Beispiel Bringen Matrix durch "Zeilenoperationen" auf "Zeilenstufenform":

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Vertauschen Z1 und Z2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Addieren $-2 \cdot Z1$ zu Z3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Addieren Z2 zu Z3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren Z3 mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ besitzt Zeilenstufenform (ZSF), falls A von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * \cdots & * \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * \cdots * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij_i} \in \mathbb{K}^*$ für $i = 1, \dots, r$. Nenne

* a_{ij_i} den i-ten Pivoteintrag von A,
* $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_r}$ Pivotspalten von A.

A hat normierte ZSF, falls

$$a_{1j_1} = \dots = a_{rj_r} = 1_{\mathbb{K}}.$$

<u>Definition</u> $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Drei Typen von elementaren Zeilenoperationen an A:

(i) Addition des λ-fachen der j-ten zur i-ten Zeile ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$):

$$ZOp(\lambda; j,i): \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \lambda \cdot A_{j*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}$$

(ii) Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile:

$$ZOp(i,j): \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}$$

(iii) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$ZOp(\lambda; i): \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ \lambda \cdot A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$.

(i) Man kann A durch Zeilenoperationen des Typs (i) und (ii) in ZSF bringen.

(ii) Besitzt A ZSF, so kann man A durch Zeilenoperationen des Typs (iii) in normierte ZSF bringen.

Beweis Satz Zeigen: $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ kann man durch ZOp vom Typ (i) und (ii) in ZSF bringen.

Konkretes Verfahren (Gauß-Algorithmus)

Schritt 1:

* suche kleinstes j_1 mit $A_{*j_1} \neq (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$,
* wähle i_1 mit $a_{i_1 j_1} \neq 0_{\mathbb{K}}$,
* Vertausche Z1 und Zi.

Bringt A auf die Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i_1 j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Schritt 2:

* Addiere $-\frac{b_{i j_1}}{a_{i_1 j_1}} \cdot Z1$ zu Zi

für $i = 2, \dots, m$ („Ausräumen").

Bringt B auf die Form

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i_1 j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 * \\ D \end{pmatrix}.$$

Jetzt: Mit D wieder in Schritt 1.

Nach spätestens m-1 Durchläufen ist man bei einer Matrix in ZSF.

klar: Ist A in ZSF, so kann man A durch $ZOp\left(\frac{1}{a_{i j_i}}; i\right)$ normieren. $\square$

__Definition__ $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Drei Typen von elementaren Spaltenoperationen an A:

(i) Addieren des λ-fachen der j-ten zur i-ten Spalte ($i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$):

$$\mathrm{SpOp}(\lambda; j, i): (A_{*1}, \ldots, A_{*i}, \ldots, A_{*j}, \ldots, A_{*n})$$
$$\mapsto (A_{*1}, \ldots, A_{*i} + \lambda \cdot A_{*j}, \ldots, A_{*j}, \ldots, A_{*n})$$

(ii) Vertauschen der i-ten und der j-ten Spalte:

$$\mathrm{SpOp}(i, j): (A_{*1}, \ldots, A_{*i}, \ldots, A_{*j}, \ldots, A_{*n})$$
$$\mapsto (A_{*1}, \ldots, A_{*j}, \ldots, A_{*i}, \ldots, A_{*n})$$

(iii) Multiplikation der i-ten Spalte mit $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{SpOp}(\lambda; i): (A_{*1}, \ldots, A_{*i}, \ldots, A_{*n})$$
$$\mapsto (A_{*1}, \ldots, \lambda \cdot A_{*i}, \ldots, A_{*n})$$

__Satz__ $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ in ZSF mit r Pivotspalten. Mit SpOp vom Typ (i) und (ii) kann man A auf folgende Gestalt bringen:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{rr} \end{pmatrix} \quad d_{ii} \in \mathbb{K}^* \text{ für } i = 1, \ldots, r.$$

Weiter, mit SpOp vom Typ (iii) bringt man A auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

__Beweis__ Mit SpOp vom Typ (ii) mache l-te Pivotspalte zur l-ten Spalte, $l = 1, \ldots, r$:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} D & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt mit SpOp vom Typ (i): B „ausräumen".

Rest: klar. $\square$

<u>Definition</u> Elementarmatrix in $Mat(n,n;\mathbb{k})$:

Für $\lambda \in \mathbb{k}^*$ und $1 \leq i,j \leq n$ mit $i \neq j$ setze

$$E(n;\lambda;j,i) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i+\lambda\cdot e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & i \\ \quad\quad\quad j & \end{array}$$

$$= (e_1,\dots,e_i,\dots,e_j+\lambda e_i,\dots,e_n).$$

<u>Bemerkung</u> Haben

$$E(n;\lambda;j,i)\cdot A = ZOp(\lambda;j,i)(A)$$

$$B\cdot E(n;\lambda;j,i) = SpOp(\lambda;i,j)(B)$$

$$E(n;\lambda;j,i)^{-1} = E(n;-\lambda;j,i)$$

<u>Definition</u> Elementarmatrix in $Mat(n,n;\mathbb{k})$:

Für $1 \leq i,j \leq n$ mit $i<j$ setze

$$E(n;i,j) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \\ i \quad j & \end{array}$$

$$= (e_1,\dots,e_j,\dots,e_i,\dots,e_n).$$

<u>Bemerkung</u> Haben

$$E(n;i,j)\cdot A = ZOp(i,j)(A)$$

$$B\cdot E(n;i,j) = SpOp(i,j)(B)$$

$$E(n;i,j)^{-1} = E(n;i,j)$$

<u>Definition</u> Elementarmatrix in $Mat(n,n;\mathbb{k})$:

Für $\lambda \in \mathbb{k}^*$ und $1 \leq i \leq n$ setze

$$E(n;\lambda;i) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda\cdot e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1,\dots,\lambda\cdot e_i,\dots,e_n)$$

<u>Bemerkung</u> Haben

$$E(n;\lambda;i)\cdot A = ZOp(\lambda;i)(A)$$

$$B\cdot E(n;\lambda;i) = SpOp(\lambda;i)(A)$$

$$E(n;\lambda;i)^{-1} = E(n;\lambda^{-1};i)$$

__Satz__ Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$. Dann gibt es Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_k$ in $\mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{k})$ sodass

$$B := S_k \cdots S_1 \cdot A$$

normierte ZSF besitzt. Ist r die Anzahl der Pivotspalten von B, so gibt es Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_l$ in $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$ mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

__Beweis__ Sätze 5.1.4 und 5.1.6 liefern entsprechende ZOps und SpOps. $\square$

__Verfahren__ Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,3;\mathbb{Q})$$

Bestimmen $S = S_k \cdots S_1 \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Q})$ und $T = T_1 \cdots T_l \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q})$ wie in obigem Satz.

$$\begin{array}{cccc} & A & \text{Notizbuch } S_i & \text{Notizbuch } T_j \end{array}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xrightarrow{ZOp(-1;1,2)} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xrightarrow{ZOp(1;2,1)} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xrightarrow{SpOp(1;1,3)} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xrightarrow{SpOp(2;2,3)} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} & & S & T \end{array}$$

Haben

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$