Definition V $\mathbb{K}$-VR. Dualraum zu V:

$$V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{f: V \to \mathbb{K};\ f \text{ linear}\}.$$

mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v), \quad (a \cdot f)(v) := a \cdot f(v).$$

Die Elemente von V^* heissen Linearformen auf V.

Gesucht: Nützliche Basis für V^*.

Satz V, W $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis für V, $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann gibt es eindeutig best. lineare Abb. $\varphi: V \to W$ mit

$$\varphi(v_i) = w_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis Eindeutigkeit: Lemma 4.3.8.

Existenz: Jedes $v \in V$ hat eind. Darst

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i, \quad \text{wobei } (a_1, \ldots, a_n) = X_{\mathcal{B}}(v).$$

Definiere Abb. $\varphi: V \to W$ durch

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i$$

Dann:

$$\varphi(v_i) = w_i$$

Noch zu zeigen: φ ist linear. Seien

* $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{n} a_i' \cdot v_i$
* $a, a' \in \mathbb{K}$

Dann:

$$\begin{aligned}
\varphi(a \cdot v + a' \cdot v') &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (a a_i + a' a_i') \cdot v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a a_i + a' a_i') \cdot w_i \\
&= a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i + a' \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i' \cdot w_i \\
&= a \cdot \varphi(v) + a' \cdot \varphi(v'). \quad \square
\end{aligned}$$

<u>Satz</u> V $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.
Dann gibt es zu jedem $1 \le i \le n$ genau eine Linearform $v_i^* \in V$ mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & i = j, \\ 0_{\mathbb{K}}, & i \neq j. \end{cases}$$

Weiter: $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ Basis für V^*.
Für jedes $v \in V$ gilt:

$$x_{\mathcal{B}}(v) = (v_1^*(v), \dots, v_n^*(v)).$$

<u>Beweis.</u> Voriger Satz: Exist. u. Eind. von $v_1^*, \dots, v_n^*$.
Zu $\mathcal{B}^*$ Erz-Syst für V^*: Sei $f \in V^*$.
Setze

$$a_i := f(v_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Zeigen

$$f = a_1 \cdot v_1^* + \dots + a_n \cdot v_n^* =: g$$

Lemma 4.3.8: Reicht zu zeigen

$$f(v_i) = g(v_i) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Haben:

$$\begin{aligned} g(v_i) &= (a_1 \cdot v_1^* + \dots + a_n \cdot v_n^*)(v_i) \\ &= a_1 v_1^*(v_i) + \dots + a_n v_n^*(v_i) \\ &= a_i v_i^*(v_i) = a_i = f(v_i). \end{aligned}$$

Zu $\mathcal{B}^*$ linear unabh.: Betr. Linearkomb.

$$\underset{\text{Nullabb.}}{0_{V^*}} = a_1 \cdot v_1^* + \dots + a_n \cdot v_n^*$$

Zu zeigen: $a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}$. Haben

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} = 0_{V^*}(v_i) &= (a_1 \cdot v_1^* + \dots + a_n \cdot v_n^*)(v_i) \\ &= a_i v_i^*(v_i) = a_i \end{aligned}$$

<u>Zusatz</u>: Sei $v \in V$. Dann:

$$x_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{K}.$$

Weiter

$$v_i^*(v) = v_i^*(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_i. \quad \square$$

<u>Definition</u> V $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.
Nenne $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis zu $\mathcal{B}$.

<u>Folgerung</u> V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR. Dann:

$$\dim(V^*) = \dim(V).$$

Satz $\varphi: V \to W$ lineare Abb. von $\mathbb{K}$-VR. Dann hat man lineare Abb.

$$\varphi^*: W^* \to V^*, \quad g \mapsto g \circ \varphi.$$

Ist $\psi: U \to V$ weitere lin. Abb. vom $\mathbb{K}$-VR, so gilt

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

Beweis Haben: $\varphi^*(g) = g \circ \varphi : V \to \mathbb{K}$ linear. D.h.: $\varphi^*(g) \in V^*$.

