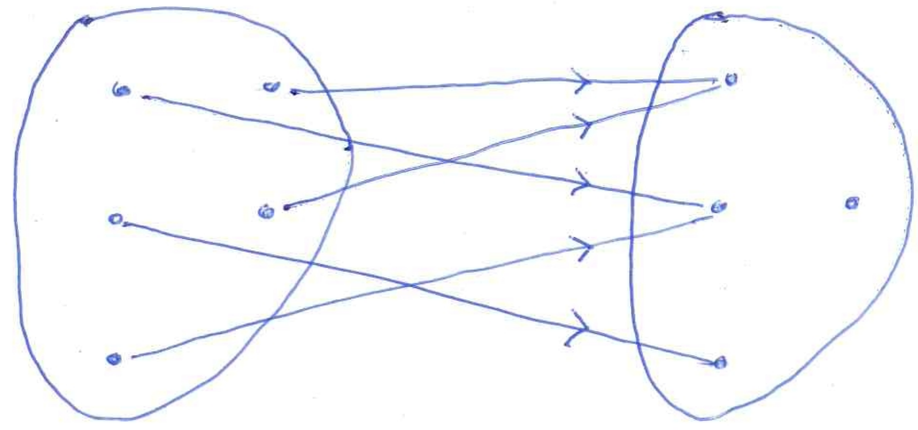
Beispiel Eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Definition Es seien X und Y Mengen. *Abbildung* von X nach Y: Vorschrift φ, die jedem $x \in X$ (genau) ein $\varphi(x) \in Y$ zuordnet; in Zeichen:

$$\varphi : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto \varphi(x).$$

Das Element $\varphi(x) \in Y$ heisst *Wert* von $x \in X$ unter φ.



$X \quad \varphi \quad Y$

Zwei Abbildungen $\varphi, \psi : X \to Y$ heissen gleich, falls $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

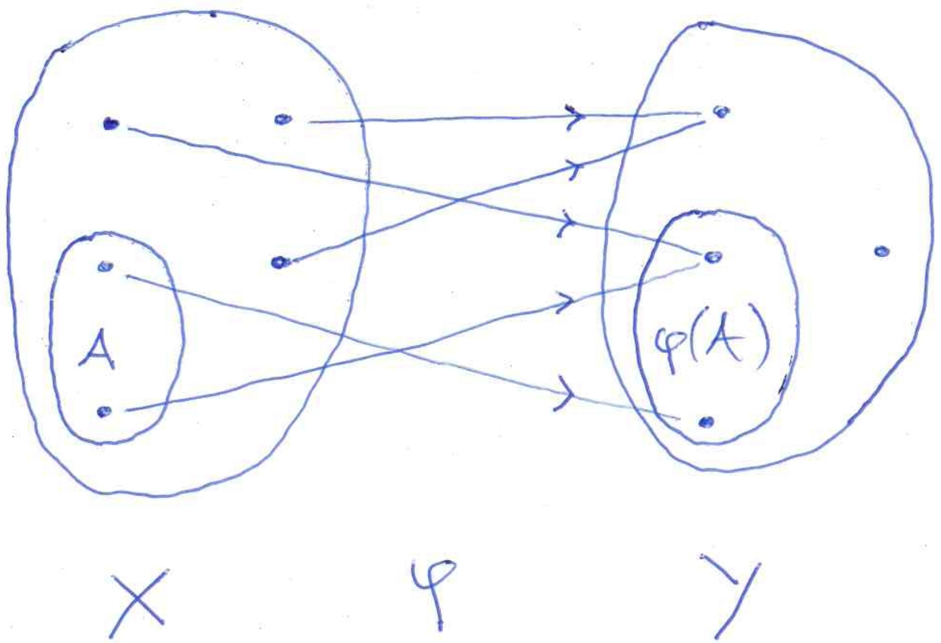
Beispiel Die *identische Abbildung* auf einer Menge X ist:

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X, \quad x \mapsto x.$$

Definition Es seien X und Y Mengen, $\varphi : X \to Y$ Abbildung.

