Konstruktion X Menge. *Menge der Permutationen von* X:

$$S(X) := \{\sigma : X \to X \,;\, \sigma \text{ bijektiv}\}.$$

Verknüpfung auf $S(X)$: Komposition

$$S(X) \times S(X) \to S(X), \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau.$$

Satz X Menge. Dann ist $(S(X), \circ)$ Gruppe. Neutrales Element: id_X. Inverses zu $\sigma \in S(X)$: Umkehrabb. $\sigma^{-1} \in S(X)$.

Beweis Wissen: "$\circ$" ist assoziativ. Klar: id_X neutral und $\sigma^{-1} : X \to X$ invers zu $\sigma : X \to X$. $\square$

Beispiel Für $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ erhält man die *symmetrische Gruppe*:

$$S_n := S(X_n)$$

Schreibweise Die Elemente von S_n geben wir durch "Wertetabellen" an. Für $n = 3$:

$$id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$$

Transposition in S_n: Für $i, j \in X_n$ mit $i \neq j$:

$$(i,j) : X_n \to X_n, \quad \begin{array}{l} i \mapsto j \\ j \mapsto i \\ k \mapsto k \text{ für } k \neq i,j \end{array}$$

Bemerkung Für jede Transposition in S_n gilt:

$$(i,j) = (j,i) = (i,j)^{-1} = (j,i)^{-1}.$$

Satz S_n hat genau $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ Elemente.

Beweis Die Elemente von S_n sind

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

wobei jedes $1 \leq i \leq n$ genau einmal in $\{a_1, \dots, a_n\}$ vorkommt. Zählen:

Wahl von	a_1	n	Möglichkeiten
" "	a_2	$n-1$	"
	$\vdots$	$\vdots$	
" "	a_{n-1}	2	"
" "	a_n	1	"

Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten. $\square$

Bemerkung Die Gruppen

$$S_1 = \{id_{X_1}\}, \quad S_2 = \{id_{X_2}, (1,2)\}$$

sind abelsch.

Die Gruppe S_3 ist nicht abelsch:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition Signum von $\sigma \in S_n$:

$$sg(\sigma) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Beispiel Haben

$$sg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{(1-2) \cdot (3-2) \cdot (3-1)}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} = -1,$$

$$sg \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(3-2) \cdot (1-2)(1-3)}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} = 1.$$

Definition Fehlstand von $\sigma \in S_n$:
Paar i, j mit

$$i < j \quad \text{und} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Satz Seien $\sigma \in S_n$ und $m(\sigma)$ die Anzahl der Fehlstände von σ.
Dann:

$$sg(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}.$$

Beweis Haben

$$\prod_{i<j} \sigma(j)-\sigma(i) = \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \sigma(j)-\sigma(i) \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j)-\sigma(i)$$

$$= (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} -\sigma(j)+\sigma(i) \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j)-\sigma(i)$$

$$\underset{\substack{\text{Umbenennung} \\ j \leftrightarrow i}}{=} (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\substack{j<i \\ \sigma(j)>\sigma(i)}} \sigma(j)-\sigma(i) \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j)-\sigma(i)$$

$$= (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \sigma(j)-\sigma(i)$$

$$= (-1)^{m(\sigma)} \prod_{i<j} j-i$$

$$\Longrightarrow sg(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^{m(\sigma)}. \quad \square$$

Beispiel $1 \leq k < l \leq n$. Fehlstände von $\sigma := (k, l) \in S_n$:

* k, l
* k, j, $\quad j = k+1, \ldots, l-1$
* i, l, $\quad i = k+1, \ldots, l-1$

Somit $m(\sigma)$ ungerade, d.h.:

$$sg(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = -1.$$

Satz Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Haben surjektiven Gruppenhom.:

$$sg : S_n \to \{\pm 1\}, \quad \sigma \mapsto sg(\sigma).$$

Beweis Wissen:

$$sg(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} \in \{\pm 1\}.$$

Zu zeigen:

$$sg(\sigma \circ \tau) = sg(\sigma) \cdot sg(\tau).$$

Haben:

$$sg(\sigma \circ \tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{j-i}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i}$$

Weiter:

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} = \prod_{\substack{i<j \\ \tau(i)<\tau(j)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \tau(i)>\tau(j)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)}$$

Umbenennung $i \leftrightarrow j$ im 2ten Term $\quad = \quad \text{''} \quad \cdot \prod_{\substack{j<i \\ \tau(j)>\tau(i)}} \frac{\sigma\circ\tau(i) - \sigma\circ\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)}$

mit -1 erweitert $\quad = \quad \text{''} \quad \cdot \prod_{\substack{j<i \\ \tau(j)>\tau(i)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)}$

$$= \prod_{\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i}$$

Somit:

$$sg(\sigma\circ\tau) = sg(\sigma) \cdot sg(\tau). \qquad \square$$

Definition $(G,*)$ Gruppe. Nenne $H \subseteq G$ *Untergruppe* $(H \leq G)$, falls

$e_G \in H$, $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$, $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

Bemerkung $H \leq G$ Untergruppe von $(G,*)$. Dann H Gruppe durch

$$(h_1, h_2) \mapsto h_1 * h_2$$

Neutrales El. von $(H,*)$ ist $e_H = e_G$.

Bemerkung Sei $\varphi: G \to H$ Gruppenhomomorphismus. Dann:

$$\mathrm{kern}(\varphi) := \varphi^{-1}(e_H) \leq G$$

Definition Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. *Alternierende Gruppe*:

$$\begin{aligned} A_n &:= \mathrm{kern}(sg) \\ &= \{\sigma \in S_n ; sg(\sigma) = 1\} \\ &\leq S_n. \end{aligned}$$

Satz Betrachte beliebige Transposition $\tau = (k, l) \in S_n$. Setze

$$A_n \circ \tau := \{\sigma \circ \tau ; \sigma \in A_n\}.$$

Dann:

$$S_n = A_n \cup A_n \circ \tau, \quad A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset.$$

Weiter: A_n hat $\frac{n!}{2}$ Elemente.

Beweis Zeigen $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$. Sei $\sigma \in S_n$.

Fall 1 $sg(\sigma) = 1$. Dann $\sigma \in A_n$

Fall 2 $sg(\sigma) = -1$. Dann:

$$\sigma = \sigma \circ (\tau \circ \tau) = \underbrace{(\sigma \circ \tau)}_{\in A_n} \circ \tau \in A_n \circ \tau.$$

klar: $A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset$: Signum betrachten.

Weiter: Haben zueinander inverse Abb:

$$\begin{aligned} A_n &\longleftrightarrow A_n \circ \tau \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ \tau \\ \varkappa \circ \tau &\mapsfrom \varkappa \end{aligned}$$

Somit A_n, $A_n \circ \tau$ gleichviele Elemente. $\square$