Definition V $\mathbb{K}$-VR, $V_1, \dots, V_r \leq_{\mathbb{K}} V$.

Summe:

$$\sum_{i=1}^{r} V_i := V_1 + \dots + V_r$$

$$:= \{v_1 + \dots + v_r \,;\, v_i \in V_i\}$$

Satz V $\mathbb{K}$-VR, $V_1, \dots, V_r \leq_{\mathbb{K}} V$. Dann: $V_1 + \dots + V_r$ kleinster UVR von V, sodass

$$V_1, \dots, V_r \subseteq V.$$

Beweis Zu $V_1 + \dots + V_r$ UVR. klar:

$$0_V = 0_V + \dots + 0_V \in V_1 + \dots + V_r .$$

Weiter, für alle $v_i, v_i' \in V_i$ und $a \in \mathbb{K}$:

$$(v_1 + \dots + v_r) + (v_1' + \dots + v_r') = (v_1 + v_1') + \dots + (v_r + v_r') \in V_1 + \dots + V_r ,$$

$$a \cdot (v_1 + \dots + v_r) = a \cdot v_1 + \dots + a \cdot v_r \in V_1 + \dots + V_r .$$

Weiter: $V_1, \dots, V_r \subseteq V_1 + \dots + V_r$.

Zu "kleinster": Betrachte $U \leq_{\mathbb{K}} V$ mit $V_1, \dots, V_r \subseteq U$. Dann:

$v_1 + \dots + v_r \in V_1 + \dots + V_r$ mit $v_i \in V_i$ $\implies v_1, \dots, v_r \in U$

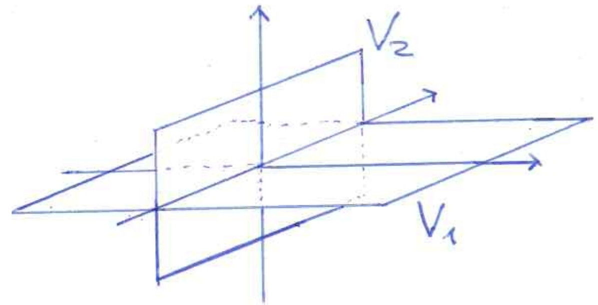
$\implies v_1 + \dots + v_r \in U.$

Somit $V_1 + \dots + V_r \subseteq U$. $\square$

Beispiel Betrachte in $\mathbb{R}^3$:

$V_1 := \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$

$V_2 := \mathrm{Lin}(e_2, e_3)$



Dann: $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$, d.h., jedes $x \in \mathbb{R}^3$ hat Darstellung

$$(*) \quad x = v_1 + v_2 \quad \text{mit } v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Beob.: $(*)$ ist nicht eindeutig: Haben

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1 \cdot e_1}_{\in V_1} + \underbrace{(x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3)}_{\in V_2}$$

$$= \underbrace{(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2)}_{\in V_1} + \underbrace{x_3 \cdot e_3}_{\in V_2} .$$

Definition Direkte Zerlegung eines $\mathbb{K}$-VR V: Fam. von UVR $V_1, \dots, V_r \underset{\text{UVR}}{\leq} V$ mit

(i) $V = V_1 + \dots + V_r$.

(ii) Für jede Fam. $(v_1, \dots, v_r)$ mit $v_i \in V_i$ gilt

$$v_1 + \dots + v_r = 0_V \Rightarrow v_1 = \dots = v_r = 0_V.$$

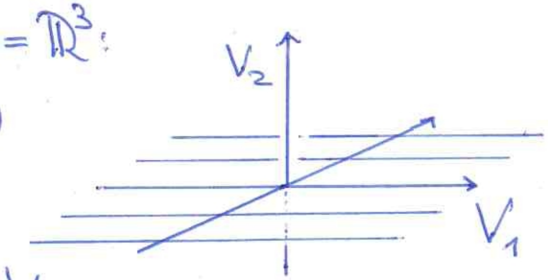
Falls $V_1, \dots, V_r$ direkte Zerlegung von V, schreibe

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Beispiel Für $V = \mathbb{R}^3$:

$V_1 := \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$

$V_2 := \mathrm{Lin}(e_3)$



Dann: $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

Satz V $\mathbb{K}$-VR, $V_1, \dots, V_r \underset{\text{UVR}}{\leq} V$. Dann äquivalent:

(i) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

(ii) Jedes $v \in V$ hat eind. Darstellung

$$(*) \quad v = v_1 + \dots + v_r \quad \text{mit } v_i \in V_i.$$

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Wegen $V = V_1 + \dots + V_r$: Jedes $v \in V$ hat Darst. $(*)$.

