Definition $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$.

(i) Spaltenraum von A:

$$\mathrm{Lin}(A_{*1},\dots,A_{*n}) \leq_{\mathbb{k}} \mathbb{k}^m.$$

(ii) Spaltenrang von A:

$$\mathrm{SpRang}(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1},\dots,A_{*n})).$$

Beispiel Haben

$$\mathrm{SpRang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r.$$

Satz $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$ und $\mu_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$, $x \mapsto A\cdot x$ zugeh. lin. Abb. Dann:

$$\mathrm{Bild}(\mu_A) = \mathrm{Lin}(A_{*1},\dots,A_{*n}),$$

$$\dim(\mathrm{Bild}(\mu_A)) = \mathrm{SpRang}(A)$$

Lemma $\varphi: V \to W$ lin. Abb. von $\mathbb{k}$-VR, $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ Fam. in V, $\varphi(\mathcal{F}) := (\varphi(v_i))_{i\in I}$.

Dann:

$$\mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F})) = \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})).$$

Beweis "$\subseteq$": Sei $w \in \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F}))$. Dann:

$$w = \sum a_i \cdot \varphi(v_i)$$

$$= \varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right) \in \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{F}))$$

"$\supseteq$": Z.z.: $\varphi(v) \in \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F}))$ für alle $v \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$. Haben:

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right)$$

$$= \sum a_i \cdot \varphi(v_i) \in \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F})). \quad \square$$

Beweis Satz. Wissen: $\mathbb{k}^n = \mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_n)$ und

$$\mu_A(e_j) = A\cdot e_j = A_{*j}$$

Somit:

$$\mathrm{Bild}(\mu_A) = \mu_A(\mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_n))$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} \mathrm{Lin}(\mu_A(e_1),\dots,\mu_A(e_n))$$

$$= \mathrm{Lin}(A_{*1},\dots,A_{*n}).$$

$\square$

Satz $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$.

(i) $T \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ invertierbar. Dann:
$$\mathrm{SpRang}(A\cdot T) = \mathrm{SpRang}(A).$$

(ii) $S \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$ invertierbar. Dann:
$$\mathrm{SpRang}(S\cdot A) = \mathrm{SpRang}(A).$$

Lemma $\varphi: V \to W$ Iso von $\mathbb{K}$-VR. Ist $U \leq_{\mathbb{K}} V$ UVR mit Basis $\mathcal{C} = (u_1,\dots,u_k)$, so ist $\varphi(\mathcal{C}) := (\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_k))$ Basis für $\varphi(U) \leq_{\mathbb{K}} W$.

Beweis Zeigen $\varphi(\mathcal{C})$ erzeugend: Haben
$$\varphi(U) = \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{C})) \overset{5.2.4}{=} \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{C})).$$

Zeigen $\varphi(\mathcal{C})$ linear unabh. Betrachte
$$(*) \quad 0_W = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \varphi(u_i).$$

Z.z.: $a_1 = \dots = a_k = 0_{\mathbb{K}}$. Anwenden von φ^{-1} auf $(*)$:
$$0_V = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \varphi(u_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot u_i.$$

Wegen $\mathcal{C} = (u_1,\dots,u_k)$ l.u.: $a_1 = \dots = a_k = 0_{\mathbb{K}}$. □

Beweis Satz Zu (i). Wegen T invertierbar: $\mu_T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ Iso. (Umkehrabb. $\mu_T^{-1} = \mu_{T^{-1}}$).

Damit:
$$\begin{aligned}
\mathrm{SpRang}(A\cdot T) &\overset{5.2.3}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\mu_{A\cdot T}))\\
&\overset{4.3.9}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\mu_A \circ \mu_T))\\
&= \dim(\mu_A(\mu_T(\mathbb{K}^n)))\\
&\overset{\mu_T\ \mathrm{Iso}}{=} \dim(\mu_A(\mathbb{K}^n))\\
&\overset{5.2.3}{=} \mathrm{SpRang}(A).
\end{aligned}$$

Zu (ii). Betrachte $U := \mu_A(\mathbb{K}^n) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$. Wähle Basis $(u_1,\dots,u_k)$ für U.

Lemma: $(\mu_S(u_1),\dots,\mu_S(u_k))$ Basis für
$$\mu_S(U) = \mu_S(\mu_A(\mathbb{K}^n)) = \mu_{S\cdot A}(\mathbb{K}^n).$$

Somit:
$$\begin{aligned}
\mathrm{SpRang}(S\cdot A) &= \dim(\mu_{S\cdot A}(\mathbb{K}^n)) = k\\
&= \dim(\mu_A(\mathbb{K}^n)) = \mathrm{SpRang}(A).
\end{aligned}$$
□

Satz $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann äquivalent:

(i) $\mathrm{SpRang}(A) = r$.