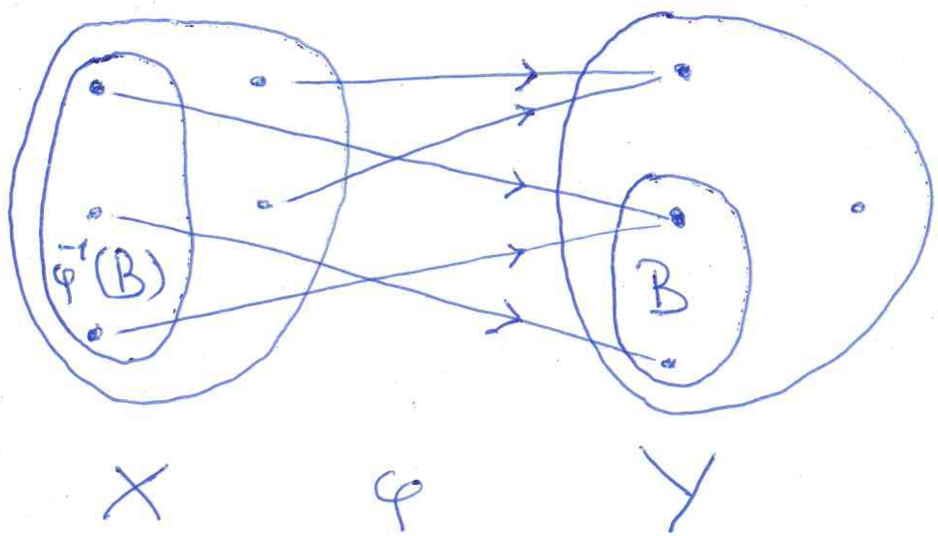
(i) Das Bild einer Teilmenge $A \subseteq X$ unter φ ist die Teilmenge

$$\varphi(A) := \{\varphi(x);\ x \in A\} \subseteq Y$$



(ii) Das Urbild einer Teilmenge $B \subseteq Y$ unter φ ist die Teilmenge

$$\varphi^{-1}(B) := \{x \in X;\ \varphi(x) \in B\} \subseteq X$$



Die Faser von $y \in Y$ ist

$$\varphi^{-1}(y) := \varphi^{-1}(\{y\})$$

Beispiel Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Es gilt:

$$f([-1,1]) = [0,1]$$

$$f^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1]$$

Faser von $y \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset, & y < 0, \\ \{0\}, & y = 0, \\ \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}, & y > 0. \end{cases}$$

Satz Es seien X, Y Mengen, $\varphi: X \to Y$ Abbildung.

(i) Es seien $A, A' \subseteq X$ und $(A_i)_{i\in I}$ Familie von Teilmengen von X. Dann gilt:

$$\varphi\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i),$$

$$\varphi\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i),$$

$$\varphi(A \setminus A') \supseteq \varphi(A) \setminus \varphi(A').$$

(ii) Es seien $B, B' \subseteq Y$ und $(B_i)_{i\in I}$ Familie von Teilmengen von Y. Dann gilt:

$$\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i),$$

$$\varphi^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i),$$

$$\varphi^{-1}(B \setminus B') = \varphi^{-1}(B) \setminus \varphi^{-1}(B').$$

__Beweis__ Wir zeigen exemplarisch

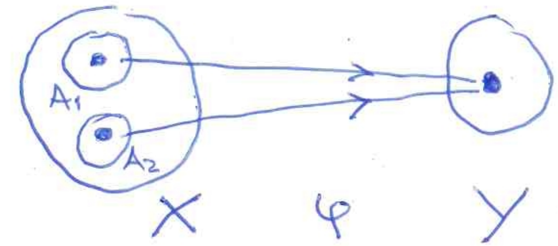
$$\varphi\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i).$$

