$ bilden wir ein Schema mit $m + n$ Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & \ldots & m{+}1 & m{+}2 & m{+}3 & \ldots & m{+}n \\
\hline
1 & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
2 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
n & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\
n{+}1 & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
n{+}2 & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
n{+}m & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \\
\hline
 & 1 & 2 & \ldots & n{+}1 & n{+}2 & n{+}3 & \ldots & n{+}m
\end{array}$$

Fasst man diese Anordnung als eine Matrix $A(f,g) \in \mathrm{Mat}(m+n, m+n; R)$ auf, so ist die *Resultante von f und g zum Formalgrad* (m,n) definiert als

$$\mathrm{Res}(f,g) \quad := \quad \det(A(f,g)).$$

Ist $\mathbb{K}$ ein algebraischer Abschluss des Quotientenkörpers $Q(R)$, so können wir die Polynome $f, g \in k[T]$ zerlegen als

$$f \;=\; c \prod_{i=1}^{m} (T - \alpha_i), \qquad\qquad g \;=\; d \prod_{j=1}^{n} (T - \beta_j)$$

mit $c, d \in R$ und $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$. Für die Resultante zum formalen Grad (m, n) von f und g gilt dann

$$\operatorname{Res}(f,g) \quad = \quad c^n d^m \prod_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} (a_i - b_j).$$

Insbesondere gilt genau dann $\operatorname{Res}(f,g) = 0$, wenn f und g eine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzen. Für die *Diskriminante* des Polynoms $f \in R[T]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)^2 \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \operatorname{Res}(f, f'). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt genau dann $\Delta(f) = 0$, wenn das Polynom f mehrfache Nullstellen in $\mathbb{K}$ besitzt.

Satz 8.2.6. *Es gelte* $\operatorname{Char}(\mathbb{K}) = 0$*, und es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten gleicher Dimension. Dann gibt es eine nichtleere Hauptmenge* $Y_0 \subseteq Y$*, sodass jede Faser* $\varphi^{-1}(y)$ *mit* $y \in Y_0$ *aus genau* $\deg(\varphi)$ *Punkten besteht.*

Beweis. Gemäß Satz 8.2.4 erhält man nach geeignetem Verkleinern von Y ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi"'] & V_{Y\times\mathbb{K}}(f) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"'] & Y_\times \mathbb{K} \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Y \end{tikzcd}$$

mit einem gibt normierten irreduziblen Polynom $f \in \mathcal{O}(Y)[T]$ vom Grad $d := \deg(\varphi)$. Es seien

$$\begin{aligned} f &= T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_1 T + a_0, \\ f_y &= T^d + a_{d-1}(y)T^{d-1} + \ldots + a_1(y)T + a_0(y), \end{aligned}$$

wobei $a_i \in \mathcal{O}(Y)$ und $y \in Y$. Damit können wir die Faser $\varphi^{-1}(y)$ über einem Punkt $y \in Y$ beschreiben: Es gilt

$$\varphi^{-1}(y) \;\cong\; \{y\} \times \mathbb{K} \cap V_{Y\times\mathbb{K}}(f) \;=\; \{(y,z);\ f_y(z) = 0\} \;\cong\; V(f_y).$$

Die Faser $\varphi^{-1}(y) \cong V(f_y)$ besteht also genau dann aus d Punkten, wenn f_y genau d verschiedene Nullstellen besitzt. Letzteres wird durch die Diskriminante kontolliert; wir haben

$$g \;:=\; \Delta(f) \;\in\; \mathcal{O}[T], \qquad\qquad \Delta(f_y) \;=\; g(y) \;\in\; \mathbb{K}.$$

Also besitzt $\varphi^{-1}(y) \cong V(f_y)$ für jedes y mit $g(y) \neq 0$ genau d Punkte. Mit Y_g erhalten wir daher die gewünschte Hauptmenge. Man beachte, dass $g \neq 0$ gilt, da f wegen $\operatorname{Char}(\mathbb{K}) \neq 0$ separabel ist. □

Folgerung 8.2.7. *Es gelte* $\operatorname{Char}(\mathbb{K}) = 0$*. Dann ist jeder bijektive Morphismus irreduzibler affiner Varietäten birational.*

Beweis. Nach Satz 8.1.5 gibt es eine nichtleere offene Menge $Y_0 \subseteq Y$, sodass für jedes $y \in Y_0$ gilt:

$$\dim(X) \quad = \quad \dim(Y) + \dim(\varphi^{-1}(y)).$$

Da φ bijektiv ist, erhalten wir $\dim(X) = \dim(Y)$. Satz 8.2.6 liefert dann $\deg(\varphi) = 1$. Also is $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ ein Isomorphismus. □

Folgerung 8.2.8. *Es gelte* $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$*, und es seien* $\varphi\colon X \to Y$ *sowie* $\psi\colon X \to Z$ *Morphismen irreduzibler affiner Varietäten. Gibt es eine Abbildung* $\kappa\colon Y \to Z$ *mit der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, dotted, "\kappa"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, so gibt es eine nichtleere Hauptmenge $Y_0 \subseteq Y$*, für die die Einschränkung* $\kappa_{|Y_0}\colon Y_0 \to Z$ *ein Morphismus ist.*

Beweis. Indem wir Y gegebenfalls durch den Abschluss des Bildes $\varphi(X)$ ersetzen, erreichen wir, dass Y dominant ist. Wir betrachten den Morphismus

$$\varrho\colon X \ \to \ Y \times Z, \qquad\qquad x \ \mapsto \ (\varphi(x), \psi(x)).$$

Es sei $\widetilde{Y} \subseteq Y \times Z$ der Abschluss des Bildes $\varrho(X)$. Dann erhalten wir einen dominanten Morphismus $\widetilde{\varrho}\colon X \to \widetilde{Y}$, $x \mapsto (\varphi(x), \psi(x))$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{\varrho}"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, dotted, "\kappa"'] & \\
& \widetilde{Y} \arrow[u, "\mathrm{pr}_Y"'] \arrow[uur, bend right, "\mathrm{pr}_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $\widetilde{\varrho}$ dominant ist, gibt es eine nichtleere Hauptmenge $\widetilde{Y}_0 \subseteq \widetilde{Y}$ mit $\widetilde{Y}_0 \subseteq \widetilde{\varrho}(X)$. Indem wir $\widetilde{Y}$ durch $\widetilde{Y}_0$ und X durch $\widetilde{\varrho}^{-1}(\widetilde{Y}_0)$ ersetzen, erreichen wir, dass $\widetilde{\varrho}$ surjektiv ist.

Ebenso gibt es eine nichtleere Hauptmenge $Y_0 \subseteq Y$ mit $Y_0 \subseteq \varphi(X)$. Indem wir Y, $\widetilde{Y}$ und X entsprechend verkleinern erreichen wir, dass $\mathrm{pr}_Y : \widetilde{Y} \to Y$ surjektiv ist. Wegen

$$\varphi(x) = \varphi(x') \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) = \psi(x')$$

erhalten wir, dass $\mathrm{pr}_Y : \widetilde{Y} \to Y$ auch injektiv ist. Nach Folgerung 8.2.7 ist $\mathrm{pr}_Y : \widetilde{Y} \to Y$ birational. Also gibt es eine offene Menge $Y_0 \subseteq Y$, die einen Umkehrmorphismus $Y_0 \to \widetilde{Y}$ zu pr_Y erlaubt. Es folgt, dass κ auf Y_0 ein Morphismus ist. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 8.2.

