Definition $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-VR. Eine Abb. $\varphi: V \to W$ heisst *linear* (auch *VR-Homomorphismus*), falls stets

$$\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v'), \quad \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v).$$

Setzen $\mathrm{Hom}(V,W) := \{\varphi: V \to W;\ \varphi \text{ linear}\}$.

Beispiel $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-VR.

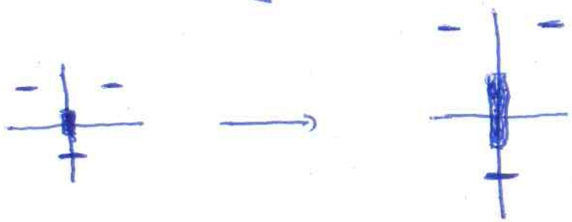
(i) Die *Nullabb.* $V \to W$, $v \mapsto 0_W$ ist linear.

(ii) $\mathrm{id}_V: V \to V$, $v \mapsto v$ ist linear.

Beispiel Einige lin. Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

(i) Achsenspiegelung: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$

(ii) Achsenstreckung: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$



(iii) Scherung: $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$

Bemerkung $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to W$ Abb. Dann äquivalent:

(i) φ ist linear.

(ii) Stets $\varphi(a \cdot v + a' \cdot v') = a \cdot \varphi(v) + a' \cdot \varphi(v')$.

(iii) Stets $\varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right) = \sum a_i \cdot \varphi(v_i)$.

Satz Es seien $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ lineare Abb. von $\mathbb{K}$-VR. Dann: $\psi \circ \varphi: U \to W$ lineare Abbildung.

Beweis Für alle $v, v' \in U$ und $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(a \cdot v + a' \cdot v') &= \psi(\varphi(a \cdot v + a' \cdot v')) \\ &= \psi(a \cdot \varphi(v) + a' \cdot \varphi(v')) \\ &= a \cdot \psi(\varphi(v)) + a' \cdot \psi(\varphi(v')) \\ &= a \cdot \psi \circ \varphi(v) + a' \cdot \psi \circ \varphi(v').\end{aligned}$$

$\square$

Definition $\mathbb{K}$ Körper, $\varphi: V \to W$ lineare Abb. von $\mathbb{K}$-VR.

$$\mathrm{kern}(\varphi) := \{v \in V;\ \varphi(v) = 0_W\} = \varphi^{-1}(0_W),$$

$$\mathrm{Bild}(\varphi) := \{\varphi(v);\ v \in V\} = \varphi(V).$$

Satz $\mathbb{K}$ Körper, $\varphi: V \to W$ lin. Abb. von $\mathbb{K}$-VR.

(i) Für jeden UVR $V' \leq_{\mathbb{K}} V$ gilt $\varphi(V') \leq_{\mathbb{K}} W$.

Insbesondere: $\mathrm{Bild}(\varphi) \leq_{\mathbb{K}} W$.

(ii) Für jeden UVR $W' \leq_{\mathbb{K}} W$ gilt $\varphi^{-1}(W') \leq_{\mathbb{K}} V$.

Insbesondere: $\mathrm{kern}(\varphi) \leq_{\mathbb{K}} V$.

Beweis Zu (ii). Z.z.: UV1, UV2, UV3 für

$$\varphi^{-1}(W') = \{v \in V;\ \varphi(v) \in W'\}.$$

UV1 Wissen $0_W \in W'$. Weiter: $\varphi(0_V) = 0_W$. Somit $0_V \in \varphi^{-1}(W')$ und $\varphi^{-1}(W') \neq \emptyset$.

UV2 Seien $v, v' \in \varphi^{-1}(W')$. Zu zeigen: $v + v' \in \varphi^{-1}(W')$. Haben:

$$\varphi(v+v') = \underbrace{\varphi(v)}_{\in W'} + \underbrace{\varphi(v')}_{\in W'} \in W'.$$

Somit $v + v' \in \varphi^{-1}(W')$.

