Definition $\mathbb{k}$ Körper, V $\mathbb{k}$-VR und $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ Familie von Vektoren $v_i \in V$.

Linearkombination über $\mathcal{F}$:

$$\sum_{i\in I} a_i \cdot v \in V$$

wobei $a_i \in \mathbb{k}$ und $a_i \neq 0_{\mathbb{k}}$ für höchstens endlich viele $i \in I$

Lineare Hülle (Erzeugnis, Aufspann) von $\mathcal{F}$ in V:

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) := \{v \in V;\ v \text{ Linkomb. über } \mathcal{F}\}$$

Für leere Fam. $\mathcal{F} = (\,)$: $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) := \{0_V\}$.

Schreibweise Für endl. Familien $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$:

* $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$ für Linkomb über $\mathcal{F}$
* $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$ für $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$.

Bemerkung $\mathbb{k}$ Körper, V $\mathbb{k}$-VR, $0_V \neq v \in V$.

Dann:

$$\mathrm{Lin}(v) = \{a \cdot v;\ a \in \mathbb{k}\} = \mathbb{k} \cdot v$$

die von v in V aufgespannte Ursprungsgerade. z.B. in $\mathbb{R}^3$ mit

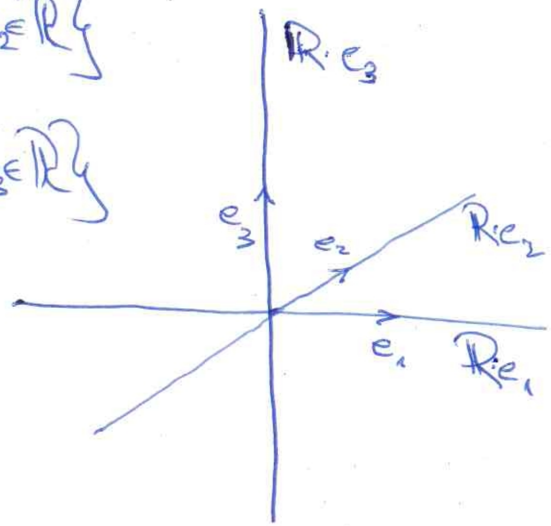
$e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$, $e_3 := (0,0,1)$

Koordinatenachsen:

$\mathrm{Lin}(e_1) = \{(x_1,0,0);\ x_1 \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Lin}(e_2) = \{(0,x_2,0);\ x_2 \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Lin}(e_3) = \{(0,0,x_3);\ x_3 \in \mathbb{R}\}$

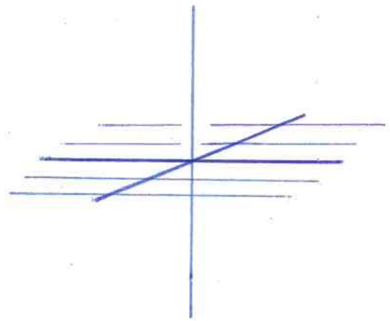


<u>Bemerkung</u> $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $u, v \in V$ mit $u \neq 0_V$, $v \notin \mathbb{K} \cdot u$. Dann:

$$\mathrm{Lin}(u,v) = \{a \cdot u + b \cdot v;\ a, b \in \mathbb{K}\}$$

die von u, v in V erzeugte Ursprungsebene. Z.B. in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Lin}(e_1, e_2)$$
$$= \{x_1 e_1 + x_2 e_2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x_1, x_2, 0);\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$



<u>Satz</u> $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ Fam. in V. Dann:

(i) $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ ist Unter-VR von V

(ii) $v_i \in V$ für jedes $i \in I$

<u>Bew</u> Fall 1: $\mathcal{F} = (\ )$. Dann (ii) klar und

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) = \{0_V\} \leq_{\mathbb{K}} V.$$

Fall 2: $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ mit $I \neq \emptyset$. Dann:

$$v_i = \sum_{j \in I} \delta_{ij} \cdot v \qquad \text{mit } \delta_{ij} := \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & i = j, \\ 0_{\mathbb{K}}, & i \neq j. \end{cases}$$

Somit $v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$. D.h.: (ii) und (UV1) sind gezeigt.

Zu (UV2). Betr.: $\sum_{i \in I} a_i v_i,\ \sum_{i \in I} b_i v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$.

Dann:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i\right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \cdot v_i\right) = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \cdot v_i$$
$$\in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$$

Zu (UV3) Betr.: $\sum_{i \in I} a_i v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$, $a \in \mathbb{K}$.

