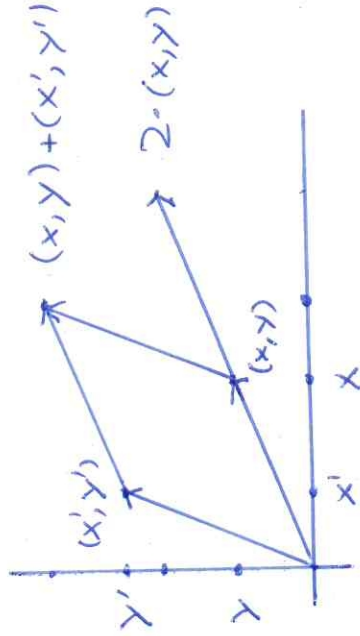


Frage: Was ist lineare Algebra?

Beispiele für lineare Abbildungen:

Antwort: Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen.

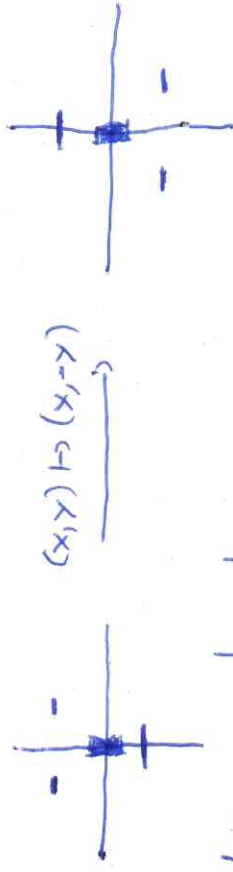
Beispiel für einen Vektorraum:
Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$.



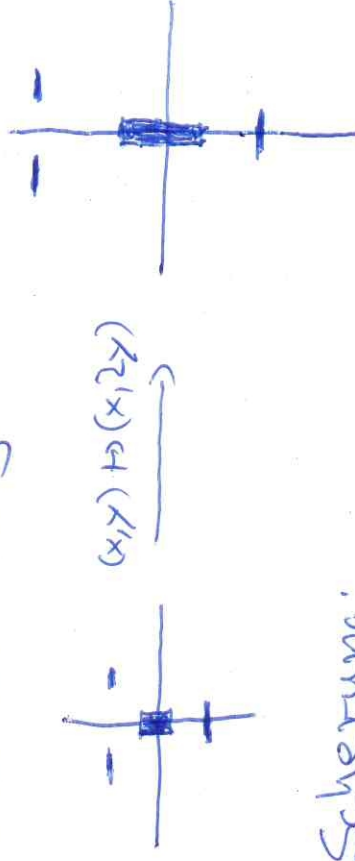
- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $2 \cdot (x, y) = (2x, 2y)$

Man kann in $\mathbb{R}^2$ addieren und um einen Faktor strecken.

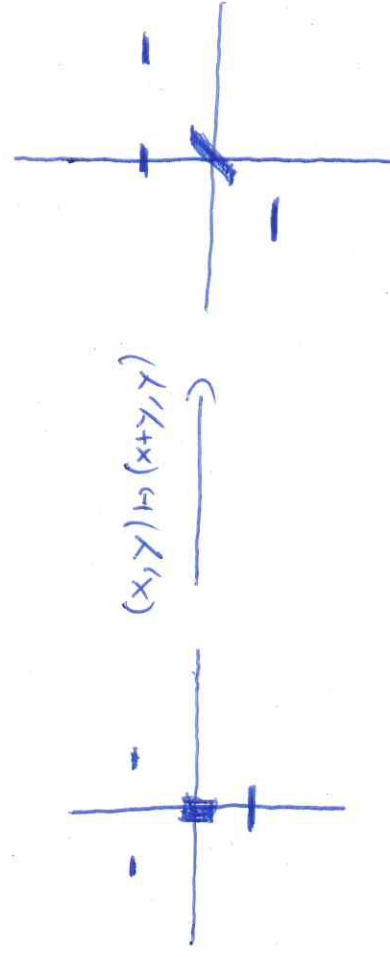
Achsen spiegeln:



Achsen strecken:



Scherung:



Beispiele für Aussagen:

- (i) Hans schläft.
- (ii) Hans schläft nicht.
- (iii) Hans schläft und Hans hat Augen geschlossen.
- (iv) Hans schläft oder Hans hat Augen geschlossen.
- (v) Wenn Hans schläft, dann hat Hans Augen geschlossen.
- (vi) Hans schläft genau dann, wenn Hans Augen geschlossen hat.

