

Beispiel (i) Menge der nat. Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

(ii) Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

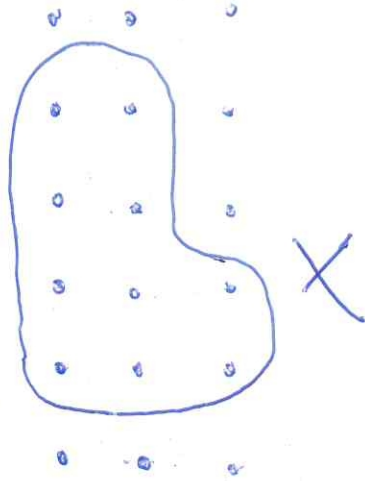
(iii) Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

(iv) Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Vereinbarung (Cantor) Menge:

Zusammenfassung von Objekten
(z.B. gewisse Zahlen, gewisse Punkte
der Ebene, ...)



Die in einer Menge X zusammen-
gefaßten Objekte heißen die
Elemente von X . Man schreibt

$x \in X$, falls x Element von X ,

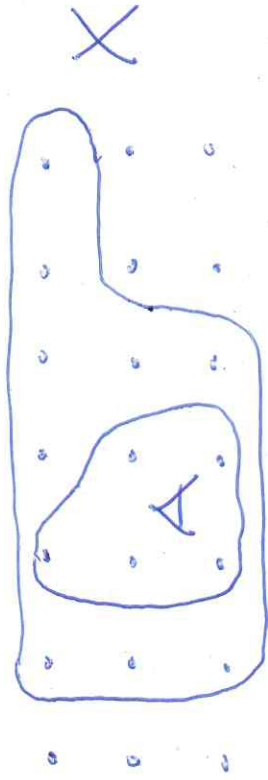
$x \notin X$, falls x nicht Element von X .

Die leere Menge $\emptyset$ (auch $\{\}$)
besitzt keine Elemente.

Eine Menge X heißt endlich,
falls X nur endlich viele Ele-
mente besitzt, ($X = \{x_1, \dots, x_n\}$).

Zwei Mengen X und Y
heißen gleich ($X = Y$),
falls sie genau dieselben
Elemente besitzen

Definition Es seien A und X Mengen. Nenne A Teilmenge von X ($A \subseteq X$, auch $X \supseteq A$), falls jedes Element von A auch Element von X ist.



Falls $A \subseteq X$ und $A \neq X$ gilt, so heißt A echte Teilmenge von X ($A \subset X$ bzw. $X \supset A$)

Bemerkung Für jede Menge X gilt:

$$\emptyset \subseteq X \quad \text{und} \quad X \subseteq X$$

Weiter hat man die Potenzmenge einer Menge X :

$$\mathcal{P}(X) := \{A; A \subseteq X\}$$

Beispiel Für $X = \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Bemerkung Es seien X, Y Mengen. Dann sind quivalent:

$$(i) \text{ Es gilt } X = Y.$$

$$(ii) \text{ Es gilt } X \subseteq Y \text{ und } Y \subseteq X.$$

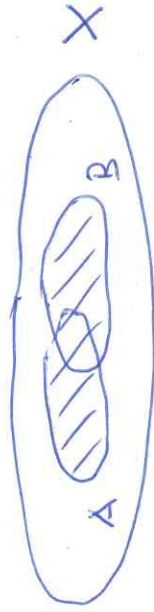
Schreibweise Teilmenge durch "ausdrckende Eigenschaft" angeben:

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}.$$

Definition Es seien X Menge und A, B Teilmengen von X .

(i) Die Vereinigung von A, B ist

$$A \cup B := \{x \in X; x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



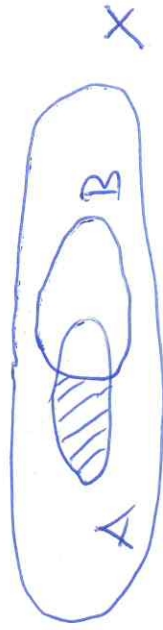
(ii) Der Durchschnitt von A, B ist

$$A \cap B := \{x \in X; x \in A \text{ und } x \in B\}$$



(iii) Das Komplement von B in A ist

$$A \setminus B := \{x \in X; x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Satz Es seien X Menge und $A, B, C \subseteq X$ Teilmengen. Dann gilt

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Beweis. Es seien $A, B, C \subseteq X$. Wir zeigen (exemplarisch):