Aufgabe 8.2.9. Betrachte das Quadrieren von Matrizen $\mu\colon \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}^{2\times 2}$, $A \mapsto A^2$ und bestimme die möglichen Fasern dieses Morphismus.

8.3. **Normale affine Varietäten*.**

Erinnerung 8.3.1. Es sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von K1-Ringen. Man nennt ein Element $s \in S$ *ganz* über R, falls es eine *Ganzheitsgleichung* erfüllt:

$$s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \;=\; 0, \qquad \text{wobei } a_{k-1}, \ldots, a_0 \in R.$$

Der *ganze Abschluss* $\overline{R} := \{s \in S;\ s \text{ ganz über } R\}$ ist ein Unterring in S. Man nennt einen Integritätsring R *normal*, falls $R = \overline{R}$ für $R \subseteq Q(R)$ gilt.

Jeder faktorielle Ring ist normal. Iansbesondere ist der Polynomring $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ normal.

Lemma 8.3.2. *Es seien $\mathbb{L}$ ein Körper und $R_i \subseteq \mathbb{L}$, $i \in I$, Unterringe. Sind alle R_i normal, so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal.*

Beweis. Wir setzen $R := \bigcap_{i \in I} R_i$. Als Unterring des Körpers $\mathbb{L}$ ist R ein Integritätsring. Um $R = \overline{R}$ nachzuweisen, vermerken wir zunächst, dass

$$Q(R) \;\subseteq\; Q(R_i) \;\subseteq\; \mathbb{L}$$

gilt. Ist nun $r \in Q(R)$ ganz über R, so ist R auch ganz über jedem R_i. Da alle R_i normal sind, erhalten wir $r \in R_i$. $\square$

Lemma 8.3.3. *Es seien R ein Integritätsring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Ist R normal, so ist auch der Bruchring $S^{-1}R$ normal.*

Beweis. Da R ein Integritätsring ist, haben wir die folgenden Ringerweiterungen:

$$R \;\subseteq\; S^{-1}R \;\subseteq\; Q(R) \;=\; Q(S^{-1}R).$$

Es sei nun $r/s \in Q(R)$ ganz über $S^{-1}R$. Dann haben wir eine Ganzheitsgleichung

$$\left(\frac{r}{s}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} + \ldots + a_0 \;=\; 0, \qquad \text{mit } a_i = \frac{b_i}{c_i},\ b_i, \in R,\ c_i \in S.$$

Es sei $c := c_{k_1} \cdot \ldots \cdot c_0$. Multiplizieren der obigen Ganzheitsgleichung mit c^k liefert

$$\left(\frac{cr}{s}\right)^k + ca_{k-1}\left(\frac{cr}{s}\right)^{k-1} + \ldots + c^k a_0 \;=\; 0.$$

Also ist $cr/s \in Q(R)$ ganz über R, und wir erhalten folgt $cr/s \in R$. Das impliziert jedoch

$$\frac{r}{s} \;=\; \frac{1}{c} \cdot \frac{cr}{s} \;\in\; C.$$

$\square$

Lemma 8.3.4. *Ist R ein normaler Ring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ normal.*

Beweis. $\square$

Definition 8.3.5. Es sei X eine affine Varietät.

(i) Ein Punkt $x \in X$ heisst *normal*, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist.
(ii) Wir nennen X *normal*, falls jedes $x \in X$ normal ist.

Satz 8.3.6. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist normal.*
(ii) *$\mathcal{O}(X)$ ist ein normaler Ring.*

Beweis. Sind alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ normale Ringe, so erhalten wir die Normalität $\mathcal{O}(X)$ mit Lemma 8.3.2 und

$$\mathcal{O}(X) \;=\; \bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{X,x} \;\subseteq\; \mathbb{K}(X).$$

Ist $\mathcal{O}(X)$ normal so ist nach Lemma 8.3.3 auch jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ ein normaler Ring. □

Beispiel 8.3.7. $\mathbb{K}^n$ ist normal, da $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ als faktorieller Ring normal ist. Damit sind auch $\mathbb{P}_n$ und $G(k,n)$ normal.

Beispiel 8.3.8. Die Neilsche Parabel $X := V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist nicht normal. Wir betrachten den surjektiven Morphismus

$$\varphi\colon \mathbb{K} \;\to\; X, \qquad z \;\mapsto\; (z^2, z^3).$$

Der zugehörige Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}[T]$ ist injektiv. Sein Bild ist gerade

$$R \;:=\; \varphi^*(\mathcal{O}_X(X)) \;=\; \mathbb{K}[T^2,T^3] \;=\; \left\{\sum a_i T^i \in \mathbb{K}[T];\; a_1 = 0\right\}.$$

Es folgt $Q(R) = \mathbb{K}(T)$. Das Element $T \in \mathbb{K}(T)$ ist offensichtlich ganz über R, liegt jedoch nicht in R.

Definition 8.3.9. Eine affine Varietät X heisst *lokal faktoriell*, falls jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $x \in X$, faktoriell ist.

Bemerkung 8.3.10. Es sei X eine affine Varietät. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so ist auch jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ faktoriell. Insbesondere ist X lokal faktoriell.

Satz 8.3.11. *Lokal faktorielle affine Varietäten sind normal.*

Beweis. Jeder faktorielle Ring ist normal. Dies wendet man auf die lokalen Ringe an. □

Beispiel 8.3.12. Es sei $X := V(T_1T_2 - T_3^2) \subset \mathbb{K}^2$. Wir zeigen, dass X zwar normal ist, aber nicht lokal faktoriell. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \;\to\; X, \quad (z_1,z_2) \;\mapsto\; (z_1^2, z_2^2, z_1z_2).$$

Diese Abbildung ist surjektiv; man kann für jeden Punkt $(a_1,a_2,a_3) \in X$ ein Urbild angeben. Getrennt nach den Fällen $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ sowie $a_1a_2 \neq 0$ gilt

$$\varphi(0,\sqrt{a_2}) = (a_1,a_2,a_3), \quad \varphi(\sqrt{a_1},0) = (a_1,a_2,a_3), \quad \varphi(\frac{a_3}{\sqrt{a_2}},\sqrt{a_2}) = (a_1,a_2,a_3).$$

Insbesondere ist der zugehörige Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}[T_1,T_2]$ injektiv. Für sein Bild erhalten wir

$$\begin{aligned} R := \varphi^*(\mathcal{O}_X(X)) \;&=\; \mathbb{K}[T_1^2, T_2^2, T_1T_2] \\ &=\; \left\{\sum a_{ij} T_1^i T_2^j \in \mathbb{K}[T_1,T_2];\; a_{ij} = 0 \text{ falls } i+j \text{ ungerade}\right\}. \end{aligned}$$

D.h., R besteht genau aus den geraden Polynomen in $\mathbb{K}[T_1,T_2]$. Wir zeigen, dass R normal ist. Dazu sei $f/g \in Q(R)$ ganz über R. Dann ist f/g insbesondere ganz über $\mathbb{K}[T_1,T_2]$.

