

Definition X Menge. Relation auf X :
Teilmenge

$$R \subseteq X \times X = \{(x, y); x, y \in X\}.$$

Schreiben $x \sim y$, falls $(x, y) \in R$.

Beispiel X Menge. Dann:

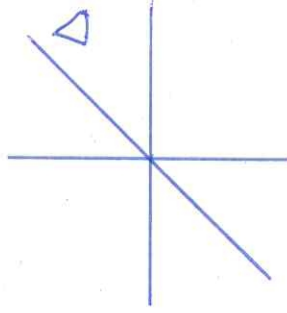
$$\Delta := \{(x, x); x \in X\} \subseteq X \times X$$

Relation auf X . Haben

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta \Leftrightarrow x = y.$$

Etwa für

$$X = \mathbb{R}^2$$



Definition X Menge. 'Äquivalenzrelation'
auf X : Relation $R \subseteq X \times X$ mit

(i) Reflexiv, d.h. $x \sim x$ für alle $x \in X$,

(ii) Symmetrisch, d.h. stets
 $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

(iii) transitiv, d.h. stets

$$x \sim y \text{ und } y \sim z \Rightarrow x \sim z.$$

Beispiel X Menge. Dann $\Delta \in X \times X$
'Äquivalenzrelation auf X .

Beispiel Sei $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. 'Äquivalenzrelation'
auf $\mathbb{Z}$:

$$a \sim_n b \Leftrightarrow n \text{ teilt } a - b.$$

reflexiv: $a \sim_n a$ wegen $n | a - a$

Symmetrisch: $a \sim_n b \Leftrightarrow n | a - b$

$$\Leftrightarrow n | b - a$$

$$\Leftrightarrow b \sim_n a$$

transitiv:

$$a \sim_n b, b \sim_n c \Leftrightarrow n | a - b, n | b - c$$

$$\Rightarrow n | a - c$$

$$\Leftrightarrow a \sim_n c.$$

Definition X Menge, " $\sim$ " Äquivalenzrelation auf X . Äquivalenzklasse von $x \in X$:

$$[x] := \{x' \in X; x' \sim x\} \subseteq X.$$

Nenne $x \in X$ einen Repräsentanten von $[x] \subseteq X$.

Beispiel Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ betrachte die Äq.-Rel.

$$a \sim b : \Leftrightarrow n \mid (a-b)$$

Äquivalenzklassen:

$$[0] = n\mathbb{Z},$$

$$[1] = 1 + n\mathbb{Z},$$

$\vdots$

$$[n-1] = (n-1) + n\mathbb{Z}.$$

Satz X Menge mit Äq.-Rel " $\sim$ " und $x, y \in X$. Dann:

$$(i) [x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y.$$

(ii) Entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Insbes. ist X die disjunkte Vereinigung der Äq.-klassen von " $\sim$ ".

Beweis Zu (i). Haben $x \in [x]$. Weiter:

$$[x] = [y] \Rightarrow x \in [y] \Rightarrow x \sim y.$$

Sei $x \sim y$. Zeigen $[x] \subseteq [y]$. Haben für jedes $z \in [x]$:

$$z \sim x \xrightarrow{\text{Transitivität}} z \sim y \Rightarrow z \in [y].$$

Weiter:

$$x \sim y \xrightarrow{\text{Symmetrie}} y \sim x \xrightarrow{\text{s.o.}} [y] \subseteq [x].$$

Zu (ii). Fall 1: $[x] \cap [y] = \emptyset$. $\checkmark$

Fall 2: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Wähle $z \in [x] \cap [y]$.

Dann:

$$z \sim x, z \sim y \xrightarrow{\text{Symmetrie}} x \sim z, z \sim y$$

$$\xrightarrow{\text{Transitivität}} x \sim y$$

$$\xrightarrow{(i)} [x] = [y]. \quad \square$$

Satz V K -VR, $U \subseteq {}_{12}V$ UVR. Dann hat man Äq.-Rel. auf V :

$$v \sim_u v' : \Leftrightarrow v - v' \in U.$$

Äquiv.-klasse von $v \in V$:

$$[v] = v + U = \{v + u; u \in U\}.$$

Beweis Reflexivität: Sei $v \in V$.
Haben

$$v - v = 0_V \in U \Rightarrow v \sim_u v.$$

Symmetrie: Haben

$$\begin{aligned} v \sim_u v' &\Rightarrow v - v' \in U \\ &\Rightarrow v' - v \in U \Rightarrow v' \sim_u v. \end{aligned}$$

Transitivität: Haben

$$\begin{aligned} v \sim_u v', v' \sim_u v'' &\Rightarrow v - v', v' - v'' \in U \\ &\Rightarrow v - v'' \in U \\ &\Rightarrow v \sim_u v''. \end{aligned}$$

Äquivalenzklassen:

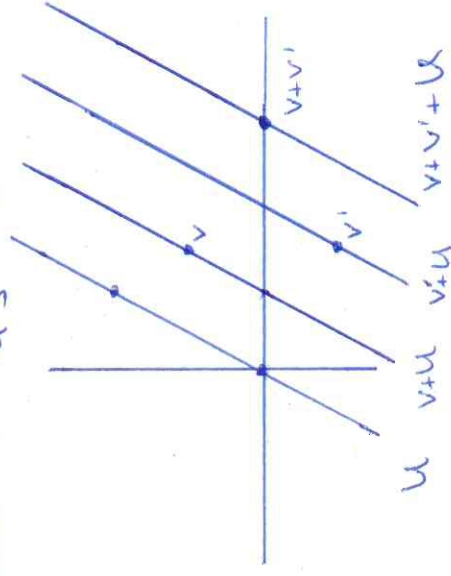
$$\begin{aligned} [v] &= \{v' \in V; v' \sim_u v\} \\ &= \{v' \in V; v - v' \in U\} \\ &= \{v' \in V; v' - v \in U\} \\ &= \{v' \in V; v' = v + u \text{ mit einem } u \in U\} \\ &= v + U. \end{aligned}$$

□

Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \mathbb{R} \cdot (1, 2)$.