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Es gilt:

$$A \setminus (B \cup C) = \{x \in X; x \in A \text{ und } x \notin (B \cup C)\}$$

$$= \{x \in X; x \in A \text{ und nicht}(x \in (B \cup C))\}$$

$$= \{x \in X; x \in A \text{ und (nicht}((x \in B) \text{ oder } (x \in C)))\}$$

$$\stackrel{1.2.3}{=} \{x \in X; x \in A \text{ und (nicht}(x \in B) \text{ und nicht}(x \in C))\}$$

$$= \{x \in X; x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C)\}$$

$$\stackrel{\text{Trick}}{=} \{x \in X; (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C)\}$$

$$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

□

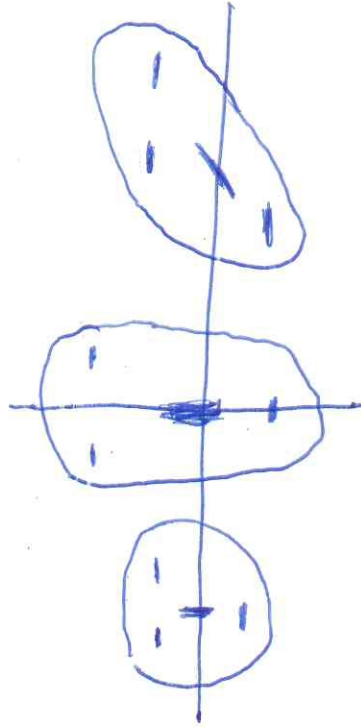
Definition Es seien $x_1, \dots, x_n$
Mengen. Direktes Produkt:

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n); x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

Nenne $(x_1, \dots, x_n)$ ein n -Tupel und
 x_i die i -te Komponente von
 $(x_1, \dots, x_n)$.

Beispiel Die reelle Ebene
ist ein direktes Produkt:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2); x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$



Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ sind
2-Tupel, d.h. Paare, (x_1, x_2)
reeller Zahlen.

Bemerkung Eine Folge in $\mathbb{R}$
schreibt man als

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{wobei } a_n \in \mathbb{R}.$$

Zum Beispiel:

$$a_n := \frac{1}{n}$$

Allgemeiner: X Menge und
 I Menge. Familie in X :

$$(x_i)_{i \in I}, \quad \text{wobei } x_i \in X$$

Index $\nearrow$ Indexmenge

Definition Es seien X eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X .

(i) Die Vereinigung der $A_i, i \in I$, ist

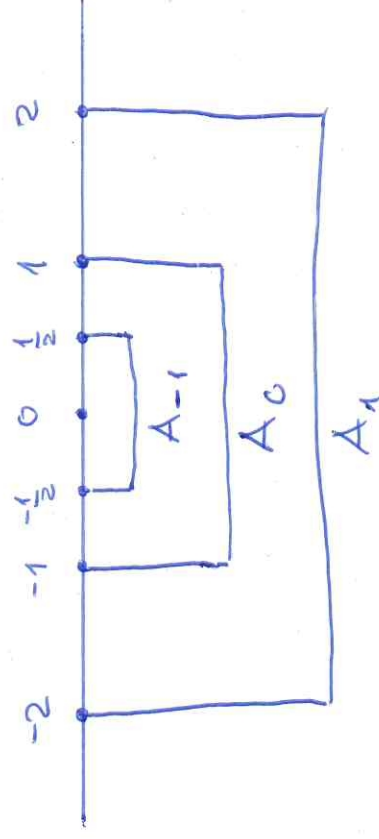
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X; x \in A_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

(ii) Der Durchschnitt der $A_i, i \in I$ ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X; x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Beispiel Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ betrachte

$$A_n := [-2^n, 2^n] \subset \mathbb{R}$$



Dann gilt:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R},$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \{0\}.$$

Satz Es seien X Menge und

$(A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J}$ Familien von

Teilmengen in X . Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \cup B_j$$

$$(*) \quad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$$

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$$

Beweis Wir zeigen (exemplarisch)
Aussage (*). Es gilt:

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X; \text{nicht}(x \in \bigcup_{i \in I} A_i)\}$$

$$= \{x \in X; \text{nicht}(\text{es gibt } i \in I \text{ mit } x \in A_i)\}$$

$$= \{x \in X; \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \notin A_i\}$$

$$= \{x \in X; \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in X \setminus A_i\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i. \quad \square$$