Da der Polynomring $\mathbb{K}[T_1,T_2]$ als faktorieller Ring normal ist, gilt $f/g \in \mathbb{K}[T_1,T_2]$. Da f/g als Quotient gerader Funktionen gerade ist, folgt $f/g \in R$. Um zu sehen, dass X nicht lokal faktoriell ist, betrachten wir den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$. Zunächst sei vermerkt, dass man vermöge φ^* einen kanonischen Isomorphismus erhält

$$\mathcal{O}_{X,0} \;\cong\; R_0 \;:=\; \{f/g \in Q(R);\; g(0) \neq 0\} \;\subseteq\; Q(R).$$

Es genügt also zu zeigen, dass R_0 kein faktorieller Ring ist. Dazu zeigen wir, dass $F := T_1^2 \in R_0$ irreduzibel, aber nicht prim ist. Zur Irreduzibilität: Es sei

$$F \;=\; \frac{\widetilde{a}}{a}\frac{\widetilde{b}}{b} \qquad \text{mit } a, b, \widetilde{a}, \widetilde{b} \in R,\; a(0), b(0) \neq 0.$$

Wir haben zu zeigen, dass einer der Faktoren $\widetilde{a}/a$ und $\widetilde{b}/b$ eine Einheit in R_0 ist. Multiplikation der obigen Gleichung mit ab liefert die folgende Gleichung in R:

$$abF \;=\; abT_1^2 \;=\; \widetilde{a}\widetilde{b}.$$

Diese bearbeiten wir nun in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Wir behaupten, dass T_1^2 eines der beiden Elemente $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ teilt. Andernfalls hätten wir

$$\widetilde{a} \;=\; T_1 a', \qquad \widetilde{b} \;=\; T_1 b'$$

mit gewissen $a', b' \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Die Polyome a' und b' sind offenbar ungerade, insbesondere folgt $a'(0) = 0 = b'(0)$. Das widerspricht $ab = a'b'$. Also muss T_1^2 eines der Elemente $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ teilen, etwa $\widetilde{a}$. Damit folgt

$$ab \;=\; a'\widetilde{b}$$

mit einem $a' \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Insbesondere ergibt sich $\widetilde{b}(0) \neq 0$. Folglich ist $\widetilde{b}/b$ eine Einheit in R_0. Analog schließt man, dass $\widetilde{a}/a$ Einheit ist, falls T_1^2 Teiler von $\widetilde{b}$ ist. Zeigen wir nun, dass T_1^2 kein Primelement in R_0 ist. Wir betrachten die Zerlegungen

$$T_1^2 T_2^2 \;=\; (T_1T_2)(T_1T_2) \;=\; FT_2^2.$$

Wäre F Primelement in R_0, so müsste F ein Teiler von T_1T_2 sein, d.h., $T_1T_2 = F\widetilde{a}/a$ mit gewissen geraden Polynomen $\widetilde{a}$ und a, wobei $a(0) \neq 0$. In $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ hätten wir damit

$$aT_2 \;=\; \widetilde{a}T_1.$$

Das Monom T_2 muss dann Teiler von $\widetilde{a}$ sein, was $a(0) = 0$ impliziert. Widerspruch. Also kann F kein Primelement in R_0 sein. Da irreduzible Elemente in faktoriellen Ringen prim sind, kann R_0 kein faktorieller Ring sein.

Beispiel 8.3.13. Es seien $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $X := V(T_1^2 + \ldots + T_r^2) \subseteq \mathbb{K}^r$ mit $r \geq 5$. Dann gilt $X^{\mathrm{sing}} = \{0\}$. Der Ring $\mathcal{O}(X)$ ist faktoriell und somit sind auch alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell, insbesondere gilt dies für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$. einen Beweis findet man in Scheja/Storch, Lehrbuch der Algebra, Teil 2, VII.60.2.

Satz 8.3.14. *Es seien X eine irreduzible normale affine Varietät, $n := \dim(X)$ und $Y \subseteq X$ mit $\dim(Y) = n - 1$. Dann gibt es eine affine offene Menge $U \subseteq X$ und ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit*

$$U \cap Y \;\neq\; \emptyset, \qquad\qquad I_U(Y \cap U) \;=\; \langle f \rangle.$$

Beweis. Es sei $Y' \subseteq Y$ eine $(n-1)$-dimensionale irreduzible Komponente, und es sei $0 \neq g \in I_X(Y)$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist $V_X(g) \subseteq X$ rein $(n-1)$-dimensional. Nach dem Identitätssatz ist daher Y' eine irreduzible Komponente von X. Durch geeignetes Verkleinern von X erreichen wir $Y = Y' = V_X(g)$. Wir dürfen also von vorneherein annehnemmen, dass Y irreduzibel ist, und dass $Y = V_X(g)$ mit einem $g \in \mathcal{O}(X)$ gilt.

Es seien $g_1, \ldots, g_r$ Erzeugende des Verschwindungsideales $I_X(Y)$. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es Zahlen $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $g_i^{k_i} \in \langle g \rangle$. Für hinreichend großes k, etwa $k \geq r \max(k_1, \ldots, k_r)$, gilt daher

$$I_X(Y)^k \quad \subseteq \quad \langle g \rangle.$$

Wir wählen nun k minimal mit der obigen Eigenschaft. Dann gibt es eine Funktion $h \in I_X(Y)^{k-1}$ mit $h \notin \langle g \rangle$ und $ah \in \langle g \rangle$ für alle $a \in I_X(Y)$. Wir erhalten

$$\frac{h}{g} \quad \in \quad \mathbb{K}(X) \setminus \mathcal{O}(X), \tag{8.3.14.1}$$

$$\frac{h}{g} I_X(Y) \quad \subseteq \quad \mathcal{O}(X), \tag{8.3.14.2}$$

$$\frac{h}{g} I_X(Y) \quad \not\subseteq \quad I_X(Y). \tag{8.3.14.3}$$

Dabei bedarf die letzte Aussage der Erläuterung. Hätte man $h/gI_X(Y) \subseteq I(Y)$, so erhält man für die Erzeugenden $g_1, \ldots, g_r$ von $I_X(Y)$ Darstellungen

$$\frac{h}{g} g_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} g_j$$

mit Funktionen $a_{ij} \in \mathcal{O}(X)$. Wir betrachten $A := (a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$. Dann ist $(g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{K}(X)^r$ Eigenvektor zum Eigenwert h/g der Matrix A. Das bedeutet

$$\det\left(\frac{h}{g} E_r - A\right) \quad = \quad 0.$$

Dies ist jedoch eine Ganzheitsgleichung für h/g über $\mathcal{O}(X)$. Da $\mathcal{O}(X)$ nach Satz 8.3.6 normal ist, folgt $h/g \in \mathcal{O}(X)$. Widerspruch zur Wahl von h und g.

