

Definition K Körper, K -Vektorraum:

Menge V mit

* innerer Verknüpfung, genannt

"Vektorraumaddition":

$$\text{add}_V: V \times V \rightarrow V, (v, v') \mapsto v+v',$$

* äußerer Verknüpfung, genannt

"Skalarmultiplikation":

$$\text{smult}_V: K \times V \rightarrow V, (a, v) \mapsto a \cdot v,$$

so dass gilt:

(VR1) $(V, +)$ ist abelsche Gruppe,

(VR2) Für alle $v \in V$, $a, a' \in K$ gilt

$$1 \cdot v = v, \quad (aa') \cdot v = a \cdot (a' \cdot v).$$

(VR3) Für alle $v, v' \in V$, $a, a' \in K$ gilt

$$(a+a') \cdot v = a \cdot v + a' \cdot v,$$

$$a \cdot (v+v') = a \cdot v + a \cdot v'.$$

Bemerkung Es seien K Körper,

V K -Vektorraum, kurz K -VR.

(i) Die Elemente von K nennt man Skalare, die Elemente von V Vektoren.

(ii) $a \in K$ immer von links an $v \in V$ heramultiplizieren:

$$\text{smult}_V(a, v) = a \cdot v$$

(iii) Das neutrale El. $0_v \in V$ bez. "+" nennt man den Nullvektor von V .

Konstruktion $\mathbb{K}$ körper. Betrachte

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

* komponentenweise Addition:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

* komponentenweise Skalarmultiplikation:

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n).$$

Satz Es sei $\mathbb{K}$ körper. Dann ist $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Beweis Zu (VR 1), kommut. von $+$:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Assoz. von $+$: gleiches Prinzip. Weiter:

$$0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0), \quad -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Zu (VR 2). Es gilt:

$$1_{\mathbb{K}} \cdot (x_1, \dots, x_n) = (1_{\mathbb{K}} \cdot x_1, \dots, 1_{\mathbb{K}} \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

$$(aa') \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((aa')x_1, \dots, (aa')x_n)$$

$$= (a(a'x_1), \dots, a(a'x_n))$$

$$= a \cdot (a'x_1, \dots, a'x_n)$$

$$= a \cdot (a' \cdot (x_1, \dots, x_n)).$$

Zu (VR 3). Es gilt:

$$(a+a') \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((a+a')x_1, \dots, (a+a')x_n)$$

$$= (ax_1 + a'x_1, \dots, ax_n + a'x_n)$$

$$= (ax_1, \dots, ax_n) + (a'x_1, \dots, a'x_n)$$

$$= a \cdot (x_1, \dots, x_n) + a' \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = a \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

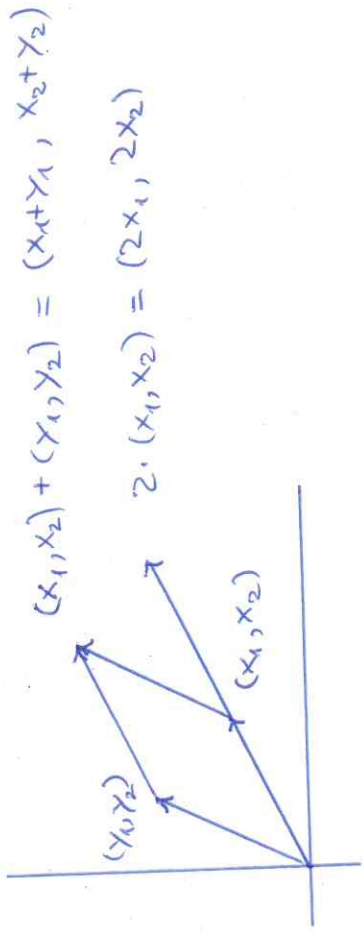
$$= (a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n))$$

$$= (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n)$$

$$= (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n)$$

$$= a \cdot (x_1, \dots, x_n) + a \cdot (y_1, \dots, y_n). \quad \square$$

Beispiel Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$ -VR:



Lemma Es seien K Körper und V ein K -VR. Dann gilt:

