

Satz $\mathbb{K}$ Körper, $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$.

Dann hat man lineare Abbildung:

$$\mu_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Dabei gilt:

$$\mu_A(e_j) = A \cdot e_j$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1*} \cdot e_j \\ \vdots \\ A_{m*} \cdot e_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = A_{*j}$$

Beweis Matrix-Vektor-Multiplikation
ist linear im zweiten Argument. $\square$

Beispiel Für die $(n \times n)$ Einheitsmatrix

E_n und $x \in \mathbb{K}^n$: $E_n \cdot x = x$. Somit

$$\mu_{E_n} = \text{id}_{\mathbb{K}^n}.$$

Beispiel Einige $\mu_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liefert $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$



(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ liefert $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$



(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$



Konstruktion V k -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$,
 W k -VR mit Basis $C = (w_1, \dots, w_m)$. Dann:
 Für jedes $A \in \text{Mat}(m, n; k)$ hat man eine
 eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\mu_C^B(A): V \rightarrow W$$

sodass

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu_C^B(A)} & W \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mu_B^B: V \rightarrow X_B(V) & \xrightarrow{\mu_C^B(A)} & X_C(W) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ k^n & \xrightarrow{\mu_A} & k^m \\ \mu_A: x \mapsto A \cdot x & & \end{array}$$

kommutativ, d.h. $\mu_A \circ \varphi_B = \varphi_C \circ \mu_C^B(A)$.
 Dabei

$$(*) \mu_C^B(A)(v_j) = a_{1j} \cdot w_1 + \dots + a_{mj} \cdot w_m.$$

Beweis Wissen: $\varphi_C: W \rightarrow k^m$ ist Iso. D.h.,
 es gibt lineare Umkehrabb.

$$\varphi_C^{-1}: k^m \rightarrow W.$$

Damit lineare Abb.

$$\mu_C^B(A) := \varphi_C^{-1} \circ \mu_A \circ \varphi_B: V \rightarrow W.$$

klar: $\varphi_C \circ \mu_C^B(A) = \mu_A \circ \varphi_B$ und $\mu_C^B(A)$
 eindeutig. Weiter:

$$\begin{aligned} x_C(\mu_C^B(A)(v_j)) &= \mu_A(x_B(v_j)) \\ &= \mu_A(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{mj}). \quad \square \end{aligned}$$

Konstruktion V k -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$
 und W k -VR mit Basis $C = (w_1, \dots, w_m)$,
 $\varphi: V \rightarrow W$ lineare Abb. Darstellende Matrix
 von φ bezüglich B und C :

$$\begin{aligned} M_C^B(\varphi) &:= (x_C(\varphi(v_1)), \dots, x_C(\varphi(v_n))) \\ &\in \text{Mat}(m, n; k). \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ Spalten von $M_C^B(\varphi)$

Merke: Spalten von $M_C^B(\varphi)$: Koordinaten-
 vektoren der Bilder der Basisvektoren.

Beispiel $\varphi: k^n \rightarrow k^n$ linear, $E := (e_1, \dots, e_n)$.

$$M_E^E(\varphi) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Satz 2 V k -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$,
 W k -VR mit Basis $C = (w_1, \dots, w_m)$. Haben
 zueinander inverse bijektive Abb.:

$$\text{Mat}(m, n, k) \longleftrightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$A \mapsto M_E^B(A)$$

$$M_E^B(\varphi) \mapsto \varphi$$

Lemma $\varphi, \psi: V \rightarrow W$ lin. Abb. von
 k -VR, $(v_i)_{i \in I}$ Erz.-Syst. für V und
 $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ für alle $i \in I$. Dann: $\varphi = \psi$.

Beweis z.z.: $\varphi(v) = \psi(v)$ für alle $v \in V$.

Haben Darst. $v = \sum a_i \cdot v_i$. Damit:

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right)$$

$$= \sum a_i \cdot \varphi(v_i) = \sum a_i \cdot \psi(v_i)$$

$$= \psi\left(\sum a_i \cdot v_i\right) = \psi(v)$$

□

Beweis Satz 2 Zeigen $M_E^B(M_E^B(A)) = A$.

Haben

$$M_E^B(M_E^B(A)) \stackrel{\text{Def von } M_E^B}{=} x_e(\mu_e^B(A)(v_j))$$

$$\stackrel{\text{Def von } \mu_e^B}{=} A \cdot x_B(v_j)$$

$$= A \cdot e_j$$

$$= A * j.$$

Zeigen $\mu_e^B(M_E^B(\varphi)) = \varphi$. Für jedes v_j :

$$x_e(\mu_e^B(M_E^B(\varphi))(v_j)) \stackrel{\text{Def } \mu_e^B}{=} M_E^B(\varphi) \cdot x_B(v_j)$$

$$= M_E^B(\varphi) \cdot e_j$$

$$= M_E^B(\varphi) * j$$

$$\stackrel{\text{Def } M_E^B}{=} x_e(\varphi(v_j))$$

Folglich: $\mu_e^B(M_E^B(\varphi))(v_j) = \varphi(v_j)$ f. alle j .