Nach 8.3.14.3 gibt es eine Funktion $f \in I_X(Y)$ mit $fh/g \notin I_X(Y)$. Nach 8.3.14.2 gilt $fh/g \in \mathcal{O}(X)$. Wir setzen $U := X_{fh/g}$. Wegen $fh/g \notin I_X(Y)$ ist der Durchschnitt $Y \cap U$ nicht leer. Weiter haben wir in $\mathbb{K}(U)$:

$$\begin{aligned}
f^{-1} I_U(Y \cap U) \quad &= \quad \frac{h}{g} \left(\frac{fh}{g}\right)^{-1} I_U(Y \cap U) \\
&= \quad \frac{h}{g} \left(\frac{fh}{g}\right)^{-1} \left\{ a \left(\frac{fh}{g}\right)^{-l} ;\ a \in I_X(Y),\ l \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \right\} \\
&= \quad \left\{ \frac{h}{g} a \left(\frac{fh}{g}\right)^{-l} ;\ a \in I_X(Y),\ l \in \mathbb{Z}_{\ge 1} \right\} \\
&\subseteq \quad \mathcal{O}(U).
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $f|_U$ die gewünschte Funktion ist: Für $b \in I_U(Y \cap U)$ gilt nach der obigen Überlegung $f^{-1}b = a \in \mathcal{O}(U)$, und es folgt $b = af \in \langle f \rangle$. □

Beispiel 8.3.15. Es sei $X := V(z_1 z_2 - z_3 z_4) \subseteq \mathbb{K}^4$. Dann ist X eine irreduzible (sogar normale) dreidimensionale affine Varietät. Die zweidimensionale Teilmenge

$$Y \ := \ V(z_1, z_3) \ \cong \ \mathbb{K}^2$$

kann jedoch nicht als Nullstellenmenge einer Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ realisiert werden, da $X \setminus Y$ nicht affin ist. Insbesondere kann $I_X(Y)$ kein Hauptideal sein.

Aufgaben zu Abschnitt 8.3.

Aufgabe 8.3.16. Beweise die Aussage aus Beispiel 8.3.15: Betrachte die algebraischen Mengen

$$X \ := \ V(z_1z_2 - z_3z_4) \ \subseteq \ \mathbb{K}^4, \qquad Y \ := \ V(z_1, z_3) \ \subseteq \ X$$

und zeige, dass Y nicht als Nullstellenmenge einer Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ realisiert werden kann.

Aufgabe 8.3.17. Es sei X eine affine Varietät mit irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_n$. Zeige:

$$X^{\mathrm{sing}} \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} X_i^{\mathrm{sing}} \ \cup \ \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j).$$

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe darf verwendet werden, dass jeder reguläre lokale Ring faktoriell ist.

8.4. **Normalisierung*.**

Erinnerung 8.4.1. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist definiert als

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K}) \quad := \quad \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L});\ \varphi_{|\mathbb{K}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\}.$$

Man nennt $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ *galoissch*, falls $\mathbb{K}$ der Fixkörper einer endlichen Untergruppe $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, KK)$ ist, d.h., falls

$$\mathbb{K} \quad = \quad \{a \in \mathbb{L};\ \varphi(a) = a \text{ für alle } \varphi \in G\}.$$

Eine Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ist genau dann galoissch, wenn sie Zerfällungskörper eines separablen Polynoms $f \in \mathbb{K}[T]$ ist. Ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Galoiserweiterung, so gilt

$$|\,\mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})| \quad = \quad [\mathbb{L} : \mathbb{K}].$$

Insbesondere ist die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ dann endlich. Man definiert in diesem Fall die *Spur* eine Elements $a \in \mathbb{L}$ als

$$\mathrm{Spur}(a) \quad := \quad \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})} \varphi(a)$$

Satz 8.4.2. *Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Galoiserweiterung. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen*

$$\sigma\colon \mathbb{L} \;\to\; \mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{K}), \qquad a \;\mapsto\; [b \mapsto \mathrm{Spur}(ab)]$$

Beweis. Die Zuordnung σ ist offensichtlich eine wohldefinierte lineare Abbildung. Es genügt daher zu zeigen, dass σ injektiv ist. Dazu sei $a \in \mathbb{L}$ mit $\sigma(a) = 0$ gegeben. Dann erhalten wir

$$0 \;=\; \sigma(a)(b) \;=\; \mathrm{Spur}(ab) \;=\; \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})} \varphi(a)\varphi(b)$$

für jedes $b \in \mathbb{L}$. Das bedeutet

$$\sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})} \varphi(a)\varphi \;=\; 0 \;\in\; \mathrm{Abb}(\mathbb{L}^*, \mathbb{L})$$

Der Satz über die lineare Unabhängigkeit der Charaktere liefert daher $\varphi(a) = 0$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$. Das impliziert insbesondere $a = 0$. □

Lemma 8.4.3. *Es sei R ein normaler Ring mit Quotientenkörper $\mathbb{K} := Q(R)$. Weiter seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Galoiserweiterung und $S := \overline{R}$ der ganze Abschluss von R in $\mathbb{L}$. Dann gilt* $\mathrm{Spur}(s) \in R$ *für jedes $s \in S$.*

Beweis. Ist eine Element $s \in S$ gegeben, so finden wir für dieses eine Ganzheitsgleichung

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 \;=\; 0, \quad \text{mit } a_0, \ldots, a_{n-1} \in R.$$

Wendet man ein Element $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auf diese Gleichung an, so ergibt sich mit $a_i \in \mathbb{K}$:

$$\varphi(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0) \;=\; \varphi(s)^n + a_{n-1}\varphi(s)^{n-1} + \ldots + a_0 \;=\; 0.$$

Das bedeutet $\varphi(s) \in S$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$. Damit ergibt sich $\mathrm{Spur}(s) \in S$, d.h., $\mathrm{Spur}(s)$ ist ganz über R. Weiter hat man für jedes $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$:

$$\psi(\mathrm{Spur}(s)) \;=\; \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})} \psi(\varphi(s)) \;=\; \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})} \varphi(s) \;=\; \mathrm{Spur}(s).$$

Da $\mathbb{K}$ der Fixkörper von $\mathbb{L}$ unter $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ ist, erhalten wir $\mathrm{Spur}(s) \in \mathbb{K}$. Da R normal ist, folgt $\mathrm{Spur}(s) \in R$. □

Satz 8.4.4. *Es sei R ein normaler Ring mit Quotientenkörper $\mathbb{K} := Q(R)$. Ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche separable Körpererweiterung und $S := \overline{R}$ der ganze Abschluss von R in $\mathbb{L}$, so ist $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Galoiserweiterung ist. Zunächst zeigen wir, dass $\mathbb{L}$ eine $\mathbb{K}$-Basis $a_1, \ldots, a_r$ mit $a_i \in S$ besitzt. Dazu wählen wir eine $\mathbb{K}$-Basis $\widetilde{a}_1 \ldots, \widetilde{a}_r$ für $\mathbb{L}$. Dann erfüllt jedes Element $\widetilde{a}_i$ eine Gleichung

$$\widetilde{a}_i^{n_i} + c_{in_i-1}\widetilde{a}_i^{n_i-1} + \ldots + c_{i0} \quad = \quad 0$$

mit $c_{ij} \in \mathbb{K}$. Wir schreiben $c_{ij} = c'_{ij}/c''_{ij}$ und setzen $c := c_{i0} \cdot \ldots \cdot c_{in_i-1}$. Dann ist $a_i := c\widetilde{a}_i \in \mathbb{L}$ ganz über R, und es folgt $a_i \in R$. Somit ist $a_1, \ldots, a_r$ die gesuchte $\mathbb{K}$-Basis für $\mathbb{L}$.

