Satz $A \in Mat(n,n;k)$. Dann:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Beweis Betr. $A = (a_{ij})$ und $\sigma \in S_n$.

Haben:

$$\underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\substack{\text{Indexpaare } i,j \\ \text{mit } j = \sigma(i)}} = \underbrace{a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}}_{\substack{\text{Indexpaare } k,l \\ \text{mit } l = \sigma(k)}}.$$

Weiter:

$$sg(\sigma^{-1}) = sg(\sigma)^{-1} = sg(\sigma).$$

Damit:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma^{-1})\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \det(A^t). \qquad \square$$

Folgerung $A \in Mat(n,n;k)$. Dann:

(i) det ist linear in jeder Spalte von A.

(ii) $\det(A) = 0$, falls $A_{*i} = A_{*j}$ für $i \neq j$.

(iii) det invariant unter $SpOp(\lambda; j,i)$.

(iv) Bei $SpOp(i,j)$ ändert det das Vorzeichen.

(v) Bei $SpOp(\lambda; i)$ ändert sich det um Faktor λ.

Satz Für obere bzw. untere Dreiecksmatrizen hat man

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn},$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}.$$

Beweis Fall 1: A ist Diagonalmatrix.

Dann:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}\det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\cdots a_{nn}.$$

Fall 2: A ist obere Dreiecksmatrix

a) $a_{ii} \neq 0_K$ für $i = 1, \dots, n$. Dann:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Typ } (\lambda; j, i)]{\text{ZOps vom}} \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Somit:

$$\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}.$$

b) $a_{ii} = 0_K$ für ein i. Betrachte größtes i mit $a_{ii} = 0$. Dann:

$$A = \begin{pmatrix} * & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & * & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & * & \\ 0 & & & & & \ddots \; * \end{pmatrix} \xrightarrow[(\lambda; j, i)]{\text{ZOps}} \begin{pmatrix} * & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & * & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix}.$$

$a_{ii} \neq 0$

Somit:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ 0_K \cdot A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*}\end{pmatrix} = 0_K \cdot \det(A)$$

$$= 0 = a_{11}\cdots a_{nn}.$$

Fall 3: A ist untere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Dann:

$$\det(A) \overset{6.3.1}{=} \det(A^t) \overset{\text{Fall 2}}{=} a_{11}\cdots a_{nn}. \qquad \square$$

__Folgerung__ Es seien $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$. Dann:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C).$$

__Beweis__ Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ZOps}(i,j)]{\text{ZOps}(\lambda;j,i)} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

sodass

$$A' = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Notieren dabei

$l :=$ Anzahl benötigte ZOp vom Typ (i,j).

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ZOps}(i,j)]{\text{ZOps}(\lambda;j,i)} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

sodass

$$C' = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Notieren wieder

$k :=$ Anzahl benötigte ZOp vom Typ (i,j).

Dann:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (-1)^l \cdot (-1)^k \cdot \det\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^l \cdot \det(A') \cdot (-1)^k \cdot \det(C')$$

$$= \det(A) \cdot \det(C). \quad \square$$

Definition $A = (a_{ij}) \in Mat(n,n;\mathbb{k})$, $1 \le i,j \le n$.

Setze

$$A_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \hphantom{a_{11} \cdots a_{1j-1}} & j & \hphantom{a_{1j+1} \cdots a_{1n}} \end{matrix} & \end{array}$$

Die zu A komplementäre Matrix ist

$$A^{\#} := \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \cdots & \det(A_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(A_{n1}) & \cdots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix}^t$$

Satz $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$. Dann:

$$A^{\#} \cdot A = A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot E_n .$$

Lemma $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$. Dann:

$$\det(A_{ij}) = \det(A_{*1}, \dots, A_{*j-1}, e_i, A_{*j+1}, \dots, A_{*n})$$

Beweis $SpOp(-a_{ij}; i, j)$ machen rechte Seite zu linker Seite. $\square$

Beweis Satz Schreibe $A^{\#} \cdot A = (c_{ik})$.

Dann:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \det(A_{ji}) \cdot a_{jk} \qquad \left[\begin{matrix}\text{Matrizenmult.} \\ A^{\#} = (\det(A_{ij}))^t\end{matrix}\right]$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} \sum_{j=1}^{n} \det(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, e_j, A_{*i+1}, \dots, A_{*n}) \cdot a_{jk}$$

$$\underset{\text{in Spalten}}{\overset{\text{det linear}}{=}} \det(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j, A_{*i+1}, \dots, A_{*n})$$

$$= \det(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, A_{*k}, A_{*i+1}, \dots, A_{*n})$$

$$= \begin{cases} \det(A), & k = i, \\ 0, & k \ne i. \end{cases}$$

Somit: $A^{\#} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$. Weiter:

$$(A^{\#})^t = (\det(A_{ij})) = (\det(A^t_{ij})) = (\det((A^t)_{ji})) = (A^t)^{\#}.$$

Damit

$$A \cdot A^{\#} = ((A^{\#})^t \cdot A^t)^t = ((A^t)^{\#} \cdot A^t)^t$$

$$= (\det(A^t) \cdot E_n)^t = \det(A) \cdot E_n \ \square$$

Cramersche Regel $A \in GL(n;\mathbb{k})$. Dann:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$$

Definition $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$, $1 \le i,j \le n$.
(i,j)-te Streichungsmatrix:

$$A'_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. Dann:

(i) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$,

(ii) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$.

Lemma $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. Dann:

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}).$$

Beweis Haben:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & * \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & * \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{SpOp}(l,l+1) \\ l=j-1,\dots,1}]{\substack{\mathrm{ZOp}(k,k+1) \\ k=i-1,\dots,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix} =: B$$

Somit

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \det(B) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}).$$

□

Beweis Entwicklungssatz Zu (i). Wissen:

$$A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot E_n$$

Damit:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (A \cdot A^{\#})_{ii} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a^{\#}_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}). \end{aligned}$$

Zu (ii). Verwende (i) und $\det(A) = \det(A^t)$. □

Bemerkung Laplace-Entwicklung
nach der i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}),$$

nach der j-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}).$$

Verteilung der Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ gemäß "Schachbrettmuster":

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad (n=3)$$

Rechenbeispiel: Bestimmen $\det(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vereinfachen mittels geeigneter ZOp und SpOp. Hier

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{SpOp(2;3,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$$

Entwicklung nach der 2-ten Spalte: Streichungsmatrix

$$B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(B) &= (-1)^{2+2} b_{22} \det(B_{22}) \\ &= 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 5 \cdot (1-7) \\ &= -30. \end{aligned}$$