Dafür ist nachzuweisen, dass "$y \in \varphi\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \Rightarrow y \in \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i)$" für alle $y \in Y$ gilt. Wir haben:

$$\begin{aligned} y \in \varphi\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\iff \text{es gibt } x \in \bigcap_{i\in I} A_i\text{, sodass } \varphi(x) = y \\ &\iff \text{es gibt } x \in X \text{ mit } x \in A_i \text{ für alle } i \in I \\ &\qquad \text{und } \varphi(x) = y \\ &\overset{*}{\Longrightarrow} \text{es gilt } y \in \varphi(A_i) \text{ für alle } i \in I \\ &\iff y \in \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i). \end{aligned}$$

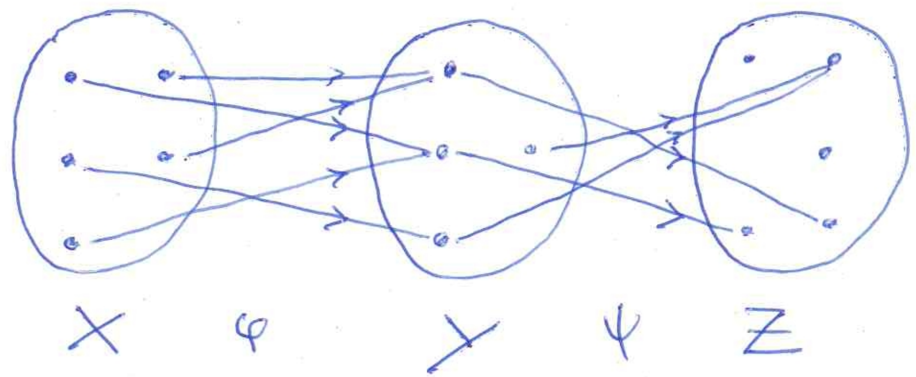
$\square$

Anmerkung zu $*$: "$\Longleftarrow$" gilt hier im Allg. nicht!



Definition Es seien $\varphi: X \to Y$ und $\psi: Y \to Z$ Abbildungen. Komposition "ψ nach φ":

$$\psi \circ \varphi : X \to Z, \quad x \mapsto \psi(\varphi(x))$$



Satz Es seien $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to Z$ und $\varkappa: Z \to W$ Abbildungen. Dann gilt

$$(\varkappa \circ \psi) \circ \varphi = \varkappa \circ (\psi \circ \varphi)$$

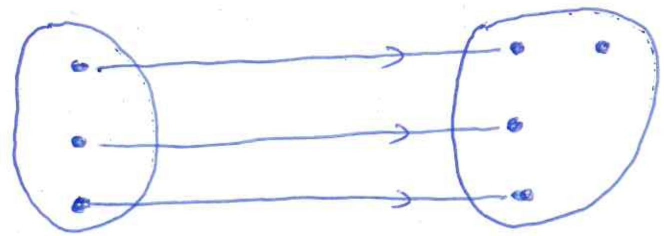
Beweis. Für jedes $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}((\varkappa \circ \psi) \circ \varphi)(x) &= (\varkappa \circ \psi)(\varphi(x)) \\ &= \varkappa(\psi(\varphi(x))) \\ &= \varkappa((\psi \circ \varphi)(x)) \\ &= (\varkappa \circ (\psi \circ \varphi))(x)\end{aligned}$$

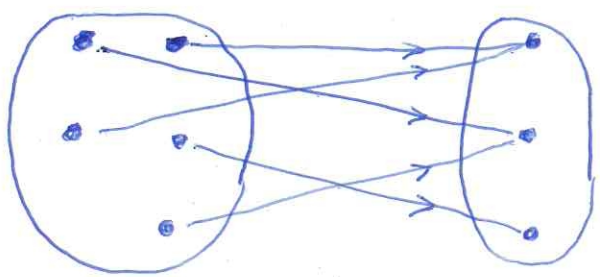
Somit stimmen die Abbildungen $(\varkappa \circ \psi) \circ \varphi$ und $\varkappa \circ (\psi \circ \varphi)$ überein. $\square$