Lemma: $\mu_e^B(M_E^B(\varphi)) = \varphi$. □

Folgerung V k -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$,
 W k -VR mit Basis $C = (w_1, \dots, w_m)$ und
 $\varphi: V \rightarrow W$ lineare Abb. Dann:

$$\begin{array}{c}
 V \xrightarrow{\varphi} W \\
 \downarrow \cong \quad \downarrow \cong \\
 \begin{array}{ccc}
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 k^n & \xrightarrow{\mu_C^B} & k^m \\
 v \mapsto x_B(v) & & w \mapsto x_C(w)
 \end{array}
 \end{array}$$

kommutativ und $M_C^B(\varphi)$ eindeutig
 bestimmt dadurch.

Beweis Voriger Satz:

$$\varphi = \mu_C^B(M_C^B(\varphi))$$

konstr. von μ_C^B : Diagramm ist kommut.

Sei A weitere Matrix mit $A \cdot x_B(v) = x_C(\varphi(v))$.
 Dann:

$$\mu_C^B(A) = \varphi = \mu_C^B(M_C^B(\varphi))$$

Voriger Satz: $A = M_C^B(\varphi)$. $\square$

Satz U, V, W endl. dim. k -VR mit
 Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Weiter $\varphi: U \rightarrow V$ und
 $\psi: V \rightarrow W$ lin. Abb. Dann:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi).$$

Beweis Setze $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi)$.

haben kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{\psi} & W \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 k^n & \xrightarrow{x \mapsto A \cdot x} & k^n & \xrightarrow{y \mapsto B \cdot y} & k^m
 \end{array}$$

Früher gezeigt: $B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x$.

Mit Folgerung: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(\psi \circ \varphi) = B \cdot A$. $\square$

Satz V, W k -VR. Dann: $\text{Hom}(V, W)$ k -VR durch

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad (\alpha \cdot \varphi)(v) := \alpha \cdot (\varphi(v)).$$

Beweis Wissen: $\text{Abb}(V, W)$ ist k -VR bzgl. punktweiser Verknüpfungen.

Nur zu zeigen: $\text{Hom}(V, W) \leq_k \text{Abb}(V, W)$.

(UV1): Nullabbildung liegt in $\text{Hom}(V, W)$.

(UV2): Seien $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. Zu zeigen: $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$, d.h., $\varphi + \psi$ ist linear. Haben:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(v + v') &= \varphi(v + v') + \psi(v + v') \\ &= \varphi(v) + \varphi(v') + \psi(v) + \psi(v') \\ &= \varphi(v) + \psi(v) + \varphi(v') + \psi(v') \\ &= (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(v') \end{aligned}$$

Analog: $(\varphi + \psi)(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (\varphi + \psi)(v)$ $\square$

(UV3): Selbes Prinzip wie oben. $\square$

Satz V k -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, W k -VR mit Basis $C = (w_1, \dots, w_m)$. Haben zueinander inverse Isomorphismen:

$$\text{Mat}(m, n; k) \longleftrightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$A \mapsto M_C^B(A)$$

$$M_C^B(\varphi) \leftrightarrow \varphi$$

Beweis Wissen: Abb. bijektiv, zueinander invers. Noch zu zeigen: Abb. sind linear.

4.1.4: Reicht z.z.: Eine davon ist linear. Haben:

$$\begin{aligned} M_C^B(\varphi + \psi) &= (x_C((\varphi + \psi)(v_1)), \dots, x_C((\varphi + \psi)(v_n))) \\ &= (x_C(\varphi(v_1) + \psi(v_1)), \dots, x_C(\varphi(v_n) + \psi(v_n))) \\ &= M_C^B(\varphi) + M_C^B(\psi) \end{aligned}$$

Analog: $M_C^B(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot M_C^B(\varphi)$. $\square$

Satz V K -VR. Dann $\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$
Ring durch

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad \varphi \cdot \psi := \varphi \circ \psi.$$

Dabei: id_V Einselement in $\text{End}(V)$ und

$$\text{End}(V)^* = \{ \varphi \in \text{End}(V); \varphi \text{ Iso} \}$$

Beweis Wissen $(V, +)$ abelsche
Gruppe, " $\cdot$ " assoziativ.

Nur noch z.z.: Distributivität. Haben:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ (\psi + \chi))(v) &= \varphi((\psi + \chi)(v)) \\ &= \varphi(\psi(v) + \chi(v)) \\ &= \varphi(\psi(v)) + \varphi(\chi(v)) \\ &= (\varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi)(v) \end{aligned}$$

$$\text{Somit: } \varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi.$$

$$\text{Analog: } (\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi. \quad \square$$

Satz V K -VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$.

haben zueinander inverse Ring-
Homomorphismen:

$$\text{Mat}(n, n; K) \longleftrightarrow \text{End}(V)$$

$$A \mapsto \mu_B^B(A)$$

$$\mu_B^B(\varphi) \mapsto \varphi$$

Dabei

$$A \text{ invertierbar} \iff \mu_B^B(A) \text{ Iso}$$

$$\mu_B^B(\varphi) \text{ invertierbar} \iff \varphi \text{ Iso}$$

Beweis Früherer Satz (4.3.12): Abb.
sind verträglich mit " $\cdot$ ".

Nach früherer Satz (4.3.10): Abb. sind
verträglich bez. " $\cdot$ ".

Zusatz: Einheiten gehen auf Einheiten (23.6). $\square$