Definition $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Erzeugendensystem für V: Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ in V mit

$$V = \mathrm{Lin}(\mathcal{F}).$$

Beispiel *Standardeinheitsvektoren* in $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 := (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}),$$
$$e_2 := (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}),$$
$$\vdots$$
$$e_n := (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}).$$

Dann: $(e_1, \dots, e_n)$ Erz-Syst. für $\mathbb{K}^n$:

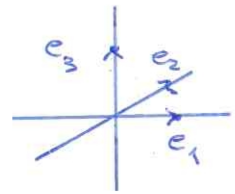
$$x \in \mathbb{K}^n \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$= x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$$
$$\in \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_n).$$

Definition $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Basis für V: Linear unabhängiges Erzeugendensystem für V.

Beispiel $(e_1, \dots, e_n)$ ist eine Basis für $\mathbb{K}^n$ (genannt *Standardbasis*).

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 3$



Wissen schon: $(e_1, \dots, e_n)$ ist Erz.-Syst.

Zu $(e_1, \dots, e_n)$ lin. unabh.: Es sei

$$a_1 \cdot e_1 + \dots + a_n \cdot e_n = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}).$$

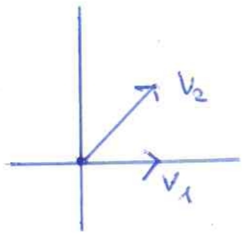
z.z.: $a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}$. Haben

$$(0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$
$$= (a_1, \dots, a_n)$$
$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Beispiel Betrachte im $\mathbb{R}^2$:

$v_1 := (1, 0)$

$v_2 := (1, 1)$



Dann: $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ Basis für $\mathbb{R}^2$.

Zu $\mathcal{B}$ erzeugend: Müssen jedes $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination über $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ schreiben.

Gesucht sind also $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Dafür müssen wir ein LGS lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Das LGS ist lösbar, wir können die Lösung direkt angeben:

$$x_2 = b_2, \qquad x_1 = b_1 - b_2.$$

Somit: Jedes $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ Linearkombination über $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.

Zu $\mathcal{B}$ linear unabh. Zu zeigen:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = x_2 = 0$$

Betrachten wieder zugehöriges LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Einzige Lösung:

$$x_2 = 0, \qquad x_1 = 0$$

Somit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ linear unabh.

Satz $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $B=(v_1,\dots,v_n)$ Basis für V. Dann hat jedes $v\in V$ eindeutige Darstellung

$$(*) \quad v = x_1\cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n, \quad x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}.$$

Beweis Wegen B Erz.-Syst.: Jedes $v\in V$ hat eine Darst $(*)$.

Eindeutigkeit von $(*)$: Betrachte 2 Darstellungen:

$$v = x_1\cdot v_1 + \dots + x_n\cdot v_n, \qquad x_i \in \mathbb{K}$$

$$v = y_1\cdot v_1 + \dots + x_n\cdot v_n, \qquad y_i \in \mathbb{K}$$

Zu zeigen: $y_i = x_i$ für $i=1,\dots,n$.

Haben:

$$0_V = (x_1\cdot v_1 + \dots + x_n\cdot v_n) - (y_1\cdot v_1 + \dots + y_n\cdot v_n)$$

$$= (x_1-y_1)\cdot v_1 + \dots + (x_n-y_n)\cdot v_n.$$

Wegen B linear unabhängig:

$$x_1-y_1 = \dots = x_n-y_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Somit: $x_1=y_1, \dots, x_n=y_n$. $\square$

Definition $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $B=(v_1,\dots,v_n)$ Basis für V. Weiter $v\in V$. Nenne

$$(*) \quad v = x_1\cdot v_1 + \dots + x_n\cdot v_n$$

die *Entwicklung* von v nach der Basis B. Weiter heisst

$$x_B(v) := (x_1,\dots,x_n)$$

wobei $x_1,\dots,x_n$ wie in $(*)$ der *Koordinatenvektor* von v bez. der Basis B.

__Beispiel__ Betrachte $B = ((1,0),(1,1))$ in $\mathbb{R}^2$

Für $v = (2,2)$:

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

D.h.: $x_B(v) = (0,2)$.

