__Definition__ Determinante von $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{k}.$$

__Beispiel__ Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

__Satz__ Die Abb. $\det: \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$, $A \mapsto \det(A)$ hat folgende Eigenschaften:

(D1) det ist linear in jeder Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ bB_{i*} + cC_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = b \cdot \det \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ B_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ C_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

(D2) det ist alternierend:

$$A_{i*} = A_{j*} \text{ für } i \neq j \implies \det(A) = 0.$$

(D3) det ist normiert: $\det(E_n) = 1$.

__Beweis__ Zu (D1): Haben

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (b b_{i\sigma(i)} + c c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= b \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$+ c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Zu (D2): Wissen: $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ mit $\tau = (i,j)$

Damit

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sg}(\sigma\circ\tau) a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)}$$

Jetzt

$$a_{1\sigma\circ\tau(1)} \cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)} = a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$A_{i*} = A_{j*}$

$$= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Zu (D3). Haben für $E_n = (e_{ij})$:

$$\det(E_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) e_{1\sigma(1)} \cdots e_{n\sigma(n)}$$

$$= e_{11} \cdots e_{nn} = 1_{\mathbb{k}}. \qquad \square$$

Satz Es sei $\delta : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Abbildung mit (D1) und (D2). Dann, für alle $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$:

(i) δ invariant unter $\mathrm{ZOp}(\lambda; j, i)$:

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \lambda A_{j*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

(ii) Bei $\mathrm{ZOp}(i,j)$ ändert δ das Vorzeichen:

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = -\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

(iii) Bei $\mathrm{ZOp}(\lambda; i)$ ändert sich δ um Faktor λ:

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ \lambda \cdot A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

Dabei: (i)–(iii) gelten insbesondere für det.

Beweis (iii) klar mit (D1). Zu (i). Haben

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \lambda A_{j*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}}_{= 0_{\mathbb{K}} \text{ nach (D2)}}.$$

Zu (ii). Haben

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \overset{(i)}{=} \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + A_{j*} \\ \vdots \\ -A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(i)}{=} \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ -A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \overset{(iii)}{=} -\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}. \quad \square$$

__Folgerung__ Es gilt:

$$\det(E(n;\lambda;j,i)) = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i+\lambda e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$= 1_{\mathbb{K}},$$

$$\det(E(n;i,j)) = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$= -1_{\mathbb{K}},$$

$$\det(E(n;\lambda;i)) = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda.$$

__Folgerung__ Es seien $\delta : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Abb. mit (D1) und (D2), $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$.
Dann gilt:

$$\delta(E(n;\lambda;j,i)\cdot A) = \delta(A) = \det(E(n;\lambda;j,i))\cdot\delta(A)$$

$$\delta(E(n;i,j)\cdot A) = -\delta(A) = \det(E(n;i,j))\cdot\delta(A)$$

$$\delta(E(n;\lambda;i)\cdot A) = \lambda\cdot\delta(A) = \det(E(n;\lambda;i))\cdot\delta(A)$$

Satz Es sei $\delta : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Abb. mit (D1) und (D2). Dann:

(i) Für jedes $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ mit $\mathrm{Rang}(A) < n$ gilt $\delta(A) = 0_{\mathbb{K}}$.

(ii) Setze $\alpha := \delta(E_n)$. Dann gilt für jedes $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$:

$$\delta(A) = \alpha \cdot \det(A).$$

Beweis Zu (i). Wähle El.-Mat. $S_1, \dots, S_k$ mit

$$B := S_k \cdots S_1 \cdot A$$

in ZSF (5.1.13). Folgerung 6.2.6:

$$\delta(B) = \det(S_k) \cdots \det(S_1) \cdot \delta(A)$$

Wegen $\det(S_i) \neq 0_{\mathbb{K}}$ reicht es zu zeigen:

$$\delta(B) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Wegen $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(A) < n$:

$$B_{n*} = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}).$$

Somit

$$\delta(B) = \delta \begin{pmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{n-1*} \\ 0_{\mathbb{K}} \cdot B_{n*} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \delta(B) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Zu (ii). Falls $\mathrm{Rang}(A) < n$: ✓

Sei A vom Rang n. Dann, mit 5.2.15:

$$A = S_k \cdots S_1 \cdot E_n \quad \text{mit El-Mat } S_i$$

Damit:

$$\begin{aligned} \delta(A) &\overset{6.2.6}{=} \det(S_k) \cdots \det(S_1) \cdot \delta(E_n) \\ &= \alpha \cdot \det(S_k) \cdots \det(S_1) \cdot \det(E_n) \\ &\overset{6.2.6}{=} \alpha \cdot \det(A). \end{aligned}$$

□

Folgerung Es sei $\delta : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ Abb. mit (D1), (D2), (D3). Dann:

$$\delta = \det.$$

Folgerung $A \in Mat(n,n;\mathbb{K})$. Dann sind äquivalent:

(i) $Rang(A) = n$.

(ii) A invertierbar.

(iii) A Produkt von El-Mat.

(iv) $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Beweis Wissen: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Zu "(iii) $\Rightarrow$ (iv)": Sei $A = S_1 \cdots S_k$ mit El-Mat. S_i. Dann:

$$\det(A) \overset{6.2.6}{=} \det(S_1) \cdots \det(S_k) \overset{6.2.5}{\neq} 0_{\mathbb{K}}.$$

Zu "(iv) $\Rightarrow$ (i)": Angenommen $Rang(A) < n$. Dann, mit 6.27: $\det(A) = 0_{\mathbb{K}}$ ↯ $\square$

Determinantenmultiplikationssatz

Seien $A, B \in Mat(n,n;\mathbb{K})$. Dann:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis Fall 1: $Rang(A) < n$ oder $Rang(B) < n$. Dann

$$Rang(A \cdot B) = \dim(\mu_A(\mu_B(\mathbb{K}^n))) < n$$

Mit Satz 6.2.7:

$$\det(A \cdot B) = 0_{\mathbb{K}} = \det(A) \cdot \det(B)$$

Fall 2: $Rang(A) = n = Rang(B)$. Dann:

$$A = S_1 \cdots S_k, \quad B = T_1 \cdots T_l$$

mit El-Mat. S_i, T_j. Folglich:

$$\det(A \cdot B) = \det(S_1 \cdots S_k \cdot T_1 \cdots T_l)$$
$$= \det(S_1) \cdots \det(S_k) \det(T_1) \cdots \det(T_l)$$
$$= \det(A) \cdot \det(B). \quad \square$$

Folgerung Haben Gruppenhom.:

$$GL(n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*, \quad A \mapsto \det(A).$$