Satz 8.4.2 erlaubt es, $\mathbb{L}$ mit seinem Dualraum zu identifizieren. Insbesondere finden wir eine $\mathbb{K}$-Basis $b_1, \ldots, b_r$ mit $b_i \in \mathbb{L}$ für $\mathbb{L}$ mit

$$\mathrm{Spur}(a_i b_j) \quad = \quad \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Jedes $s \in S$ ist von der Gestalt $s = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_r b_r$ mit $\beta_j \in \mathbb{K}$. Nach Lemma 8.4.3 gilt $\mathrm{Spur}(sa_i) \in R$ für jedes $1 \leq i \leq r$. Damit ergibt sich

$$\beta_j \;=\; \sum_{i=1}^{r} \beta_j \mathrm{Spur}(a_i b_j) \;=\; \mathrm{Spur}(sb_j) \;\in\; A$$

Folglich ist S in dem endlich erzeugten R-Modul $M := R{\cdot}b_1 + \ldots + R{\cdot}b_r$ enthalten. Mit R ist auch M noethersch. Als Untermodul von M ist der R-Modul S ebenfalls noethersch und somit endlich erzeugt.

Ist $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ nicht galoissch, so wählen wir ein primitives Element $a \in \mathbb{L}$ für $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Dann gilt $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ und der Zerfällungskörper $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}'$ des Minimalpolynoms $f_a \in \mathbb{K}[T]$ von a ist eine Galoiserweiterung mit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$. Wir wissen bereits, dass der ganze Abschluss S' von R in $\mathbb{L}'$ ein endlich erzeugter R-Modul ist. Da R noethersch ist, muss auch $S \subseteq S'$ ein endlich erzeugter R-Modul sein. □

Satz 8.4.5. *Es seien k ein Körper und A eine endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra. Dann ist der ganze Abschluss $\overline{A}$ von A in $Q(A)$ eine endlich erzeugte k-Algebra.*

Lemma 8.4.6. *Es seien k ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $f_1, \ldots, f_r \in k(T_1, \ldots, T_n)[U]$ irreduzible Polynome. Dann gibt es eine endliche Ringerweiterung*

$$k[T_1, \ldots, T_n] \quad \subseteq \quad k'[S_1, \ldots, S_n]$$

und separable Polynome $g_i \in k'(S_1, \ldots, S_n)[U]$, wobei $1 \leq i \leq r$, sodass $f_i = g_i^{p^{m_i}}$ mit geeigneten $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt.

Beweis. Jedes Polynom f_i ist von der Form $f_i = g_i(U^{p^{m_i}})$ mit einem Polynom $\widetilde{g}_i \in k[T_1, \ldots, T_n][U]$, sodass $\partial\widetilde{g}_i/\partial U \neq 0$ gilt. Wir schreiben

$$\widetilde{g}_i \;=\; \sum_{j \in \mathbb{Z}_{>0}} \left(\frac{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \widetilde{b}_{ij\nu} T^\nu}{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \widetilde{c}_{ij\nu} T^\nu} \right) U^j.$$

In einem algebraischen Abschluss $\overline{k}$ von k wählen wir $b_{ij\nu}, c_{ij\nu} \in \overline{k}$ mit $b_{ij\nu}^{m_i} = \widetilde{b}_{ij\nu}$ bzw. $c_{ij\nu}^{m_i} = \widetilde{c}_{ij\nu}$ und setzen $k' := k(b_{ij\nu}, c_{ij\nu}; i, j, \nu)$. Für $n := \max(p^{m_1}, \ldots, p^{m_r})$ betrachten wir die Einbettung

$$k[T_1, \ldots, T_n] \;\to\; k'[S_1, \ldots, S_n], \qquad T_i \;\mapsto\; S_i^n.$$

Dann ist $k'[S_1, \ldots, S_n]$ über $k[T_1, \ldots, T_n]$ erzeugt durch endlich viele Potenzen der $b_{ij\nu}$ und der S_l. Wir betrachten die Polynome

$$g_i \;:=\; \sum_{j \in \mathbb{Z}_{>0}} \left(\frac{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} b_{ij\nu} S^{\frac{n}{p^{m_i}} \cdot \nu}}{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_{ij\nu} S^{\frac{n}{p^{m_i}} \cdot \nu}} \right) U^j \;\in\; k'[S_1, \ldots, S_n][U]$$

Diese erfüllen $g_i^{p^{m_i}} = f_i$. Wir zeigen, dass g_i separabel ist. Andernfalls hätten wir $g_i = h_i(U^{p_i})$. Das impliziert

$$\widetilde{g}_i(U^{p^{m_i}}) \;=\; g_i(U)^{p^{m_i}} \;=\; h_i(U^p)^{p^{m_i}} \;=\; \widetilde{h}_i((U^{p^{m_i}})^p)$$

mit einem Polynom $\widetilde{h}_i$. Also erhalten wir $\widetilde{g}_i(U) = \widetilde{h}_i(U^p)$. Das steht im Widerspruch zu $\partial \widetilde{g}_i / \partial U \neq 0$. $\square$

Beweis von Satz 8.4.5. Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma 7.4.9 gibt es eine endliche Ringerweiterung $k[T_1, \ldots, T_n] \subseteq A$; wir finden also $a_1, \ldots, a_r \in A$ mit

$$\begin{aligned} A &= k[T_1, \ldots, T_n][a_1, \ldots, a_r], \\ Q(A) &= k(T_1, \ldots, T_n)(a_1, \ldots, a_r). \end{aligned}$$

Falls dabei die Körpererweiterung $k(T_1, \ldots, T_n) \subseteq Q(A)$ separabel ist, definieren wir

$$R \;:=\; k[T_1, \ldots, T_n], \qquad \mathbb{K} \;:=\; Q(R), \qquad \mathbb{L} \;:=\; Q(A).$$

Andernfalls gilt $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) =: p > 0$. Zu jedem a_i betrachten wir dann das Minimalpolynom $f_i \in k(T_1, \ldots, T_n)[T]$. Gemäß Lemma 8.4.6 wählen wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
k'[S_1, \ldots, S_n] \arrow[r] & k'(S_1, \ldots, S_n) \\
k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r] \arrow[u] & k(T_1, \ldots, T_n) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

und separable Polynome $g_i \in k'(S_1, \ldots, S_n)[T]$ mit $f_i = g_i^{p^{m_i}}$. In einem algebraischen Abschluss von $Q(A)$, der $k'(S_1, \ldots, S_n)$ enthält, haben wir dann folgende Situation.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, equal] & \mathbb{K} \arrow[d, equal] & \mathbb{L} \arrow[d, equal] \\
k'[S_1, \ldots, S_n] \arrow[r] & k'(S_1, \ldots, S_n) \arrow[r] & k'(S_1, \ldots, S_n)(a_1, \ldots, a_r) \\
k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[u] \arrow[d] & & \\
k[T_1, \ldots, T_n][a_1, \ldots, a_r] \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & k(T_1, \ldots, T_n)(a_1, \ldots, a_r) \arrow[uu] \arrow[d, equal] \\
A & & Q(A)
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt $g_i(a_i) = 0$ für jedes $a_i \in \mathbb{L}$. Folglich ist die Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ separabel. Man beachte, dass $k[T_1, \ldots, T_n] \subseteq k'[S_1, \ldots, S_n]$ endlich ist.