Eindeutigkeit von $(*)$: Seien

$$v = v_1 + \dots + v_r = v_1' + \dots + v_r' \quad \text{mit } v_i, v_i' \in V_i.$$

Dann:

$$0_V = v - v = (v_1 - v_1') + \dots + (v_r - v_r')$$

Dabei: $v_i - v_i' \in V_i$. Nach Definition der direkten Zerlegung:

$$v_i - v_i' = 0_V \quad \text{für } i = 1, \dots, r.$$

Also $v_i = v_i'$ für $i = 1, \dots, r$.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". klar: $V = V_1 + \dots + V_r$.

Weiter: Seien $v_i \in V_i$ mit $v_1 + \dots + v_r = 0_V$.

Dann:

$$v_1 + \dots + v_r = 0_V = 0_V + \dots + 0_V$$

Eindeutigkeit von $(*)$ liefert

$$v_i = 0_V \quad \text{für } i = 1, \dots, r. \qquad \square$$

Definition V $\mathbb{K}$-VR mit direkter Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r .$$

Nenne V_i die *i-te komponente* von V. Für

$$v = v_1 + \ldots + v_r \quad \text{mit } v_i \in V_i$$

nenne v_i die *i-te komponente* von v.

Satz (Projektion auf die i-te komponente). Sei V $\mathbb{K}$-VR mit direkter Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r .$$

Dann hat man lineare Abbildungen

$$P_i : V \to V, \quad v \mapsto v_i, \quad \text{wobei } v = v_1 + \ldots + v_r \text{ mit } v_i \in V_i .$$

Dabei:

$$\mathrm{Bild}(P_i) = V_i ,$$

$$\mathrm{kern}(P_i) = V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r ,$$

$$P_i \circ P_i = P_i .$$

Beweis klar: $P_i : V \to V$ wohldef. Abb., da v_i eindeutig.

Zu P_i linear. Haben für $v = v_1 + \ldots + v_r$ und $v' = v_1' + \ldots + v_r'$:

$$P_i(a \cdot v + a' \cdot v') = P_i(\underbrace{a \cdot v_1 + a' \cdot v_1'}_{\in V_1} + \ldots + \underbrace{a \cdot v_r + a' \cdot v_r'}_{\in V_r})$$

$$= a \cdot v_i + a' \cdot v_i'$$

$$= a \cdot P_i(v) + a' \cdot P_i(v') .$$

Weiter: für jedes $v_i \in V_i$ gilt $P_i(v_i) = v_i$.

Damit:

$$P_i(V) = V_i$$

und für jedes $v = v_1 + \ldots + v_r$:

$$P_i \circ P_i(v) = P_i(v_i) = v_i = P_i(v) .$$

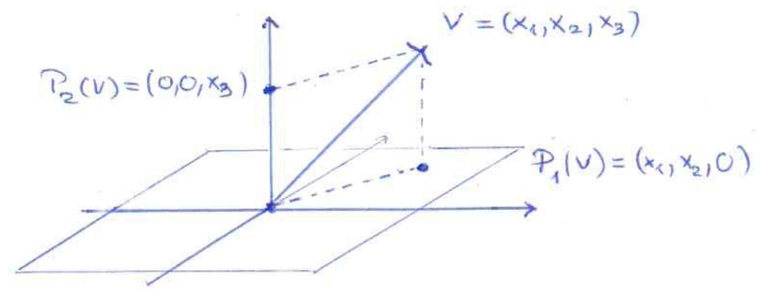
Weiter; für $v = v_1 + \ldots + v_r$:

$$P_i(v) = 0_V \iff v_i = 0_V$$

$$\iff v = v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_r$$

$$\iff v \in V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r . \qquad \square$$

Beispiel Betr. $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathrm{Lin}(e_1, e_2)}_{V_1} \oplus \underbrace{\mathrm{Lin}(e_3)}_{V_2}$.



Für $v = (x_1, x_2, x_3)$:

$$v_1 = (x_1, x_2, 0), \qquad v_2 = (0, 0, x_3).$$

__Satz__ V $\mathbb{K}$-VR, $V_1, V_2 \leq_{\mathbb{K}} V$ UVR.

Dann äquivalent:

(i) $V = V_1 \oplus V_2$.

(ii) $V = V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

__Beweis__ Zu "(i) ⟹ (ii)": klar:

$$V = V_1 + V_2$$

Zeigen $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Sei $v \in V_1 \cap V_2$.

Dann:

$$\begin{array}{ccccc} 0_V & \overset{(*)}{=} & v & + & (-v) \\ & & \cap & & \cap \\ & & V_1 & & V_2 \end{array}$$

Eindeutigkeit der Darst $(*)$:

$$v = -v = 0_V.$$

Zu "(ii) ⟹ (i)". klar: $V = V_1 + V_2$.

