__Definition__ Lineares Gleichungssystem (LGS) über $\mathbb{k}$ in $x_1, \dots, x_n$:

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{k}$. Nenne $(*)$ homogen, falls $b_1 = \dots = b_m = 0_{\mathbb{k}}$.

Lösung von $(*)$: $s \in \mathbb{k}^n$, das alle Glg. erfüllt.

__Bemerkung__ Elegante Schreibweise: Mit $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{k}^m$:

$$(*) \qquad A \cdot x = b$$

__Satz__ $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{k})$, $b \in \mathbb{k}^m$.

(i) Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$ ist

$$\{v \in \mathbb{k}^n;\ A \cdot v = 0\} = \{v \in \mathbb{k}^n;\ \mu_A(v) = 0\} = \mathrm{kern}(\mu_A)$$

Insbes.: Lsg-Menge von $A \cdot x = 0$ UVR der Dim. $n - \mathrm{Rang}(A)$ in $\mathbb{k}^n$.

(ii) Ist $s \in \mathbb{k}^n$ Lsg von $A \cdot x = b$, so ist die Lsg-Menge von $A \cdot x = b$ gegeben als

$$\{s + v;\ v \in \mathbb{k}^n,\ A \cdot v = 0\} = s + \mathrm{kern}(\mu_A) = \mu_A^{-1}(b).$$

__Beweis__ Zu (i). Klar: Beschreibung der Lsg-Menge. Weiter mit Dim-Formel:

$$n = \dim(\mathbb{k}^n) = \dim(\mathrm{kern}(\mu_A)) + \dim(\mathrm{Bild}(\mu_A)) = \dim(\mathrm{kern}(\mu_A)) + \mathrm{Rang}(A).$$

Zu (ii). Haben für $v \in \mathbb{k}^n$:

$$A \cdot v = b \iff \mu_A(v) = b \iff v \in \mu^{-1}(b).$$

Somit: $\mu^{-1}(b)$ Lsg-Menge von $A \cdot x = b$. Zeigen

$$\mu^{-1}(b) = s + \mathrm{kern}(\mu_A).$$

"$\subseteq$": Sei $s' \in \mu^{-1}(b)$. Dann, für $v := s' - s$:

$$\mu_A(v) = \mu_A(s - s') = \mu_A(s) - \mu_A(s') = b - b = 0 \in \mathbb{k}^m$$

Also $v \in \mathrm{kern}(\mu_A)$ und $s' = s + v \in s + \mathrm{kern}(\mu_A)$.

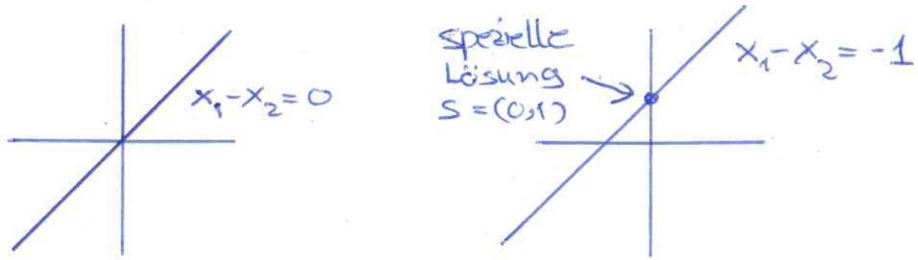
"$\supseteq$": Sei $s' \in s + \mathrm{kern}(\mu_A)$. Dann: $s' = s + v$ mit $v \in \mathrm{kern}(\mu_A)$. Somit

$$\mu_A(s') = \mu_A(s + v) = \mu_A(s) + \mu_A(v) = b$$

D.h.: $s' \in \mu_A^{-1}(b)$. $\square$

<u>Beispiel</u> Betrachte das LGS

$$x_1 - x_2 = -1$$



Lsg-Menge des homog. LGS

Lsg-Menge ist die um $s=(0,1)$ verschobene Lsg-Menge des homogenen LGS

<u>Satz</u> $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Dann äquivalent:

(i) $A \cdot x = b$ ist lösbar.

(ii) $b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n})$.

(iii) $b \in \mathrm{Bild}(\mu_A)$.

(iv) Für $(A,b) := (A_{*1}, \dots, A_{*n}, b)$ gilt

$$\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A).$$

<u>Beweis</u> "(i) ⇒ (ii)": Sei $s \in \mathbb{K}^n$ Lsg. Dann:

$$b = A \cdot s = s_1 A_{*1} + \dots + s_n A_{*n} \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}).$$

"(ii) ⇒ (i)": Sei $b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n})$. Da gibt es $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ mit

$$b = s_1 A_{*1} + \dots + s_n A_{*n} = A \cdot s.$$

"(ii) ⇔ (iii)": klar mit

$$\mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}) = \mathrm{Bild}(\mu_A).$$

"(ii) ⇒ (iv)": Wegen $b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n})$:

$$\mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}, b) = \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}).$$

Somit $\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A)$.