Mit den so definierten Daten $R, \mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ können wir den Beweis abschliessen. Die Ringerweiterungen $k[T_1, \ldots, T_n] \subseteq R$ sowie $k[T_1, \ldots, T_n] \subseteq A$ sind endlich und somit ganz. Für die ganzen Abschlüsse in $\mathbb{L}$ erhalten wir daher:

$$\overline{R}^{\mathbb{L}} \ = \ \overline{k[T_1, \ldots, T_n]}^{\mathbb{L}} \ = \ \overline{A}^{\mathbb{L}}.$$

Nach Satz 8.4.4 ist $R \subseteq \overline{R}^{\mathbb{L}}$ und damit auch $k[T_1, \ldots, T_n] \subseteq \overline{R}^{\mathbb{L}}$ endlich. Folglich ist $A \subseteq \overline{A}^{\mathbb{L}}$ endlich. Da A noethersch ist, muss auch $Q(A) \subseteq \overline{A}^{\mathbb{L}}$ ein endlicher A-Modul sein. □

Folgerung 8.4.7. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Dann gibt es eine normale affine Varietät $\widetilde{X}$ und einen endlichen surjektiven Morphismus $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ mit folgender Eigenschaft:*

(Nor) *Ist $\varphi\colon Y \to X$ ein dominanter Morphismus von einer normalen affinen Varietät Y nach X, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to \widetilde{X}$ mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird*

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\
Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es sei $A := \mathcal{O}(X)$, und es sei $\overline{A} \subseteq \mathbb{K}(X)$ der ganze Abschluss von A in $\mathbb{K}(X)$. Nach Satz 8.4.5 ist $\overline{A}$ eine normale affine Algebra, und $A \subseteq \overline{A}$ ist eine ganze Ringerweiterung.

Wir erhalten also eine normale affine Varietät $\widetilde{X} := \mathrm{Spec}(\overline{A})$, und die Inklusion $A \subseteq \overline{A}$ Definiert einen dominanten endlichen (und somit surjektiven) Morphismus $\nu\colon \widetilde{X} \to X$.

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft seien eine normale affine Varietät Y und ein dominanter Morphismus $\varphi\colon Y \to X$ gegeben. Für die beteiligten Komorphismen ergibt sich das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{O}(\widetilde{X}) \arrow[llld, "\varphi^*"'] \arrow[dr] & \\
\mathbb{K}(Y) & \supseteq & \mathcal{O}(Y) & \mathcal{O}(X) \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "\nu^*"'] & \subseteq \ \mathbb{K}(X) \arrow[llll, bend left, "\varphi^*"]
\end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{O}(Y)$ ganz abgeschlossen in $\mathbb{K}(Y)$ ist, gilt $\varphi^*(\mathcal{O}(\widetilde{X})) \subseteq \mathcal{O}(Y)$. Also erhält man durch Einschränken von φ^* einen Algebrenhomomorphismus $\mathcal{O}(\widetilde{X}) \to \mathcal{O}(Y)$. Der zugehörige Morphismus $Y \to \widetilde{X}$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

Folgerung 8.4.8. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Dann gibt es ein $0 \neq f \in \mathcal{O}(X)$, sodass die affine Varietät X_f normal ist.*

Beweis. Die Normalisierung $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ ist nach Konstruktion birational. Satz 7.2.16 liefert ein $0 \neq f \in \mathcal{O}(X)$ und einen Isomorphismus $\nu^{-1}(X_f) \to X_f$. Mit $\widetilde{X}$ ist auch $\nu^{-1}(X_f) = \widetilde{X}_{\nu^*(f)}$ normal; siehe Lemma 8.3.3. Folglich ist $X_f \cong \nu^{-1}(X_f)$ normal. □

Aufgaben zu Abschnitt 8.4.

Aufgabe 8.4.9. Es sei $X := V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$. Zeige, dass $\nu \colon \mathbb{K} \to X$, $z \mapsto (z^3, z^2)$ eine Normalisierung von X ist.

8.5. **Morphismen III*.**

Definition 8.5.1. Es seien $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Ein Element $s \in S$ heisst *ganz über* $\mathfrak{a}$, falls es eine Ganzheitsgleichung

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \ = \ 0$$

mit Elementen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ erfüllt. Der *ganze Abschluss* des Ideals $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist die folgende Teilmenge im ganzen Abschluss $\overline{R}$ von R:

$$\overline{\mathfrak{a}} \ := \ \{b \in S; \ b \text{ ganz über } \mathfrak{a}\} \ \subseteq \ \overline{R}.$$

Satz 8.5.2. *Es seien $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $\mathfrak{b} \subseteq \overline{R}$ das von $\mathfrak{a}$ im ganzen Abschluss von R erzeugte Ideal.*

(i) *Es gilt $\overline{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \overline{R}$*
(ii) *Ist R normal, so gilt $\overline{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq R$.*
(iii) *Ist R normal und $\mathfrak{a}$ ein Primideal, so gilt $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \subseteq R$.*

Beweis. Nur bei Aussage (i) ist etwas zu zeigen. Ist $s \in \overline{\mathfrak{a}}$ gegeben, so haben wir eine Ganzheitsgleichung $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{a}$. Das impliziert $s \in \overline{R}$ und $s^n \in \mathfrak{b}$. Letzteres bedeutet $s \in \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Es sei nun $s \in \sqrt{\mathfrak{b}}$. Dann gilt $s^n = a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $s_i \in \overline{R}$. Nach Satz 7.3.3 ist der R-Modul $M := R[s_1, \ldots, s_n]$ ein endlich erzeugt, etwa durch $u_1, \ldots, u_m \in M$. Es gilt $s^n M \subseteq \mathfrak{a} M$ und somit erhalten wir Darstellungen

$$s^n u_i \ = \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j, \qquad a_{ij} \in \mathfrak{a}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Mit der Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ können wir diese Gleichungen schreiben als $(s^n E_m - A) \cdot u = 0$, wobei $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Lemma 7.3.4 liefert $\det(s^n E_m - A) = 0$, was eine Ganzheitsgleichung für s^n, und somit auch für s, über $\mathfrak{a}$ darstellt. □