- (i) $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.
- (ii) $a \cdot 0_V = 0_V$ für alle $a \in K$.
- (iii) $a \cdot v = 0_V \Rightarrow a = 0_K$ oder $v = 0_V$
- (iv) $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Beweis Zu (i). Es gilt:

$$0_K \cdot v + 0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K \cdot v$$

Nach Addieren von $-(0_K \cdot v)$:

$$0_K \cdot v = 0_V.$$

Zu (ii). Es gilt:

$$a \cdot 0_V \stackrel{(i)}{=} a \cdot (0_K \cdot 0_V) = (a \cdot 0_K) \cdot 0_V \stackrel{(i)}{=} 0_K \cdot 0_V = 0_V$$

Zu (iii). Falls $a = 0_K$: Nichts zu zeigen.
Falls $a \neq 0_K$: Betrachte $a^{-1} \in K$. Dann:

$$\begin{aligned} v &= 1_K \cdot v = (a^{-1} a) \cdot v \\ &= a^{-1} \cdot (\underbrace{a \cdot v}_{= 0_V}) \stackrel{(ii)}{=} a^{-1} \cdot 0_V = 0_V. \end{aligned}$$

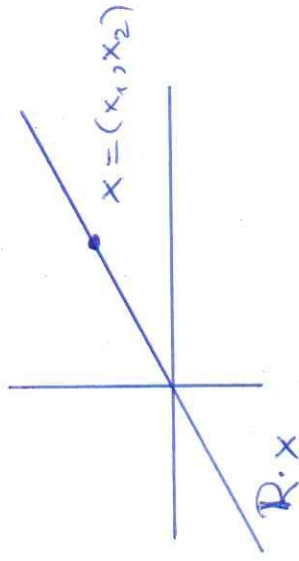
Zu (iv). Es gilt:

$$\begin{aligned} v + (-1_K) \cdot v &= 1_K \cdot v + (-1_K) \cdot v = (1_K + (-1_K)) \cdot v \\ &= 0_K \cdot v \stackrel{(i)}{=} 0_V. \end{aligned}$$

□

Beispiel Es sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
mit $x \neq (0,0)$. Ursprungsgerade
durch x :

$$\mathbb{R} \cdot x := \{ \lambda \cdot x; \lambda \in \mathbb{R} \}$$



Sind $y = \lambda \cdot x$ und $y' = \lambda' \cdot x$ aus
 $\mathbb{R} \cdot x$ sowie $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$y + y' = \lambda \cdot x + \lambda' \cdot x = (\lambda + \lambda') \cdot x \in \mathbb{R} \cdot x$$

$$a \cdot y = a \cdot (\lambda \cdot x) = (a\lambda) \cdot x \in \mathbb{R} \cdot x$$

Definition Es seien $\mathbb{K}$ Körper und
 V ein $\mathbb{K}$ -VR. Nenne $U \subseteq V$ Unter-
vektorraum ($U \leq_{\mathbb{K}} V$), falls

$$(UV1) \quad U \neq \emptyset.$$

$$(UV2) \quad \text{für alle } u, u' \in U: u + u' \in U$$

$$(UV3) \quad \text{für alle } u \in U, a \in \mathbb{K}: a \cdot u \in U.$$

Beispiel Es seien $\mathbb{K}$ Körper und
 V $\mathbb{K}$ -VR.

$$(i) \quad V \subseteq V \text{ ist } UVR.$$

$$(ii) \quad \{0_V\} \subseteq V \text{ ist } UVR.$$

Satz Es seien K Körper, V K -VR und $U \leq_{11_K} V$ ein UVR. Dann wird U ein 11_K -VR durch

$$\text{add}_U: U \times U \rightarrow U, (u, u') \mapsto u + \underset{\uparrow \text{ in } V}{u'}$$

$$\text{smult}_U: K \times U \rightarrow U, (a, u) \mapsto a \cdot \underset{\uparrow \text{ in } V}{u}$$

$$\text{Dabei: } 0_U = 0_V.$$

Beweis Wegen (UV2) und (UV3):

$\text{add}_U, \text{smult}_U$ wohldefiniert:

$$u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U,$$

$$a \in K, u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U.$$

Weiter: (VR2), (VR3) gelten in V
 $\Rightarrow$ (VR2), (VR3) gelten in U .

Noch zu zeigen: (VR1) gilt für U , d.h. (U, add_U) ist abelsche Gruppe.