Sei

$$v_1 + v_2 = 0_V \quad \text{mit } v_i \in V_i.$$

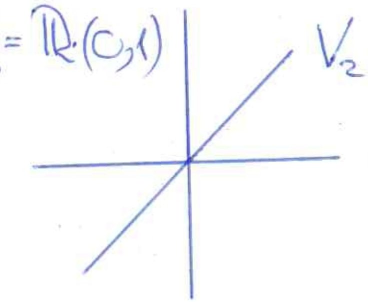
Zu zeigen: $v_1 = v_2 = 0_V$. Haben

$$v_1 = -v_2 \in V_2, \quad v_2 = -v_1 \in V_1.$$

Somit $v_1, v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Also $v_1 = v_2 = 0_V$. □

__Bemerkung__ Betrachte in $\mathbb{R}^2$



Dann: $\mathbb{R}^2 = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_i \cap V_j = \{0\}$ für $i \neq j$. Aber

$$(0,0) = (1,0) + (-1,-1) + (0,1)$$

D.h., $\mathbb{R}^2 = V_1 + V_2 + V_3$ __keine__ direkte Zerlegung!

Satz V $\mathbb{K}$-VR, $P: V \to V$ lineare Abbildung mit $P \circ P = P$. Dann:

$$V = \mathrm{kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

Beweis Zeigen zunächst

$$V = \mathrm{kern}(P) + \mathrm{Bild}(P).$$

Sei $v \in V$. Dann:

$$v = (v - P(v)) + P(v).$$

Brauchen: $v - P(v) \in \mathrm{kern}(P)$. Haben:

$$\begin{aligned} P(v - P(v)) &= P(v) - P \circ P(v) \\ &= P(v) - P(v) \\ &= 0_V. \end{aligned}$$

Also $v - P(v) \in \mathrm{kern}(P)$ und somit

$$v \in \mathrm{kern}(P) + \mathrm{Bild}(P).$$

Für "$\oplus$" genügt nach vorigem Satz

$$\mathrm{kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P) = \{0_V\}.$$

Sei $v \in \mathrm{kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P)$. Dann:

$$P(v) = 0_V, \qquad v = P(w) \text{ mit } w \in V.$$

Somit

$$0_V = P(v) = P \circ P(w) = P(w) = v.$$

$\square$

Bemerkung $P \circ P = P$ ist wesentl. für den Satz. Betrachte

$$P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0).$$

Dann: $P \circ P = 0 \neq P$. Weiter:

$$\mathrm{kern}(P) = \mathbb{R} \cdot (1,0) = \mathrm{Bild}(P).$$

D.h., $\mathbb{R}^2 \neq \mathrm{kern}(P) + \mathrm{Bild}(P)$.

Satz Seien $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ direkte Zerlegung, $B_i = (v^i_1, \ldots, v^i_{n_i})$ Basis für V_i. Dann:

$$B := (B_1, \ldots, B_r) := (v^1_1, \ldots, v^1_{n_1}, \ldots, v^r_1, \ldots, v^r_{n_r})$$

Basis für V. Insbesondere gilt

$$\dim(V) = \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_r).$$

Beweis Zeigen: B erzeugend.

Sei $v \in V$. Dann:

$$v = v_1 + \ldots + v_r \quad \text{mit } v_i \in V_i.$$

Somit

$$v \in \mathrm{Lin}(B_1) + \ldots + \mathrm{Lin}(B_r) \subseteq \mathrm{Lin}(B).$$

Zeigen: B linear unabhängig. Sei

$$0_V = \underbrace{a^1_1 \cdot v^1_1 + \ldots + a^1_{n_1} \cdot v^1_{n_1}}_{\overset{\text{"}\oplus\text{"}}{=} 0_V \in V_1} + \ldots + \underbrace{a^r_1 \cdot v^r_1 + \ldots + a^r_{n_r} \cdot v^r_{n_r}}_{\overset{\text{"}\oplus\text{"}}{=} 0_V \in V_r}$$

Mit B_i linear unabh.: alle $a^i_j = 0_{V_2}$. $\square$

Satz Seien $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ sowie B_i und B wie eben. Weiter

$$\varphi : V \to V$$

lineare Abbildung mit $\varphi(V_i) \subseteq V_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann hat man lin. Abb.

$$\varphi_i : V_i \to V_i, \quad v_i \mapsto \varphi(v_i)$$

wobei $i = 1, \ldots, r$. Die darstellende Matrix von φ bez. B ist

$$M^B_B(\varphi) = \begin{pmatrix} M^{B_1}_{B_1}(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^{B_r}_{B_r}(\varphi_r) \end{pmatrix}.$$

Beweis In den Spalten von $M^B_B(\varphi)$ stehen die koordinatenvektoren der Bilder $\varphi(v^1_1), \ldots, \varphi(v^r_{n_r})$ bez. B. $\square$