(ii) Es gibt Elementarmat. $S_1, \dots, S_k$ und $T_1, \dots, T_l$ mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)": 5.1.13: Es gibt Elementarmat. S_i, T_j mit

$$\underbrace{S_k \cdots S_1}_{=:S} \cdot A \cdot \underbrace{T_1 \cdots T_l}_{=:T} = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei: S, T invertierbar. 5.2.5: $s = r$.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)": 5.2.5: $\mathrm{SpRang}(A) = r$. $\square$

Folgerung $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ in ZSF. Dann:

$\mathrm{SpRang}(A) =$ Anzahl Pivotspalten von A.

Definition $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$

(i) Zeilenraum von A:

$$\mathrm{Lin}(A_{1*}, \dots, A_{m*}) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n.$$

(ii) Zeilenrang von A:

$$\mathrm{ZRang}(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A_{1*}, \dots, A_{m*})).$$

Beispiel

$$\mathrm{ZRang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r$$

Satz $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Dann

$$\mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{SpRang}(A).$$

Beweis Setze $r := \mathrm{SpRang}(A)$. Voriger Satz: Es gibt invertierbare Mat. S, T mit

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.12: S^t, T^t invertierbar. Damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{ZRang}(A) &= \mathrm{SpRang}(A^t) \\ &\overset{5.2.5}{=} \mathrm{SpRang}(T^t \cdot A^t \cdot S^t) \\ &= \mathrm{SpRang}((S \cdot A \cdot T)^t) \\ &= \mathrm{ZRang}(S \cdot A \cdot T) \\ &= r. \end{aligned}$$

$\square$

Definition $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$. Rang von A:

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{SpRang}(A) = \mathrm{ZRang}(A).$$

Bemerkung $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$. Dann:

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{SpRang}(A) = \mathrm{ZRang}(A^t) = \mathrm{Rang}(A^t).$$

Bemerkung Rangberechnung für A:

* Bringe A durch ZOp, SpOp auf einfache Gestalt B,
* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

Satz $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. Dann äquivalent:

(i) Spalten von A bilden Basis des $\mathbb{k}^n$.

(ii) Zeilen von A bilden Basis des $\mathbb{k}^n$.

(iii) $\mathrm{Rang}(A) = n$.

(iv) A ist Produkt von Elementarmatrizen.

(v) A ist invertierbar.

Beweis Zeigen "(i) $\Leftrightarrow$ (iii)":

$$\underset{\text{Basis für } \mathbb{k}^n}{(A_{*1}, \dots, A_{*n})} \overset{3.4.9}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{Erz.-Syst. für } \mathbb{k}^n}{(A_{*1}, \dots, A_{*n})}$$

$$\overset{3.4.12}{\Longleftrightarrow} \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n})) = n$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{SpRang}(A) = n.$$

Zu "(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)": Wie eben, mit Zeilen.

Zeigen "(iii) $\Rightarrow$ (iv)". 5.2.7: Es gibt Elementarmat. S_i, T_j mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l = E_n.$$

Somit:

$$A = S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \cdot T_l^{-1} \cdots T_1^{-1}.$$

Zu "(iv) $\Rightarrow$ (v)": Wissen: Jede Elementarmatrix ist invertierbar, Produkte invertierbarer Matrizen sind invertierbar.

Zeigen "(v) $\Rightarrow$ (iii)". Setze $S := A^{-1}$. Dann:

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(S \cdot A) = \mathrm{Rang}(E_n) = n. \quad \square$$

Inversenberechnung. Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(3,3;\mathbb{Q}).$$

Sehen: Rang$(A) = 3$, z.B. mit

$$A \xrightarrow{SpOp(1;2,1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{ZOp(-1;1,3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht: A^{-1}. Idee: Falls

$$S_k \cdots S_1 \cdot A = E_n$$

mit Elementarmat S_i:

$$A^{-1} = S_k \cdots S_1.$$

5.2.15: Solche S_i existieren!

konkretes Verfahren:

$$\begin{array}{ccc} & A & \text{Notizblock } S_i \\ & \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(1,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(1;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(-1;3,1)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(-1;3,2)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\right) \end{array}$$

⚠ Nur ZOp verwenden!