Ziel 1 Es sei V endl. erz. $\mathbb{K}$-VR, d.h., $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r)$ mit $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann besitzt V eine Basis.

Ziel 2 Je zwei Basen eines $\mathbb{K}$-VR V sind gleich lang.

Ziel 3 Die Dimension eines $\mathbb{K}$-VR V ist

$$\dim(V) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } V \text{ keine endl. Basis hat,} \\ n, & \text{falls } V \text{ Basis } (v_1, \dots, v_n) \text{ hat.} \end{cases}$$

Lemma $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann äquivalent:

(i) $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_r)$ ist linear unabhängig.

(ii) $\mathcal{F}' := (v_1, \dots, v_{r-1})$ ist linear unabhängig und $v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{r-1})$.

Beweis Zu "(i) ⇒ (ii)". Wissen bereits:

$$v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{r-1}).$$

Zeigen: $(v_1, \dots, v_{r-1})$ ist linear unabh.:

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i = 0_V \implies \sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_r = 0_V$$

$$\overset{(v_1, \dots, v_r) \text{ l.u.}}{\implies} a_1 = \dots = a_{r-1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Zu "(ii) ⇒ (i)". Betrachte Linearkomb.:

$$(*) \quad 0_V = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_r \cdot v_r$$

Zu zeigen: $a_1 = \dots = a_r = 0_{\mathbb{K}}$. Zeigen zunächst $a_r = 0_{\mathbb{K}}$. Sonst:

$$v_r = (-a_r^{-1} a_1) \cdot v_1 + \dots + (-a_r^{-1} a_{r-1}) \cdot v_{r-1}$$

$$\in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{r-1}) \ \lightning$$

Damit:

$$(*) \quad 0_V = a_1 v_1 + \dots + a_r \cdot v_r = a_1 v_1 + \dots + a_{r-1} \cdot v_{r-1}$$

Wegen $(v_1, \dots, v_{r-1})$ lin. unabh.: $a_1 = \dots = a_{r-1} = 0_{\mathbb{K}}$. $\square$

__Satz__ $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ Familie in V. Dann äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ Basis für V

(ii) $\mathcal{F}$ unverkürzbares Erz.-Syst für V.

(iii) $\mathcal{F}$ unverlängerbare lin. unabh. Fam.

__Beweis__ Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)", klar: $\mathcal{F}$ Erz.-Syst.

Zeigen $\mathcal{F}$ unverkürzbar. Sonst gibt es ein $1 \leq i \leq n$ mit

$$v_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

Früherer Satz: $(v_1, \dots, v_n)$ linear abh. $\lightning$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (iii)". Zeigen $\mathcal{F}$ linear unabh.

Sonst: $\mathcal{F}$ linear abhängig. Also gibt es $1 \leq i \leq n$ mit

$$v_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

s. früherer Satz (3.2.12).

Folglich $v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

Somit

$$V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n) \overset{3.2.7}{\subseteq} \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \subseteq V.$$

D.h.: $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ $\lightning$ zu (ii).

Zeigen $\mathcal{F}$ unverlängerbar. Sonst gibt es $v \in V$ mit $(v_1, \dots, v_n, v)$ linear unabh.

Mit Satz 3.2.16:

$$v \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n) \quad \lightning \text{ zu (ii).}$$

Zu "(iii) $\Rightarrow$ (i)". Nur zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist Erz-Syst für V.

Andernfalls gibt es ein $v \in V$ mit

$$v \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$$

Lemma: $(v_1, \dots, v_n, v)$ lin. unabh. $\lightning$ zu (iii).

$\square$

<u>**Basisergänzungssatz**</u> $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR

$(v_1, \dots, v_r)$ Erz.-Syst. für V, sodass

$(v_1, \dots, v_k)$ lin. unabh. für ein $1 \leq k \leq r$.

Dann gibt es

$$k+1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq r$$

sodass $(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ Basis für V.

<u>**Beweis**</u> Induktion über $m := r-k$.

$m=0$: $(v_1, \dots, v_r)$ Basis für V.

$m-1 \to m$: Betrachte den UnterVR

$$U := \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{r-1}) \leq_{\mathbb{K}} V.$$

Dann: $(r-1)-k = m-1$. Induktionsannahme:

Es gibt $k+1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq r$ sodass

$(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ Basis für U.

Fall 1: $v_r \in U$. Dann $v_1, \dots, v_r \in U$.

somit

$$V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) \overset{3.2.7}{\subseteq} U \subseteq V$$

Also $V = U$ und $(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ Basis für V.

Fall 2: $v_r \notin U$. Betrachte

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d}, v_r)$$

Dann: $v_1, \dots, v_{r-1} \in U \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$, und $v_r \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$.

Also

$$V \subseteq \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{B}) \subseteq V$$

Folglich $V = \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$, d.h., $\mathcal{B}$ Erz.-Syst. für V.

Weiter $(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$ linear unabh.

und $v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$. Lemma:

$\mathcal{B}$ Basis für V. $\square$

<u>**Folgerung**</u> $\mathbb{K}$ Körper, V endl. erz. $\mathbb{K}$-VR,

d.h. $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r)$ mit $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann

besitzt V eine Basis

<u>**Beweis**</u> Falls $V = \{0_V\}$: Leere Familie ist Basis.