Zeigen: $\varphi^*: W^* \to V^*$ linear. Seien $g, g' \in W^*$, $a, a' \in \mathbb{K}$. Dann:

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(a \cdot g + a' \cdot g'))(v) &\overset{\text{Def } \varphi^*}{=} ((a \cdot g + a' \cdot g') \circ \varphi)(v) \\
&= (a \cdot g + a' \cdot g')(\varphi(v)) \\
&\overset{\text{pw. Verk. auf } W^*}{=} a\, g(\varphi(v)) + a'\, g'(\varphi(v)) \\
&\overset{\text{pw. Verk. auf } V^*}{=} (a \cdot (g \circ \varphi) + a' \cdot (g' \circ \varphi))(v) \\
&= (a \cdot \varphi^*(g) + a' \cdot \varphi^*(g'))(v).
\end{aligned}$$

Zu $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$. Haben

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)^*(g) &= g \circ (\varphi \circ \psi) \\
&= (g \circ \varphi) \circ \psi \\
&= \psi^*(g \circ \varphi) \\
&= \psi^*(\varphi^*(g)) \\
&= (\psi^* \circ \varphi^*)(g). \quad \square
\end{aligned}$$

Gesucht: Darstellende Matrix von φ^*.

Definition $\mathbb{K}$ Körper und

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}).$$

Transponierte von A:

$$A^t = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \in \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{K}),$$

wobei $c_{ij} = a_{ji}$.

Bemerkung Betrachte

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in Mat(m,n;\mathbb{k}),$$

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in Mat(n,m;\mathbb{k}).$$

Dann:

j-te Zeile von A^t = j-te Spalte von A.

z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung $A, B \in Mat(m,n;\mathbb{k})$, $\lambda \in \mathbb{k}$.

Dann:

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \quad (\lambda\cdot A)^t = \lambda\cdot A^t, \quad (A^t)^t = A.$$

Satz $A \in Mat(m,n;\mathbb{k})$, $B \in Mat(n,l;\mathbb{k})$

Dann:

$$(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

Lemma Seien $a, x \in \mathbb{k}^n$. Dann:

$$a\cdot x = x\cdot a$$

Beweis Haben

$$a\cdot x = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i a_i = x\cdot a. \quad \square$$

Beweis Satz Haben

$$A\cdot B = (A_{i*}\cdot B_{*k})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le l}}$$

Somit:

$$(A\cdot B)^t = (\underbrace{A_{k*}}_{k\text{-te Zeile von } A}\cdot B_{*i})_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le k\le m}}$$

$$= (\underbrace{B_{*i}}_{i\text{-te Spalte von } B}\cdot A_{k*})_{\substack{1\le i\le l\\ 1\le k\le m}} = B^t\cdot A^t. \quad \square$$

Folgerung $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$ invertierbar.

Dann: A^t invertierbar, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Beweis Haben:

$$(A^{-1})^t\cdot A^t = (A\cdot A^{-1})^t = E_n^t = E_n,$$

$$A^t\cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}\cdot A)^t = E_n^t = E_n. \quad \square$$

__Satz__ V $\mathbb{k}$-VR mit Basis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$, W $\mathbb{k}$-VR mit Basis $\mathcal{C}=(w_1,\dots,w_m)$, $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung. Dann:

$$M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}(\varphi^*) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\right)^t$$

__Beweis__ Setze $B := M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}(\varphi^*)$. Dann $B \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{k})$, j-te Spalte von B:

$$B_{*j} = (b_{1j},\dots,b_{nj})$$

Merkregel: B_{*j} ist Koordinatenvektor von $\varphi^*(w_j^*)$ bezüglich $\mathcal{B}^* = (v_1^*,\dots,v_n^*)$. Somit

$$\varphi^*(w_j^*) = b_{1j} \cdot v_1^* + \dots + b_{nj} \cdot v_n^*$$

Setze $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$. Betrachte i-te Spalte von A:

$$A_{*i} = (a_{1i},\dots,a_{mi}).$$

Merkregel liefert:

$$\varphi(v_i) = a_{1i}\cdot w_1 + \dots + a_{mi}\cdot w_m$$

Zu zeigen: $b_{ij} = a_{ji}$. Haben

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (b_{1j}\cdot v_1^* + \dots + b_{nj}\cdot v_n^*)(v_i) \\ &= (\varphi^*(w_j^*))(v_i) \\ &= w_j^*(\varphi(v_i)) \\ &= w_j^*(a_{1i}\cdot w_1 + \dots + a_{mi}\cdot w_m) \\ &= a_{ji}. \end{aligned}$$

$\square$