UV3 Seien $v \in \varphi^{-1}(W')$, $a \in \mathbb{K}$. Zu zeigen: $a \cdot v \in \varphi^{-1}(W')$. Haben:

$$\varphi(a \cdot v) = a \cdot \underbrace{\varphi(v)}_{\in W'} \in W'.$$

Somit $a \cdot v \in \varphi^{-1}(W')$. $\square$

Satz $\mathbb{K}$ Körper, $\varphi: V \to W$ lin. Abb. von $\mathbb{K}$-VR. Dann äquivalent:

(i) φ ist injektiv

(ii) Es gilt $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}$

Beweis "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Wissen: $\varphi(0_V) = 0_W$, d.h.: $0_V \in \mathrm{kern}(\varphi)$. Wegen φ injektiv:

$$\mathrm{kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0_W) = \{0_V\}.$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Seien $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v')$. Z.z.: $v = v'$. Haben:

$$\varphi(v - v') = \varphi(v) - \varphi(v') = 0_W$$

D.h. $v - v' \in \mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}$. Somit $v = v'$. $\square$

Satz Es seien $\varphi: V \to W$ lin. Abb. von $\mathbb{k}$-VR, $(v_1, \dots, v_k)$ Basis für $\ker(\varphi)$, $(w_1, \dots, w_l)$ Basis für $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und

$$u_j \in \varphi^{-1}(w_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, l.$$

Dann ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l)$ eine Basis für V.

Beweis Zeigen: $\mathcal{B}$ linear unabh. Betrachte Linearkombination

$$(*) \quad 0_V = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_l u_l$$

Zu zeigen: $a_i = b_j = 0_{\mathbb{k}}$ für alle i, j.

Haben:

$$\begin{aligned} 0_W &= \varphi(0_V) \\ &= \varphi(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_l u_l) \\ &= a_1 \varphi(v_1) + \dots + a_k \varphi(v_k) + b_1 \varphi(u_1) + \dots + b_l \varphi(u_l) \\ &= b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \end{aligned}$$

Wegen $(w_1, \dots, w_l)$ l.u.: $b_1 = \dots = b_l = 0_{\mathbb{k}}$.

Damit in $(*)$:

$$0_V = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

Wegen $(v_1, \dots, v_k)$ l.u.: $a_1 = \dots = a_k = 0_{\mathbb{k}}$.

Zeigen: $\mathcal{B}$ Erz.-Syst. Sei $v \in V$ gegeben. Z.z.: $v \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$.

Wegen $(w_1, \dots, w_l)$ Basis für $\mathrm{Bild}(\varphi)$:

$$\varphi(v) = b_1 w_1 + \dots + b_l w_l \quad \text{mit } b_j \in \mathbb{k}.$$

Betrachte

$$v' := b_1 u_1 + \dots + b_l u_l \in V$$

Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(v - v') &= \varphi(v) - \varphi(v') \\ &= b_1 w_1 + \dots + b_l w_l - \varphi(b_1 u_1 + \dots + b_l u_l) \\ &= b_1 w_1 + \dots + b_l w_l - (b_1 \varphi(u_1) + \dots + b_l \varphi(u_l)) \\ &= 0_V \end{aligned}$$

Also $v - v' \in \ker(\varphi)$. Mit $(v_1, \dots, v_k)$ Basis für $\ker(\varphi)$:

$$v - v' = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{k}.$$

Setzt:

$$v = (v - v') + v' = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + \dots + b_l u_l \qquad \square$$

Dimensionsformel Es seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-VR und $\varphi: V \to W$ lineare Abb. Dann:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)).$$

Beweis $\mathrm{kern}(\varphi) \subseteq V$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq W$ sind UVR. Wegen V, W endlichdim.:

$$\dim(\mathrm{kern}(\varphi)) < \infty, \quad \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) < \infty.$$

Also gibt es Basis $(v_1, \dots, v_k)$ für $\mathrm{kern}(\varphi)$ und Basis $(w_1, \dots, w_l)$ für $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Voriger Satz: V hat Basis der Gestalt

$$(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l)$$

Also:

$$\dim(V) = k + l$$
$$= \dim(\mathrm{ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)). \quad \square$$

Folgerung V, W $\mathbb{K}$-VR sodass

$$\dim(V) = \dim(W) < \infty.$$

Weiter: $\varphi: V \to W$ lineare Abb.