Satz 8.5.3. *Es sei R ein normaler Ring mit Quotientenkörper $\mathbb{K} := Q(R)$. Weiter seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung und $b \in \mathbb{L}$ ein algebraisches Element mit Minimalpolynom $f_b \in \mathbb{K}[T]$ über $\mathbb{K}$. Ist $b \in \mathbb{L}$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, so liegen die Koeffizienten von $f_b \in \mathbb{K}[T]$ in $\sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Wir wählen einen algebraischen Abschluss $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ mit $b \in \overline{\mathbb{K}}$. Dann zerfällt das Minimalpolynom $f_b \in \mathbb{K}[T]$ über $\overline{\mathbb{K}}$ in Linearfaktoren:

$$f_b \quad = \quad (T - b_1) \cdots (T - b_n), \qquad \text{wobei } b_i \in \overline{\mathbb{K}}, \quad b_1 = b.$$

Wir zeigen, dass mit b_1 auch $b_2, \ldots, b_n$ ganz über $\mathfrak{a} \subseteq R$ sind. Dazu sei $0 \neq f \in R[T]$ ein normiertes Polynom mit $f(b_1) = 0$, dessen Koeffizienten aus $\mathfrak{a}$ stammen. Dann gilt $f = h f_b$ mit einem $h \in \mathbb{K}[T]$. Das impliziert $f(b_i) = 0$ für jedes $i = 2, \ldots, n$. Somit sind auch $b_2, \ldots, b_n \in \overline{\mathbb{K}}$ ganz über $\mathfrak{a}$ und liegen somit in $\sqrt{\mathfrak{a}}$; siehe Satz 8.5.2. Die Koeffizienten von f_b ergeben sich nun durch Ausmultiplizieren und liegen ebenfalls in $\sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Satz 8.5.4 (Going-Down-Theorem)**.** *Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung, wobei S Integritätsring und R normal sei. Weiter seien $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ Primideale in R und $\mathfrak{q}_2$ ein Primideal in S mit $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}_1$ in S mit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$.*

Lemma 8.5.5. *Es seien $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung, $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $\mathfrak{P} \subseteq S$ das von $\mathfrak{p}$ in S erzeugte Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Es gibt ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq S$ mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.*

(ii) *Es gilt* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass (i) gilt. Dann haben wir $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{q}$ und erhalten $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ mit

$$\mathfrak{p} \ \subseteq \ \mathfrak{P} \cap R \ \subseteq \ \mathfrak{q} \cap R \ = \ \mathfrak{p}.$$

Es gelte nun (ii). Wir betrachten das multiplikative System $U := R \setminus \mathfrak{p}$ und die Ringerweiterung $U^{-1}R \subseteq U^{-1}S$. Es gilt

$$U \cap \mathfrak{P} \ = \ (R \setminus \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{P} \ = \ (R \cap \mathfrak{P}) \setminus \mathfrak{p} \ = \ \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p} \ = \ \emptyset.$$

Also ist $U^{-1}\mathfrak{P} \subseteq U^{-1}S$ ein echtes Ideal. Es sei $\mathfrak{m} \subseteq U^{-1}S$ ein maximales Ideal mit $U^{-1}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{m}$. Wir setzen $\mathfrak{q} := \mathfrak{m} \cap S$. Dann gilt

$$\mathfrak{p} \ \subseteq \ \mathfrak{P} \cap R \ \subseteq \ U^{-1}\mathfrak{P} \cap R \ \subseteq \ \mathfrak{m} \cap R \ = \ \mathfrak{m} \cap S \cap R \ = \ \mathfrak{q} \cap R.$$

Andererseits gilt $\mathfrak{q} \cap U \subseteq \mathfrak{m} \cap U = \emptyset$. Wir schließen $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$. Als Urbild des Primideals $\mathfrak{m} \subseteq U^{-1}S$ ist $\mathfrak{q} \subseteq S$ ein Primideal. □

Lemma 8.5.6. *Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $\mathfrak{b} \subseteq S$ das von $\mathfrak{a}$ in S erzeugte Ideal. Dann ist jedes $b \in \mathfrak{b}$ ganz über $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst Elemente $b \in \mathfrak{b}$ der Form $b = as$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $s \in S$. Da s ganz über R ist, haben wir eine Gleichung

$$s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0 \ = \ 0$$

mit Koeffizienten $c_i \in R$. Multiplikation dieser Gleichung mit a^n liefert eine Ganzheitsgleichung für as über $\mathfrak{a}$:

$$(as)^n + ac_{n-1}(as)^{n-1} + \ldots + a^{n-1}c_1(as) + a^n c_0 \ = \ 0.$$

Das allgemeine Element $b \in \mathfrak{b}$ ist von der Gestalt $b = a_1 s_1 + \ldots + a_k s_k$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $s_i \in S$. Wie eben gesehen, ist jedes $a_i s_i$ ganz über $\mathfrak{a}$. Satz 8.5.2 zeigt, dass b ganz über $\mathfrak{a}$ ist. □

Beweis von Satz 8.5.4. Wir betrachten die Lokalisierung $S_{\mathfrak{q}_2}$, die Ringerweiterung $R \subseteq S_{\mathfrak{q}_2}$, das von $\mathfrak{p}_1 \subseteq R$ in $S_{\mathfrak{q}_2}$ erzeugte Ideal $\mathfrak{P}_1 \subseteq S_{\mathfrak{q}_2}$ und behaupten zunächst

$$\mathfrak{P}_1 \cap R \ = \ \mathfrak{p}_1.$$

Die Inklusion „$\supseteq$" ist offensichtlich. Zum Nachweis von „$\subseteq$" sei $b \in \mathfrak{P}_1 \cap R$ gegeben. Für $b = 0$ ist nichts zu zeigen, sodass wir $b \neq 0$ annehmen dürfen. Wegen $b \in \mathfrak{P}_1$ haben wir $b = s/u$ mit einem Element s aus dem von $\mathfrak{p}_1$ in S erzeugten Ideal und einem Element $u \in S \setminus \mathfrak{q}_2$. Nach Lemma 8.5.6 ist s ganz über $\mathfrak{p}_1$. Nach Satz 8.5.3 ist das Minimalpolynom $f_s \in Q(R)[T]$ von $s \in Q(S)$ von der Form

$$f_s \ = \ s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0$$

mit Koeffizienten $c_i \in \mathfrak{p}_1$. Wegen $0 \neq b \in R$ können wir einen Automorphismus des Polynomringes definieren durch

$$\Phi \colon Q(R)[T] \ \to \ Q(R)[S], \qquad T \ \mapsto \ bT.$$

Mit f_s ist dann auch Polynom $f_u := b^{-n}\Phi(f_s) \in Q(R)[T]$ irreduzibel. Weiter ist f_u normiert und mit $u = s/b$ erhalten wir

$$f_u(u) \ = \ \frac{1}{b^n} f_s(bu) \ = \ \frac{1}{b^n} f_s(s) \ = \ 0.$$

Somit ist $f_u \in Q(R)[T]$ das Minimalpolynom von $u \in Q(S)$ über $Q(R)$. Konkret ist f_u gegeben durch

$$f_u \ = \ T^n + \frac{c_{n-1}}{b} t^{n-1} + \ldots + \frac{c_1}{b^{n-1}} T + \frac{c_0}{b^n}$$

