

Beispiel: Zwei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(2×3) -Matrix (3×2) -Matrix

Definition $\mathbb{K}$ Körper. $(m \times n)$ -Matrix

über $\mathbb{K}$:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{K}$. $\text{Mat}(m, n; \mathbb{K}) :=$ Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen über $\mathbb{K}$.

Bemerkung Es sei $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$.

(i) A besitzt in Zeilen, $A_{1*}, \dots, A_{m*}$,
wobei

$$A_{i*} = (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

(ii) A besitzt n Spalten, $A_{*1}, \dots, A_{*n}$,
wobei

$$A_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Beispiel $\mathbb{K}$ Körper. Die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix über $\mathbb{K}$ ist

$$E_n := (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{wobei } \delta_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & i=j, \\ 0_{\mathbb{K}}, & i \neq j. \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ i -te Stelle

i -te Zeile: $e_i = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$

j -te Spalte: $e_j = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$
 $\uparrow$ j -te Stelle.

Bemerkung $\text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ wird $\mathbb{K}$ -VR durch komponentenweise Verknüpfungen

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$\alpha \cdot (a_{ij}) := (\alpha a_{ij}).$$

Definition Es seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Anwendung

von a auf x :

$$a \circ x := a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathbb{K}.$$

Lemma Anwenden ist linear in beiden

Argumenten: Für alle $a, b, x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(\alpha a + \beta b) \circ x = \alpha (a \circ x) + \beta (b \circ x)$$

$$a \circ (\alpha x + \beta y) = \alpha (a \circ x) + \beta (a \circ y)$$

Beweis Etwa erste Gleichung. Haben

$$(\alpha a + \beta b) \circ x = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) x_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i = \alpha (a \circ x) + \beta (b \circ x). \quad \square$$

Definition $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Matrix-Vektor-Produkt:

$$A \circ x := \begin{pmatrix} A_{1*} \circ x \\ \vdots \\ A_{m*} \circ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 28 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Satz 2 $A, B \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $x, y \in \mathbb{K}^n$,
 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann:

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) \cdot x = \alpha (A \cdot x) + \beta (B \cdot x),$$

$$A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha (A \cdot x) + \beta (A \cdot y).$$

Beweis Betrachte i -te Komponente

der ersten Gleichung: $\downarrow$ i -te Zeile d. Matrix

$$((\alpha \cdot A + \beta \cdot B) \cdot x)_i = (\alpha \cdot A + \beta \cdot B)_{i*} \cdot x$$

$$= (\alpha \cdot A_{i*} + \beta \cdot B_{i*}) \cdot x$$

Lemma

$$= \alpha (A_{i*} \cdot x) + \beta (B_{i*} \cdot x)$$

$$= (\alpha (A \cdot x) + \beta (B \cdot x))_i$$

i -te Komponente der zweiten Glg.:

$$A_{i*} \cdot (\alpha x + \beta y) \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \alpha (A_{i*} \cdot x) + \beta (A_{i*} \cdot y)$$

$$= (\alpha (A \cdot x) + \beta (B \cdot y))_i$$

□

Definition $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$,
 $B = (b_{jk}) \in \text{Mat}(n, l; \mathbb{K})$. Matrix-

Produkt:

$$A \cdot B := (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq l}} \in \text{Mat}(m, l; \mathbb{K}),$$

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = A_{i*} \cdot B_{*k}$$

$\uparrow$ i -te Zeile
auf k -te Spalte

Bemerkung Erhalten i -te Zeile von

$A \cdot B$ durch Anwenden der i -ten Zeile
von A auf die Spalten von B :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{1*} \cdot B_{*1} & \dots & A_{1*} \cdot B_{*l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m*} \cdot B_{*1} & \dots & A_{m*} \cdot B_{*l} \end{pmatrix}$$

Spalten von $A \cdot B$: Matrix-Vektor-Produkte

$A \cdot B_{*k}$:

$$A \cdot B = (A \cdot B_{*1}, \dots, A \cdot B_{*l})$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 17 & 32 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \\ 14 & 19 & 24 \end{pmatrix}.$$

Lemma $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $B \in \text{Mat}(n, l; \mathbb{K})$
und $x \in \mathbb{K}^l$. Dann:

$$A \circ (B \circ x) = (A \circ B) \circ x$$

Beweis j -te Komponente von $B \circ x$:

$$B_{j*} \circ x = \sum_{i=1}^l b_{ji} x_i$$

$\uparrow$
 j -te Zeile

Damit: i -te Komponente von $A \circ (B \circ x)$:

$$(A \circ (B \circ x))_i = A_{i*} \circ (B \circ x) \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij} (B \circ x)_j \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{b=1}^l b_{jb} x_b \right) \\ = \sum_{b=1}^l \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jb} \right) x_b \\ = \sum_{b=1}^l (A_{i*} \circ B_{*b}) x_b \\ = (A \circ B)_{i*} \circ x \\ = ((A \circ B) \circ x)_i.$$

□

Satz (Eigenschaften der Matrizenmult.)

(i) Für $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $B \in \text{Mat}(n, l; \mathbb{K})$
und $C \in \text{Mat}(l, b; \mathbb{K})$:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(ii) Für $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $B, C \in \text{Mat}(n, l; \mathbb{K})$
und $D \in \text{Mat}(l, b; \mathbb{K})$:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D.$$

(iii) Für $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $B \in \text{Mat}(n, l; \mathbb{K})$:

$$A \cdot E_n = A, \quad E_n \cdot B = B.$$

Beweis Zu (i). Haben

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= A \cdot (B \cdot C_{*1}, \dots, B \cdot C_{*b}) \\ &= (A \cdot (B \cdot C_{*1}), \dots, A \cdot (B \cdot C_{*b})) \\ &= ((A \cdot B) \cdot C_{*1}, \dots, (A \cdot B) \cdot C_{*b}) \\ &= (A \cdot B) \cdot C. \end{aligned}$$

Zu (ii). Erste Gleichung:

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (A \cdot (B_{*1} + C_{*1}), \dots, A \cdot (B_{*l} + C_{*l})) \\ &= (A \cdot B_{*1} + A \cdot C_{*1}, \dots, A \cdot B_{*l} + A \cdot C_{*l}) \\ &= (A \cdot B_{*1}, \dots, A \cdot B_{*l}) + (A \cdot C_{*1}, \dots, A \cdot C_{*l}) \\ &= A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

Zweite Gleichung: Analog. $\square$

Folgerung $\text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ ist ein Ring
mit Einselement E_n .

Definition $A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ heisst invertierbar
falls es $B \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ gibt mit

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Bemerkung $A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Dann:

A invertierbar $\Leftrightarrow A \in \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})^*$

Schreiben A^{-1} für Inverse zu A . Haben
Gruppe:

$$\text{GL}(n; \mathbb{K}) := \text{Mat}(n, n; \mathbb{K})^*.$$