"(iv) ⇒ (ii)": Haben

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A) &\Rightarrow \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}, b)) \\ &\quad = \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n})) \\ &\Rightarrow \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}, b) \\ &\quad = \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}) \\ &\Rightarrow b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \dots, A_{*n}). \quad \square \end{aligned}$$

<u>Folgerung</u> $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Dann

$$\mathrm{Rang}(A) = m \Rightarrow A \cdot x = b \text{ lösbar.}$$

__Satz__ $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Dann äquivalent:

(i) $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar.

(ii) $\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A) = n$.

__Beweis__ "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Wegen $A \cdot x = b$ lösbar:

$$\mathrm{Rang}(A,b) \overset{5.3.5}{=} \mathrm{Rang}(A).$$

5.3.3: Lsg-Menge von $A \cdot x = b$ ist von der Form

$$s + \mathrm{kern}(\mu_A).$$

Weiter:

$$s \text{ einzige Lsg} \Rightarrow \mathrm{kern}(\mu_A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$$
$$\overset{5.3.3}{\Longrightarrow} n - \mathrm{Rang}(A) = 0$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Rang}(A) = n.$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": 5.3.5: Wegen

$$\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A)$$

besitzt $A \cdot x = b$ eine Lösung

$$s \in \mathbb{K}^n$$

5.3.3: Die Lsg-Menge ist

$$s + \mathrm{kern}(\mu_A)$$

und

$$\dim(\mathrm{kern}(\mu_A)) = n - \mathrm{Rang}(A) \overset{(ii)}{=} 0$$

Somit: s einzige Lösung. $\square$

__Folgerung__ $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$, $b \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$$A \cdot x = b$$

eindeutig lösbar mit Lsg

$$s = A^{-1} \cdot b$$

<u>Beispiel</u> Betrachte Matrix A in normierter ZSF und Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zugehöriges LGS $A \cdot x = b$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \\ (0 \cdot x_3 &= 0) \end{aligned}$$

Bestimmen Lösungen:

* x_3 frei wählbar
* $x_2 = -1 + 2x_3$
* $x_1 = 1 + x_2 - x_3 = x_3$

Also, Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x_3 \in \mathbb{Q} \right\}$$

<u>Satz</u> $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ in normierter ZSF, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0\\0\\0\\0 \end{matrix}}\right\} r$$

mit Pivotspalten $A_{*j_1}, \ldots, A_{*j_r}$. Dann

(i) $A \cdot x = 0$ hat $(n-r)$-dim. Lösungraum, Lösungen gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{j_r} &= -a_{rj_r+1} x_{j_r+1} - \cdots - a_{rn} x_n \\ &\vdots \\ x_{j_1} &= -a_{1j_1+1} x_{j_1+1} - \cdots - a_{rn} x_n \end{aligned}$$

(ii) $A \cdot x = b$ lösbar $\Leftrightarrow b_{r+1} = \ldots = b_m = 0_{\mathbb{K}}$.

Falls lösbar: Spezielle Lsg. geg. durch

$$\begin{aligned} s_j &:= 0 \text{ für } j \neq j_1, \ldots, j_r \\ s_{j_r} &:= b_r \\ &\vdots \\ s_{j_1} &:= b_1 - a_{1j_2} s_{j_2} - \cdots - a_{1j_r} s_{j_r}. \end{aligned}$$

Satz $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, $S \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$ invertierbar. Dann, für jedes $x \in \mathbb{K}^n$:

$$A \cdot x = b \iff (S \cdot A) \cdot x = S \cdot b.$$

Beweis „$\Rightarrow$": klar. Zu „$\Leftarrow$": Anwenden von S^{-1}:

$$(S \cdot A) \cdot x = S \cdot b \Rightarrow S^{-1} \cdot (S \cdot A) \cdot x = S^{-1} \cdot (S \cdot b)$$

$$\Rightarrow A \cdot x = b. \qquad \square$$

Bemerkung $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Systematisches Lösen von $A \cdot x = b$:

(i) Bringe A auf normierte ZSF

$$A' = S_k \cdots S_1 \cdot A$$

mit El.-Mat $S_1, \ldots, S_k$. Bestimme

$$b' = S_k \cdots S_1 \cdot b$$

(ii) Bestimme Lsg-Menge L von $A' \cdot x = b'$, z.B. mit 5.3.10

Dann: L auch Lsg-Menge von $A \cdot x = b$.

Beispiel Betrachte $A \cdot x = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teil (i) des Verfahrens:

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad b \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{ZOp(-1;1,2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{ZOp(1;2,3)} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \quad A' \qquad\qquad b' \end{array}$$

Teil (ii) des Verfahrens: Lösen von

$$A' \cdot x = b'$$

Bereits in Bsp. 5.3.9 durchgeführt, Lsg-Menge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist auch Lsg-Menge von $A \cdot x = b$.