Nun ist $u \in S$ ganz über R. Nach Satz 8.5.3 liegen daher alle Koeffizienten r_i von f_u in R. Dabei gilt $b^{n-1}r_i = c_i \in \mathfrak{p}_1$. Nehmen wir an, wir hätten $b \notin \mathfrak{p}_1$. Dann hätte man $r_i \in \mathfrak{p}_1$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Das impliziert $s^n \in \mathfrak{P}_1$ und somit $s^n \in \mathfrak{q}_2$, was wiederum $s^n \in \mathfrak{q}_2$ impliziert. Widerspruch zu $s \in S \setminus \mathfrak{q}_2$. Also gilt $b \in \mathfrak{p}_1$ und wir haben, wie behauptet

$$\mathfrak{P}_1 \cap R \;=\; \mathfrak{p}_1.$$

Nach Lemma 8.5.5 gibt es dann ein Primideal $\mathfrak{q}_1' \subseteq S_{\mathfrak{q}_2}$ mit $\mathfrak{q}_1' \cap R = \mathfrak{p}_1$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{q}_1' \cap S$ die gewünschten Eigenschaften hat. Offensichtlich gilt $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$ Als Urbild des Primideals $\mathfrak{q}_1'$ ist $\mathfrak{q}_1$ zudem ein Primideal. Da $\mathfrak{q}_1'$ ein echtes Ideal in $S_{\mathfrak{q}_2}$ ist, besitzen $S \cap \mathfrak{q}_1'$ und $S \setminus \mathfrak{q}_2$ leeren Durchschnitt. Das bedeutet $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$. □

Satz 8.5.7. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter endlicher Morphismus irreduzibler affiner Varietäten, wobei Y normal sei. Weiter seien $B \subseteq Y$ abgeschlossen, irreduzibel und $k := \dim(B)$.*

(i) *Für jede irreduzible Komponente $A \subseteq \varphi^{-1}(B)$ gilt $\varphi(A) = B$.*
(ii) *Das Urbild $\varphi^{-1}(B) \subseteq X$ ist rein k-dimensional.*

Beweis. Der Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ ist injektiv, da φ dominant ist. Insbesondere ist $R := \varphi^*(\mathcal{O}(Y))$ isomorph zu $\mathcal{O}(Y)$ und somit normal. Mit $S := \mathcal{O}(X)$ erhalten wir eine endliche Ringerweiterung $R \subseteq S$. Wir betrachten die Primideale

$$\mathfrak{p}_1 := \varphi^*(I_Y(B)) \subseteq R, \qquad \mathfrak{p}_2 := \varphi^*(I_Y(\varphi(A)) \subseteq R, \qquad \mathfrak{q}_2 := I_X(A) \subseteq S.$$

Wegen $\varphi(A) \subseteq B$ gilt $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$. Weiter gilt $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_2 \cap R$; siehe Satz 7.2.2. Nach Satz 7.4.4 ist das Bild $\varphi(A) \subseteq B$ eine abgeschlossene Menge in Y.

Nehmen wir nun an, es gelte $\varphi(A) \neq B$. Dann gilt $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Das Going-Down Theorem 8.5.4 liefert uns ein Primideal $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ in S mit $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R$. Dabei muss $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{q}_2$ gelten. Die Menge $A' := V_X(\mathfrak{q}_1)$ ist abgeschlossen und irreduzibel in X. Wegen $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ gilt $A \subsetneq A'$ und $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R$ bedeutet $\varphi(A') = B$. Zusammengenommen haben wir $A \subsetneq A' \subseteq \varphi^{-1}(B)$. Andererseits ist A als irreduzible Komponente eine maximale abgeschlossene Teilmenge von $\varphi^{-1}(B)$. Widerspruch. □

Satz 8.5.8. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter endlicher Morphismus irreduzibler affiner Varietäten, wobei Y normal sei. Dann ist φ eine offene Abbildung.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ offen. Wir zeigen, dass $C := X \setminus \varphi(U)$ abgeschlossen ist. Andernfalls gibt es einen Punkt $x \in U$ mit $\varphi(x) \in \overline{C}$. Es sei $B \subseteq \overline{C}$ eine irreduzible Komponente mit $\varphi(x) \in B$. Dann gibt es eine irreduzible Komponente $A \subseteq \varphi^{-1}(B)$ mit $x \in U \cap A$. Somit ist $U \cap A$ dicht in A. Satz 8.5.7 liefert $\varphi(A) = B$. Mit $\varphi(A \cap U) \subseteq B \cap \varphi(U)$ sehen wir, dass $B \cap \varphi(U)$ dicht in B liegt. Ebenso liegt $B \cap C$ dicht in B. Nach Satz 8.1.12 sind $B \cap \varphi(U)$ sowie $B \cap C$ konstruierbar und enthalten somit jeweils nichtleere offene Teilmengen von B. Letztere sind disjunkt; Widerspruch zur Irreduzibilität von B. □

Satz 8.5.9. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler affiner Varietäten und es sei $d := \dim(X) - \dim(Y)$. Dann gibt es eine nichtleere Hauptmenge $Y_0 \subseteq Y$, sodass die Einschränkung $\varphi_0 := \varphi_{|X_0}\colon X_0 \to Y_0$, wobei $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$, folgende Eigenschaften besitzt.*

(i) *Ist $B \subseteq Y_0$ eine k-dimensionale irreduzible abgeschlossene Teilmenge, ist das Urbild $\varphi_0^{-1}(B) \subseteq X_0$ rein $(k+d)$-dimensional.*
(ii) *Die Einschränkung $\varphi_0\colon X_0 \to Y_0$ ist eine offene Abbildung.*

Lemma 8.5.10. *Es seien X und Y affine Varietäten. Dann sind die Projektionen $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_y\colon X \times Y \to Y$ offene Abbildungen.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X \times Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{pr}_X(U) \subseteq X$ eine offene Menge ist. Es gilt

$$\mathrm{pr}_X(U) \ = \ \bigcup_{y \in Y} \mathrm{pr}_X(U \cap (X \times \{y\}))$$

Für jedes $y \in Y$ ist $X \times \{y\}$ abgeschlossen in $X \times Y$ und die Projektion pr_X definiert einen Isomorphismus von $X \times \{y\}$ auf X. Somit stellt die obige Formel das Bild $\mathrm{pr}_X(U)$ als Vereinigung offener Teilmengen von X dar. □

Beweis von Satz 8.5.9. Nach Folgerung 8.4.8 gibt es eine nichtleere Hauptmenge $Y_0 \subseteq Y$, sodass Y_0 normal ist. Durch Verkleinern von Y_0 erreichen wir, dass wir in der Situation von Satz 8.1.2 sind. Dabei ist mit Y_0 auch $Y_0 \times \mathbb{K}$ normal. Die Behauptungen folgen somit aus den Sätzen 8.5.7, 8.5.8 und Lemma 8.5.10. □

Aufgaben zu Abschnitt 8.5.

Mathematisches Institut, Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen
Email address: juergen.hausen@uni-tuebingen.de

Institut für Mathematik, Universität Oldenburg, 26111 Oldenburg
Email address: milena.wrobel@uni-oldenburg.de