Erinnerung V $\mathbb{k}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Jedes $v \in V$ hat eind. Darst.:

$$v = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{k},$$

die Entwicklung von v nach $\mathcal{B}$. Dabei

$$x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$$

Koordinatenvektor von v bez. $\mathcal{B}$.
Haben Iso. von $\mathbb{k}$-VR:

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{k}^n, \quad v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v).$$

Koordinatenberechnung. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für $\mathbb{k}^n$. Dann, für jedes $v \in \mathbb{k}^n$:

$$x_{\mathcal{B}}(v) = \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{(n \times n)\text{-Matrix}}{}^{-1} \cdot v.$$

Beweis 5.2.15: $(v_1, \dots, v_n)$ invertierbar. Weiter, für $v \in \mathbb{k}^n$ und $x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n)$:

$$v = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$$
$$= (v_1, \dots, v_n) \cdot x_{\mathcal{B}}(v)$$

Mult. mit $(v_1, \dots, v_n)^{-1}$ liefert Beh. $\square$

Erinnerung $\varphi : V \to W$ lin. Abb. von $\mathbb{k}$-VR, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für V, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ Basis für W. Darstellende Matrix von φ:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = (x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)), \dots, x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n)))$$

Haben kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W \\ {\scriptstyle v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)}\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow\ {\scriptstyle w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)} \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow[x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \cdot x]{} & \mathbb{k}^m \end{array}$$

Definition V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen für V. Zugehörige Transformationsmatrix:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V).$$

Satz V $\mathbb{K}$-VR mit Basen $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ und $\mathcal{B}'=(v_1',\dots,v_n')$. Dann: $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ invertierbar und für jedes $v \in V$:

$$x_{\mathcal{B}'}(v) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot x_{\mathcal{B}}(v).$$

Beweis Zeigen: $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ invertierbar.

Haben:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$$
$$= E_n.$$

Weiter: 7.3.3 ~~liefert~~ liefert kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\cong", "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"'] & V \arrow[d, "\cong"', "v \mapsto x_{\mathcal{B}'}(v)"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot x"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$\square$

Satz $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ und $\mathcal{B}'=(v_1',\dots,v_n')$ Basen für $\mathbb{K}^n$. Dann:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = (v_1',\dots,v_n')^{-1} \cdot (v_1,\dots,v_n).$$

Beweis Bestimmen i-te Spalte von $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \cdot e_i = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \cdot x_{\mathcal{B}}(v_i)$$
$$\overset{7.3.3}{=} x_{\mathcal{B}'}(v_i)$$
$$\overset{7.3.2}{=} (v_1',\dots,v_n')^{-1} \cdot v_i$$
$$= \left((v_1',\dots,v_n')^{-1} \cdot (v_1,\dots,v_n)\right)_{*i}.$$

$\square$

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, W endl. dim. $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$, $\varphi: V \to W$ linear. Dann:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = \mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)^{-1}.$$

Beweis Haben kommut. Diagramm:

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
\mathbb{k}^n \arrow[r, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\varphi)\cdot x"] & \mathbb{k}^m \\
V \arrow[u, "\cong", "v \mapsto x_{\mathcal{B}'}(v)"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cong"', "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"] & W \arrow[u, "w \mapsto x_{\mathcal{C}'}(w)", "\cong"'] \arrow[d, "w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)"', "\cong"] \\
\mathbb{k}^n \arrow[r, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\cdot x"'] \arrow[uu, bend left=60, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)\cdot x \;(7.3.5)"] & \mathbb{k}^m \arrow[uu, bend right=60, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)\cdot x \;(7.3.5)"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Folgerung V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\varphi: V \to W$ linear. Dann:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)^{-1}.$$

Folgerung V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\varphi: V \to V$ linear. Dann:

$$\det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\right) = \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right).$$

Beweis Setze $S := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\right) &= \det\left(S \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot S^{-1}\right) \\
&= \det(S) \cdot \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) \det(S)^{-1} \\
&= \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Definition V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear. Determinante von φ:

$$\det(\varphi) := \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right), \quad \mathcal{B} \text{ Basis von } V.$$

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear. Dann:

$$\begin{aligned}
&\varphi \text{ injektiv} \iff \varphi \text{ surjektiv} \iff \varphi \text{ bijektiv} \\
&\iff \varphi \text{ Iso} \iff \det(\varphi) \neq 0_{\mathbb{k}}
\end{aligned}$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ Basis von V. Dann:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ Iso} &\overset{4.2.14}{\iff} \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ invertierbar} \\
&\overset{6.2.9}{\iff} \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) \neq 0_{\mathbb{k}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz V $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\varphi : V \to V$ linear, $A := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Dann äquivalent:

(i) Es gibt Basis $\mathcal{C}$ für V mit

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi).$$

(ii) Es gibt Matrix $S \in GL(n; \mathbb{K})$ mit

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)": $S := \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ tut's (7.3.8).

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Sei $w_j \in V$ der Vektor mit

$$x_{\mathcal{B}}(w_j) = (S^{-1})_{*j}$$

Wegen $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ Iso:

Spalten von S^{-1} Basis für $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basis für V.

Haben kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
w_j \arrow[d, mapsto] & \in & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & V \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}", "\cong"'] & \ni & w_j \arrow[d, mapsto] \\
x_{\mathcal{B}}(w_j) & \in & \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot x"'] & \mathbb{K}^n & \ni & e_j = x_{\mathcal{C}}(w_j)
\end{tikzcd}$$

Somit $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = S$. Mit 7.3.8:

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi). \quad \square$$

Bemerkung Zwei "gleichschwierige" Probleme:

(i) Geg.: Lin. Abb. $\varphi : V \to V$. Gesucht: Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ möglichst "einfach".

(ii) Geg.: $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Gesucht: $S \in GL(n; \mathbb{K})$ mit $S \cdot A \cdot S^{-1}$ möglichst "einfach".

Man nennt (ii) auch das <u>Normalformen-problem</u> für Matrizen. Z.B.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Satz V n-dim $\mathbb{K}$-VR, W m-dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to W$ lin. Abb., $r := \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ für V und $\mathcal{C}$ für W sodass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis Wähle Basis $(w_1, \dots, w_r)$ für $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Basisergänzungssatz: W hat Basis

$$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m).$$

Wähle $v_i \in \varphi^{-1}(w_i)$ für $i = 1, \dots, r$. Mit Dimensionsformel:

$$\dim(\mathrm{kern}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = n - r.$$

Wähle Basis $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ für $\mathrm{kern}(\varphi)$. Dann:

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$$

Basis für V (4.1.10).

Damit:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = (x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)), \dots, x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n))) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Folgerung $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $r := \mathrm{Rang}(A)$. Dann gibt es $S \in GL(m; \mathbb{K})$, $T \in GL(n; \mathbb{K})$ mit

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad v \mapsto A \cdot v$$

und die Std-Basen $\mathcal{E}$ für $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{E}'$ für $\mathbb{K}^m$. Wähle $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ wie im Satz. Dann:

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m})}_{=: S} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(\varphi)}_{= A} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})^{-1}}_{=: T}$$

□