Dann äquivalent:

(i) φ injektiv.

(ii) φ surjektiv.

(iii) φ bijektiv.

Beweis "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Wissen: $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}$.

Somit

$$\dim(W) = \dim(V) = 0 + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)).$$

Folglich: $\mathrm{Bild}(\varphi) = W$. D.h., φ surjektiv.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Dimensionsformel:

$$\dim(\mathrm{kern}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$$
$$= \dim(W) - \dim(W) = 0$$

Also: $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}$. Somit φ injektiv.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" ist klar. $\square$

Definition Eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ von $\mathbb{k}$-VR heisst *Isomorphismus*, falls es eine lineare Abb. $\psi: W \to V$ gibt mit

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \qquad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W.$$

Zwei $\mathbb{k}$-VR V und W nennt man *isomorph* ($V \cong W$), falls es Isomorphismus $\varphi: V \to W$ gibt.

Satz Es sei $\varphi: V \to W$ lineare Abb. von $\mathbb{k}$-VR. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist Isomorphismus.

(ii) φ ist bijektiv.

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Als Iso. hat φ Umkehrabb. Somit ist φ bijektiv (1.3.13).

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Als bijektive Abb. hat φ Umkehrabb., d.h. es gibt Abb. $\psi: W \to V$ mit

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \qquad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W.$$

Noch zu zeigen: ψ ist linear.
Haben in W:

$$a \cdot w + a' \cdot w' = a \cdot \varphi(\psi(w)) + a' \cdot \varphi(\psi(w'))$$
$$= \varphi(a \cdot \psi(w) + a' \cdot \psi(w'))$$

Jetzt ψ anwenden liefert

$$\psi(a \cdot w + a' \cdot w') = a \cdot \psi(w) + a' \cdot \psi(w').$$

$\square$

Satz Es seien $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für V. Dann hat man Iso von $\mathbb{K}$-VR:

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \qquad v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v).$$

Beweis Wissen: Jedes $v \in V$ hat eind. Darstellung

$$(*) \quad v = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n, \qquad x_i \in \mathbb{K}$$

Dabei $x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n)$. Somit klar: $\varphi_{\mathcal{B}}$ surjektiv.

Zeigen $\varphi_{\mathcal{B}}$ injektiv. Seien $v, v' \in V$ mit $\varphi_{\mathcal{B}}(v) = \varphi_{\mathcal{B}}(v') = a \in \mathbb{K}^n$. Dann:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n \cdot v_n = v'$$

Jetzt: 3.3.11 $\Rightarrow$ $\varphi_{\mathcal{B}}$ linear und 4.1.14 $\Rightarrow$ $\varphi_{\mathcal{B}}$ Iso. $\square$

Folgerung $\mathbb{K}$ Körper, V und W endlichdim. $\mathbb{K}$-VR. Dann sind äquivalent:

(i) $V \cong W$,

(ii) $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Es sei $\varphi : V \to W$ Iso. Dann:

$$\begin{aligned} \dim(W) &= \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \\ &= \dim(V) - \dim(\mathrm{kern}(\varphi)) \\ &= \dim(V) \end{aligned}$$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)" Haben Isos

$$\varphi : V \to \mathbb{K}^n, \quad \psi : W \to \mathbb{K}^n.$$

Liefert Iso

$$\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W. \qquad \square$$