Eine Aussage ist entweder wahr (w) oder falsch (f).

Prinzip Aus gegebenen Aussagen A, B gewinnt man neue Aussagen:

- (i) A wird zu "nicht A".
- (ii) Aus A, B wird "A und B".
- (iii) Aus A, B wird "A oder B".
- (iv) Aus A, B wird "Wenn A, dann B" ($A \Rightarrow B$).
- (v) Aus A, B wird "Genau dann A, wenn B" ($A \Leftrightarrow B$)

Frage: Was ist die (genaue) Bedeutung von "nicht A", "A und B", ... ?

Definition von "nicht A":

A	nicht A
w	f
f	w

← Wahrheitstafel

Definition von "A und B", "A oder B", ...

A	B	A und B	A oder B
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Bemerkung Gilt " $A \Leftrightarrow B$ ", so nennt man A und B äquivalent.

Wichtige Regeln:

- 1) $A \text{ und } (B \text{ oder } C)$
 $\Leftrightarrow$
 $(A \text{ und } B) \text{ oder } (A \text{ und } C)$
- 2) $A \text{ oder } (B \text{ und } C)$
 $\Leftrightarrow$
 $(A \text{ oder } B) \text{ und } (A \text{ oder } C)$
- 3) $\text{nicht } (A \text{ und } B)$
 $\Leftrightarrow$
 $(\text{nicht } A) \text{ oder } (\text{nicht } B)$
- 4) $\text{nicht } (A \text{ oder } B)$
 $\Leftrightarrow$
 $(\text{nicht } A) \text{ und } (\text{nicht } B)$

Verifikation der Aussage

nicht(A und B)

$(\iff)$

(nicht A) oder (nicht B)

mittels Wahrheitstafeln:

A	B	A und B	nicht(A und B)
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

A	B	nicht A	nicht B	(nicht A) oder (nicht B)
w	w	f	f	f
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

Bemerkung: In der Mathematik

wichtig: Allaussagen und
Existenzaussagen. Z.B.:

A: Für alle Teiler x von 12
gilt: x ist Primzahl.

E: Es gibt eine natürliche
Zahl x , so dass $x + x^2 < 4$.

Negation:

nicht A: Es gibt einen Teiler x
von 12, so dass x
keine Primzahl.

nicht E: Für alle natürlichen
Zahlen x gilt:
 $x + x^2 \geq 4$

In der Mathematik arbeiten wir mit klar definierten Objekten und Begriffen. Z.B.:

Definition. Es seien a und n ganze Zahlen. Man nennt a Teiler von n (in Zeichen $a|n$), falls es eine ganze Zahl b gibt, sodass $n = a \cdot b$ gilt.

Damit formulieren wir Sätze.
Z.B.:

Satz. (Voraussetzung:) Es seien a, n, n' ganze Zahlen, sodass $a|n$ und $a|n'$ gilt.
(Aussage:) Dann gilt:
 $a|(n+n')$

Sätze (Behauptungen, ...) müssen bewiesen werden. In der Sprache der Logik: Man verifiziert "Voraussetzung $\Rightarrow$ Aussage"

Beweis des Satzes. Wegen $a|n$ und $a|n'$ gibt es ganze Zahlen b, b' sodass gilt:

$$n = a \cdot b, \quad n' = a \cdot b'$$

Definition verwendet

Addieren der Gleichungen:

$$n+n' = ab + ab'$$

$$= a(b+b')$$

Ausklammern

Also, mit $c := b+b'$ gilt

$$n+n' = a \cdot c$$

D.h.: $a|(n+n')$. $\square$