Dann:

$$a \cdot \sum_{i \in I} a_i \cdot v_i = \sum_{i \in I} (a a_i) \cdot v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F}). \quad \square$$

Satz $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ Fam. in V, $M := \{v_i : i \in I\}$. Dann:

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{U \leq_{\mathbb{K}} V \\ M \subseteq U}} U.$$

Beweis Fall 1: $\mathcal{F} = (\,)$. Dann $M = \emptyset$ und

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) = \{0_V\} = \bigcap_{U \leq_{\mathbb{K}} V} U.$$

Fall 2: $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ mit $I \neq \emptyset$.

Zu "$\subseteq$": Betrachte

$$v = \sum_{i \in I} a_i \cdot v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$$

z.z.: $v \in U$ für alle $U \leq_{\mathbb{K}} V$ mit $M \subseteq U$. Haben:

$$v_i \in U \text{ für alle } i \in I \overset{(UV3)}{\Longrightarrow} a_i \cdot v_i \in U \text{ für alle } i \in I$$
$$\overset{(UV2)}{\Longrightarrow} v = \sum_{i \in I} a_i \cdot v_i \in U$$

Zu "$\supseteq$": Voriger Satz: $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \leq_{\mathbb{K}} V$ und $M \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$. Damit:

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \supseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \cap \bigcap_{\substack{U \leq_{\mathbb{K}} V \\ M \subseteq U}} U = \bigcap_{\substack{U \leq_{\mathbb{K}} V \\ M \subseteq U}} U.$$

$\square$

Folgerung Es seien $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ Familie in V mit $v_i \in U$ für alle $i \in I$. Dann:

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \subseteq U$$

Folgerung $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ Familie in V. Dann ist $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ der kleinste Unter VR von V, der alle v_i, $i \in I$, enthält.

Definition $\mathbb{k}$ Körper, V $\mathbb{k}$-VR. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ in V heisst linear abhängig, falls es eine Linearkombination gibt

$$\sum_{i\in I} a_i \cdot v_i = 0_V \quad \text{mit } a_i \neq 0_{\mathbb{k}} \text{ für mindestens ein } i \in I$$

Beispiel $\mathcal{F} = (0_V)$ ist linear abhängig:

$$0_V = 1_{\mathbb{k}} \cdot 0_V, \quad \text{beachte: } 1_{\mathbb{k}} \neq 0_{\mathbb{k}}.$$

Beispiel $((1,0),(0,1),(1,1))$ in $\mathbb{R}^2$ ist linear abh.:

$$(0,0) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) + (-1)\cdot(1,1)$$

Satz $\mathbb{k}$ Körper, V $\mathbb{k}$-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann äquivalent:

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig

(ii) Es gibt $1 \le i \le n$ mit

$$v_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Beweis Zu "(i) ⇒ (ii)". Wegen $(v_1, \dots, v_n)$ lin. abh. gibt es Linearkomb.

$$0_V = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot v_j, \quad \text{wobei } a_i \neq 0_{\mathbb{k}} \text{ für ein } 1 \le i \le n.$$

Addieren $-(a_i \cdot v_i)$ zu dieser Glg.:

$$-a_i \cdot v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n$$

Mit $(-a_i)^{-1}$ multiplizieren:

$$v_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Zu "(ii) ⇒ (i)". Es sei $1 \le i \le n$ wie in (ii) gegeben. Dann gibt es $a_j \in \mathbb{k}$ mit

$$v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n$$

Setze $a_i := -1_{\mathbb{k}}$. Dann:

$$0_V = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot v_j. \quad \square$$

__Definition__ $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ in V heisst linear unabhängig, falls sie __nicht__ linear abhängig ist.

__Bemerkung__ Es seien $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR und $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ mit $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig.

(ii) Für jede Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_V \implies a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}$$

__Beispiel__ Die Familie $((1,0), (0,1))$ in $\mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig, denn

$$a_1 \cdot (1,0) + a_2 \cdot (0,1) = (0,0) \implies (a_1, a_2) = (0,0)$$
$$\implies a_1 = a_2 = 0.$$

__Satz__ $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann äquivalent:

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.

(ii) Für jedes $1 \le i \le n$ gilt
$$v_i \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

__Beweis__ Mit Satz 3.2.12 über lineare Abhängigkeit:

(i) ist die Negation von 3.2.12 (i)

(ii) ist die Negation von 3.2.12 (ii)

Damit "3.2.12(i) $\iff$ 3.2.12(ii)" $\implies$ "(i) $\iff$ (ii)". □