Klar: add_U assoziativ und kommut.,
 $\Rightarrow \text{add}_U$ assoziativ und kommut.

Neutrales Element für add_U :

Reicht z.z.: $0_V \in U$.

Wähle bel. $u \in U$. Dann

$$0_V = u + \underbrace{(-u)}_{\in V} \stackrel{\text{Lemma}}{=} u + \underbrace{(-1_{11_K}) \cdot u}_{\in U} \in U.$$

Inverses zu $u \in U$: Es gibt $-u \in V$.
 Reicht z.z.: $-u \in U$. Es gilt:

$$-u = (-1_{11_K}) \cdot u \in U.$$

□

Satz Es seien K Körper, V K -VR
und $(U_i)_{i \in I}$ Familie von UVR
 $U_i \leq_{\parallel_2} V$. Dann:

$$\bigcap_{i \in I} U_i \leq_{\parallel_2} V$$

Beweis Setzen $U := \bigcap_{i \in I} U_i$.

Zu (UV1). Voriger Satz: Es gilt

$$0_V \in U_i \text{ für alle } i \in I$$

Also $0_V \in U$, d.h., $U \neq \emptyset$

Zu (UV2). Es seien $u, u' \in U$. Dann:

$$\begin{aligned} u, u' \in U_i \text{ f. alle } i \in I &\Rightarrow u + u' \in U_i \text{ f. alle } i \in I \\ &\Rightarrow u + u' \in U. \end{aligned}$$

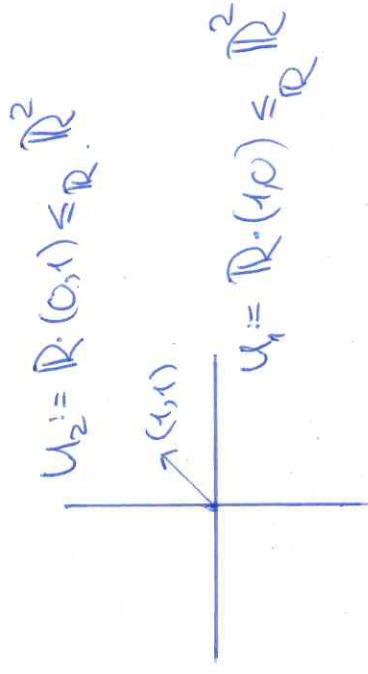
Zu (UV3). Es seien $u \in U, a \in K$.

Dann:

$$\begin{aligned} u \in U_i \text{ f. alle } i \in I &\Rightarrow a \cdot u \in U_i \text{ f. alle } i \in I \\ &\Rightarrow a \cdot u \in U. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung Die Vereinigung von
UVR ist im allg. kein UVR.

Betrachte in $\mathbb{R}^2$:



Dann: $(1,0), (0,1) \in U_1 \cup U_2$, aber

$$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U_1 \cup U_2$$

Somit (UV2) nicht erfüllt in $U_1 \cup U_2$.

Konstruktion Es seien X Menge,
 $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$ -VR. Betrachte

$$\text{Abb}(X, V) := \{\varphi; \varphi: X \rightarrow V \text{ Abbildung}\}$$

Definieren punktweise Ver-

knüpfungen:

$$(\varphi + \psi): x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$$

$$a \cdot \varphi: x \mapsto a \cdot \varphi(x)$$

Satz $(\text{Abb}(X, V), +, \cdot)$ ist ein
 $\mathbb{K}$ -VR mit Nullvektor $[x \mapsto 0_V]$.

Beweis Die VR-Axiome werden
punktweise nachgeprüft, z.B.:

Assoziativität von "+": Es seien
 $\varphi, \psi, \chi \in \text{Abb}(X, V)$. Dann gilt
für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} (\varphi + (\psi + \chi))(x) &= \varphi(x) + (\psi + \chi)(x) \\ &= \varphi(x) + (\psi(x) + \chi(x)) \\ &= (\varphi(x) + \psi(x)) + \chi(x) \\ &= (\varphi + \psi)(x) + \chi(x) \\ &= ((\varphi + \psi) + \chi)(x) \end{aligned}$$

Somit: $\varphi + (\psi + \chi) = (\varphi + \psi) + \chi$.

□