Falls $V \neq \{0_V\}$: Schreibe $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r)$

mit $v_1 \neq 0_V$. Basisergänzungssatz

mit $k=1$ liefert Basis für V. $\square$

Satz $\mathbb{k}$ Körper, V $\mathbb{k}$-VR. Dann: Je zwei Basen von V gleich lang.

Beweis. Fall 1: Jede Basis von V hat unendl. Länge. ✓

Fall 2: V besitzt Basen endlicher Länge. Wähle Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ mit n minimal.

Zeigen: Jede Basis $\mathcal{C} = (u_i)_{i \in I}$ von V hat endl. Länge, d.h., I endl..

Für jedes $1 \leq j \leq n$ hat man Darstellung

$$v_j = \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i, \quad a_i = 0_{\mathbb{k}} \text{ für nur endl. viele } i \in I$$

Also gibt endl. $I' \subseteq I$ sodass für $\mathcal{C}' = (u_i)_{i \in I'}$ gilt: $v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Lin}(\mathcal{C}')$.

Damit:

$$V = \mathrm{Lin}(\mathcal{C}').$$

Zeigen $I' = I$. Sonst gibt es $j \in I \setminus I'$. Haben $u_j \in \mathrm{Lin}(\mathcal{C}') = \mathrm{Lin}(u_i ; i \in I')$.

Folglich: $(u_i)_{i \in I' \cup \{j\}}$ lin. abh. ↯ zu $\mathcal{C}$ lin. unabh.

Zeigen: $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_m)$ Basis für $V \Rightarrow n = m$.

Nach Wahl von $\mathcal{B}$ gilt $m \geq n$. Noch zu zeigen: $m \leq n$.

Betrachte Familie $(u_1, v_1, \dots, v_n)$. Basisergänzungssatz: Es gibt $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ sodass

$$\mathcal{C}_1 := (u_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$$

Basis für V. Wegen $(v_1, \dots, v_n)$ als l.u. Fam. unverlängerbar: $d \leq n-1$.

Somit: $\mathcal{C}_1$ hat Länge $\leq n$. Betrachte jetzt $(u_1, u_2, v_{i_1}, \dots, v_{i_d})$. Liefert Basis

$$\mathcal{C}_2 = (u_1, u_2, v_{j_1}, \dots, v_{j_b})$$

der Länge $\leq n$ für V. Spätestens nach n Schritten: Basis

$$\mathcal{C}' = (u_1, \dots, u_r), \quad \text{wobei } r \leq n$$

Nach Wahl von n: $r = n$. Wegen $(u_1, \dots, u_m)$ unverkürzbar als Erz.-Syst.: $m = r = n$. □

Definition $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR. *Dimension* von V:
$$\dim(V) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } V \text{ keine endl. Basis hat,} \\ n, & \text{falls } V \text{ Basis } (v_1, \dots, v_n) \text{ hat.} \end{cases}$$

Beispiel $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Satz $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\dim(V) = n < \infty$. Dann ist n Maximum über alle Längen von linear unabh. Familien in V.

Beweis Wegen $\dim(V) = n$: V hat Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Somit gibt es lin. unabh. Fam. der Länge n in V.

Angenommen es gibt lin. unabh. Fam. $\mathcal{F}$ der Länge $> n$ in V.
Basisergänzungssatz: können $\mathcal{F}$ zu Basis $\mathcal{E}$ von V ergänzen. Dabei: $\mathcal{E}$ hat mindestens $n+1$ Elemente $\lightning$ $\square$

Satz $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\dim(V) = n < \infty$.
Dann: $(v_1, \dots, v_n)$ l.u. in $V \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ Basis.

Beweis Voriger Satz: $(v_1, \dots, v_n)$ unverlängerbar als l.u. Fam. Erster Satz: $(v_1, \dots, v_n)$ Basis. $\square$

Folgerung $\mathbb{K}$ körper, $(v_1, \dots, v_n)$ l. u. Fam. in $\mathbb{K}^n$. Dann: $(v_1, \dots, v_n)$ Basis für $\mathbb{K}^n$.

Satz $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR, $U \leq_{\mathbb{K}} V$ Untervektorraum. Dann:
$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

Beweis Fall 1: $\dim(V) = \infty$: ✓
Fall 2: $\dim(V) = n < \infty$. Voriger Satz: Jede l.u. Fam. in V hat Länge $\leq n$.
Sei $(u_1, \dots, u_r)$ l.u. Fam. max. Länge in U. Dann: $r \leq n$.
Lemma: $(u_1, \dots, u_r)$ Basis für U. Somit: $\dim(U) = r \leq n$. $\square$

Satz $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\dim(V) < \infty$, $U \leq_{\mathbb{K}} V$.
Dann:
$$\dim(U) = \dim(V) \Rightarrow U = V.$$

Beweis. Es sei $(u_1, \dots, u_n)$ Basis für U. Voriger Satz: $(u_1, \dots, u_n)$ Basis für V. Also
$$U = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_n) = V. \qquad \square$$