Definition Eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ heisst

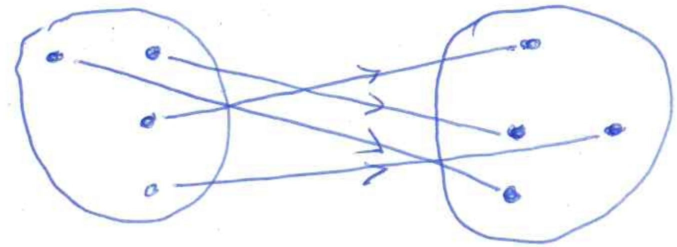
(i) *injektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ <u>höchstens</u> ein $x \in X$ gibt mit $\varphi(x) = y$,



(ii) *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ <u>mindestens</u> ein $x \in X$ gibt mit $\varphi(x) = y$,



(iii) *bijektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ <u>genau</u> ein $x \in X$ gibt mit $\varphi(x) = y$,



Bemerkung Es sei $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

(i) φ surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\varphi(X) = Y$.

(ii) φ bijektiv $\Longleftrightarrow$ φ injektiv und φ surjektiv.

Satz Es seien X, Y nichtleere Mengen, $\varphi: X \to Y$ Abbildung. Dann:

(i) φ injektiv $\Longleftrightarrow$ es gibt Abb. $\psi: Y \to X$ mit $\psi \circ \varphi = id_X$.

(ii) φ surjektiv $\Longleftrightarrow$ es gibt Abb. $\psi: Y \to X$ mit $\varphi \circ \psi = id_Y$.

Beweis Wir zeigen (i). Zu "$\Rightarrow$".

Zu $y \in \varphi(X)$ sei $x_y \in X$ das (eind.) Element mit $\varphi(x_y) = y$.

Wir wählen $a \in X$ und definieren:

$$\psi: Y \to X, \quad y \mapsto \begin{cases} x_y, & y \in \varphi(X), \\ a, & y \notin \varphi(X). \end{cases}$$

Zu zeigen: $\psi(\varphi(x)) = x$ für alle $x \in X$.

Es gilt:

$$\varphi(\psi(\varphi(x))) = \varphi(x_{\varphi(x)}) = \varphi(x)$$

Wegen φ injektiv: $\psi(\varphi(x)) = x$. Also

$$\psi \circ \varphi = id_X$$

Zu "$\Leftarrow$". Es sei $\psi: Y \to X$ mit

$$\psi \circ \varphi = id_X$$

Zu zeigen: Für alle $y \in Y$ und $x, x' \in X$ mit $\varphi(x) = y = \varphi(x')$ gilt $x = x'$.

Es gilt in dieser Situation:

$$x = \psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(x')) = x'.$$

$\square$

Definition Es sei $\varphi : X \to Y$ Abb.
Eine Abb. $\psi : Y \to X$ heißt *Umkehrabbildung* zu φ, falls

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y .$$

Satz Es sei $\varphi : X \to Y$ Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist bijektiv

(ii) φ besitzt eine Umkehrabb.

Gilt (ii), so ist die Umkehrabb. von φ eindeutig bestimmt.

Lemma. Es seien $\varphi : X \to Y$ Abb. und $\psi, \psi' : Y \to X$ Abb. mit

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X , \quad \varphi \circ \psi' = \mathrm{id}_Y .$$

Dann gilt $\psi = \psi'$.

Beweis Lemma. Für jedes $y \in Y$ gilt:

$$\psi(y) = \psi(\varphi(\psi'(y))) = \psi'(y). \quad \square$$

Beweis Satz Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Wissen: φ injektiv und φ surjektiv.

Voriger Satz: Es gibt $\psi, \psi' : Y \to X$ mit

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X , \quad \varphi \circ \psi' = \mathrm{id}_Y .$$

Lemma: $\psi = \psi'$. Somit: ψ Umkehrabbildung zu φ.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Voriger Satz: φ ist injektiv und surjektiv. Somit ist φ bijektiv. $\square$

Schreibweise Falls $\varphi : X \to Y$ bijektiv, bezeichne Umkehrabb. mit

$$\varphi^{-1} : Y \to X .$$