__Beispiel__ Für $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ in $\mathbb{K}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n, \quad \text{also } x_{\mathcal{E}}(x) = x.$$

__Bemerkung__ $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für $\mathbb{K}^n$, $w \in \mathbb{K}^n$. Dann erhält man

$$x_B(w) = (x_1, \dots, x_n)$$

durch Lösen des LGS

$$\begin{aligned} v_{11} x_1 + \dots + v_{n1} x_n &= w_1 \\ &\vdots \\ v_{1n} x_1 + \dots + v_{nn} x_n &= w_n \end{aligned}$$

wobei

$$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}), \quad w = (w_1, \dots, w_n)$$

__Satz__ $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für V. Dann:

$$x_B(v+v') = x_B(v) + x_B(v') \quad \text{f. alle } v, v' \in V$$

$$x_B(a \cdot v) = a \cdot x_B(v) \quad \text{f. alle } v \in V, a \in \mathbb{K}$$

__Beweis__ Seien $v, v' \in V$. Schreibe

$$x_B(v) = (x_1, \dots, x_n), \quad x_B(v') = (x_1', \dots, x_n').$$

Dann:

$$\begin{aligned} v + v' &= (x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n) + (x_1' \cdot v_1 + \dots + x_n' \cdot v_n) \\ &= (x_1 + x_1') \cdot v_1 + \dots + (x_n + x_n') \cdot v_n \end{aligned}$$

Also

$$x_B(v+v') = (x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n') = x_B(v) + x_B(v').$$

Weiter, für $a \in \mathbb{K}$:

$$a \cdot v = a \cdot (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = (a x_1) \cdot v_1 + \dots + (a x_n) \cdot v_n$$

Also:

$$x_B(a \cdot v) = (a x_1, \dots, a x_n) = a \cdot x_B(v).$$

$\square$

Beispiel Ein rationales Polynom in der Variablen T:

$$p = \frac{1}{2}T^3 - 5T + 1$$

Noch eines:

$$q = -2T^3 + \frac{1}{3}T^2$$

Rechnen mit Polynomen:

$$\begin{aligned} p+q &= \left(\frac{1}{2}T^3 - 5T + 1\right) + \left(-2T^3 + \frac{1}{3}T^2\right) \\ &= \frac{1}{2}T^3 - 5T + 1 - 2T^3 + \frac{1}{3}T^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2\right)T^3 + \frac{1}{3}T^2 - 5T + 1 \\ &= -\frac{3}{2}T^3 + \frac{1}{3}T^2 - 5T + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot p &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}T^3 - 5T + 1\right) \\ &= T^3 - 10T + 2. \end{aligned}$$

Konstruktion $\mathbb{K}$ Körper. Polynom über $\mathbb{K}$ in der Variablen T: Ausdruck

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu T^\nu,$$

wobei $a_\nu \in \mathbb{K}$ und $a_\nu \neq 0_{\mathbb{K}}$ für höchstens endlich viele $\nu \in \mathbb{N}$.

Dabei: a_ν die Koeffizienten. Schreiben

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu T^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} b_\nu T^\nu$$

falls $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$

Setzen

$\mathbb{K}[T] :=$ Menge aller Polynome über $\mathbb{K}$ in der Variablen T

Addition und Skalarmult auf $\mathbb{K}[T]$:

$$\left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum_{\nu \in \mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu$$

$$a \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu T^\nu := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (a a_\nu) T^\nu.$$

__Satz__ $\mathbb{k}$ Körper. Dann ist $(\mathbb{k}[T], +, \cdot)$ ein $\mathbb{k}$-VR. Nullvektor: $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} 0_{\mathbb{k}} T^\nu$.

__Beweis__ VR-Axiome werden "koeffizientenweise" geprüft. Z.B.:

$$(a+a')\cdot\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a+a')a_\nu T^\nu$$
$$= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu + a'a_\nu) T^\nu$$
$$= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu) T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a'a_\nu) T^\nu$$
$$= a\cdot\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + a'\cdot\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu. \qquad \square$$

__Bemerkung__ In $\mathbb{k}[T]$ hat man Monome:

$$T^0 := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_{0\nu} T^\nu, \qquad \delta_{0\nu} = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & \nu = 0, \\ 0_{\mathbb{k}}, & \nu \neq 0, \end{cases}$$

$$T := T^1 := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_{1\nu} T^\nu, \qquad \delta_{1\nu} = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & \nu = 1, \\ 0_{\mathbb{k}}, & \nu \neq 1. \end{cases}$$

Allgemein:

$$T^n := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_{n\nu} T^\nu, \qquad \delta_{n\nu} = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & \nu = n, \\ 0_{\mathbb{k}}, & \nu \neq n. \end{cases}$$

Jedes Pol. $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu$ ist Linearkomb. von Monomen: Wähle n mit $a_\nu = 0_{\mathbb{k}}$ für $\nu > n$. Dann:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu = a_0 T^0 + a_1 T^1 + \ldots + a_n T^n.$$

__Satz__ $(T^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ ist Basis für den $\mathbb{k}$-VR $\mathbb{k}[T]$.

__Beweis__ Wissen: $(T^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ erzeugend. Zu lin. unabh.: Es sei

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} 0_{\mathbb{k}} T^\nu = a_0\cdot T^0 + a_1\cdot T^1 + \ldots$$

$a_\nu \neq 0_{\mathbb{k}}$ für höchstens endl. viele n.

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu$$

$$\Rightarrow a_\nu = 0_{\mathbb{k}} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}. \qquad \square$$