Dann:

$$\{\text{Äq.-klassen von } v_u\} = \{\text{Parallelen zu } U\}$$



Wunsch:

$$(v+u) + (v'+u) := v+v'+u, \quad a \cdot (v+u) := a \cdot v + u.$$

Konstruktion V $\mathbb{K}$ -VR, $U \leq_{\mathbb{K}} V$. Betrachte die Menge der Äq.-klassen

$$V/U := V/\sim_U = \{v+U; v \in V\}.$$

Haben wohldef. Addition und Skalarmult. auf V/U :

$$(v+U) + (v'+U) := (v+v') + U,$$

$$a \cdot (v+U) := a \cdot v + U.$$

$(V/U, +, \cdot)$ ist $\mathbb{K}$ -VR, der Quotientenvektorraum von V nach U . Dabei:

$$0_{V/U} = 0_V + U, \quad -(v+U) = (-v) + U.$$

Weiter hat man surjektive lineare Abb.:

$$\pi: V \rightarrow V/U, \quad v \mapsto v+U.$$

Dabei: $\ker(\pi) = U$. Insbesondere, für endlichdimensionales V :

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

Beweis Zeigen: "+" wohldef. Betrachte Äq.-klassen

$$v+U = v_1+U, \quad v'+U = v'_1+U$$

Zu zeigen:

$$(v+v')+U = (v_1+v'_1)+U.$$

Satz 7.2.8: Es reicht, zu zeigen:

$$v+v' \sim_U v_1+v'_1$$

Haben:

$$(v+v') - (v_1+v'_1) = \underbrace{(v-v_1)}_{\in U} + \underbrace{(v'-v'_1)}_{\in U} \in U.$$

Analog: Wohldef. von " $\cdot$ ". Zeigen VR-Axiome für V/U , z.B. Kommutativität von "+":

$$\begin{aligned} (v+U) + (v'+U) &= (v+v') + U \\ &= (v'+v) + U \\ &= (v'+U) + (v+U). \end{aligned}$$

Zeigen: $\pi: V \rightarrow V/U$ linear. Haben

$$\begin{aligned} \pi(a \cdot v + a' \cdot v') &= (a \cdot v + a' \cdot v') + U \\ &= (a \cdot v + U) + (a' \cdot v' + U) \\ &= a \cdot (v+U) + a' \cdot (v'+U) \\ &= a \cdot \pi(v) + a' \cdot \pi(v') \end{aligned}$$

Zeigen $\ker(\pi) = U$. Haben

$$\begin{aligned} \pi(v) = 0_{V/U} &\iff v+U = 0_V+U \\ &\iff v-0_V \in U \\ &\iff v \in U. \quad \square \end{aligned}$$

Homomorphiesatz $\varphi: V \rightarrow W$ linear

Abb. von k -VR, $U \subseteq_k \ker(\varphi)$.

Dann hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi: v \mapsto \varphi(v)} & W \\ \pi: v \mapsto v+U \searrow & & \nearrow \bar{\varphi}: v+U \mapsto \varphi(v) \\ & V/U & \end{array}$$

mit $\bar{\varphi}: V/U \rightarrow W$ wohldef., linear und eind. best. durch $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.
Weiter:

(i) $\bar{\varphi}$ injektiv $\Leftrightarrow U = \ker(\varphi)$.

(ii) $\bar{\varphi}$ surjektiv $\Leftrightarrow \varphi$ surjektiv.

Folgerung $\forall k$ -VR, $U, W \subseteq_k V$. Dann hat man einen Isomorphismus

$$U/(U \cap W) \xrightarrow{\quad} (U+W)/W,$$

$$u+(U \cap W) \mapsto u+W.$$

Beweis Verwenden Hom-Satz:

$$\begin{array}{ccccc} u \mapsto u & \nearrow & U+W & \xrightarrow{\quad} & v \mapsto v+W \\ & & \searrow \varphi & & \nearrow \\ U & \xrightarrow{\quad} & u \mapsto u+W & \xrightarrow{\quad} & (u+w)/w \\ u \mapsto u+(U \cap W) \searrow & & & & \nearrow \bar{\varphi}: u+(U \cap W) \mapsto u+W \\ & & U/(U \cap W) & & \end{array}$$

Haben

$$\ker(\bar{\varphi}) = U \cap W$$

Somit $\bar{\varphi}$ injektiv. Weiter:

$$\text{Bild}(\bar{\varphi}) = \{u+W; u \in U\} = (U+W)/W$$

Also $\bar{\varphi}$ surjektiv. Somit $\bar{\varphi} \text{ Iso.}$ $\square$

Folgerung V endl. dim. K -VR, $U, W \leq_K V$. Dann:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Beweis: Wissen (Folg. aus Hom.-Satz):

$$(U+W)/W \cong U/(U \cap W).$$

Damit:

$$\dim(U+W) - \dim(W) = \dim(U) - \dim(U \cap W). \quad \square$$

Folgerung V endl. dim. K -VR, $V_1, V_2 \leq_K V$. Dann äquivalent:

$$(i) \quad V = V_1 \oplus V_2$$

$$(i) \quad V = V_1 + V_2 \text{ und } \dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2),$$

Beweis "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Satz 7.1.14. Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)":

Reicht zu zeigen: $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Haben

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) \stackrel{(ii)}{=} \dim(V)$$

$$= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0.$$

$\square$