Definition V $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb.

(i) Nenne $\lambda \in \mathbb{k}$ *Eigenwert* von φ, falls es $v \in V$ gibt mit

$$v \neq 0_V, \qquad \varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{k}$ Eigenwert von φ. Nenne $v \in V$ *Eigenvektor* zu λ, falls

$$v \neq 0_V, \qquad \varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

Beispiele (i) Achsenspiegelung:

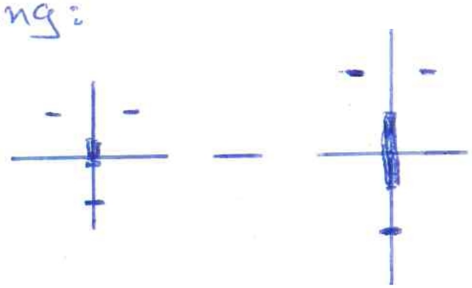
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$$

Eigenwerte, Eigenvektoren:

* $\lambda = 1$, $v = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$,
* $\lambda = -1$, $v = (0, a)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$.

(ii) Achsenstreckung:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$$

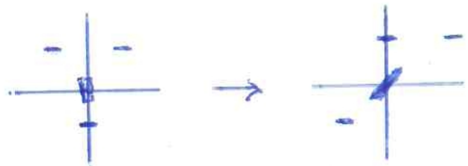


Eigenwerte, Eigenvektoren:

* $\lambda = 1$, $v = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$,
* $\lambda = 2$, $v = (0, a)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$.

(iii) Scherung:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$$



Eigenwerte, Eigenvektoren:

* $\lambda = 1$, $v = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$

Beispiel Betrachte den $\mathbb{R}$-VR

$$C^\infty(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ bel. oft diffbar}\}$$

mit den punktweisen Verknüpfungen. Haben lineare Abb.:

$$D: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \frac{df}{dx},$$

den "Differentialoperator". Die Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x$$

ist Eigenvektor zum Eigenwert 1:

$$D(\exp) = \exp.$$

Satz V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ pw. verschiedene EW von φ, $v_i \in V$ EV zu λ_i, $i = 1, \ldots, r$. Dann: $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabh.

Beweis Induktion über r.

„$r = 1$": Nach Def.: $v_1 \neq 0_V$. Somit (v_1) linear unabhängig.

„$r-1 \to r$": Ind.-Vor.: $(v_1, \ldots, v_{r-1})$ ist linear unabh. Nur noch z.z.:

$$v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{r-1}).$$

Angenommen, $v_r \in \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{r-1})$.

Dann:

$$(*) \quad v_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{K}.$$

Dabei: $v_r \neq 0_V \Rightarrow a_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ für ein i.

Wenden φ auf $(*)$ an:

$$(**) \quad \lambda_r \cdot v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i a_i \cdot v_i.$$

Betrachten $\lambda_r \cdot (*) - (**)$:

$$0_V = \sum_{i=1}^{r-1} ((\lambda_r - \lambda_i) a_i) \cdot v_i.$$

Wegen $(v_1, \ldots, v_{r-1})$ linear unabh.:

$$(\lambda_r - \lambda_1) a_1 = \ldots = (\lambda_r - \lambda_{r-1}) a_{r-1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Für i mit $a_i \neq 0_{\mathbb{K}}$: $\lambda_r = \lambda_i$. $\lightning$ zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ pw. verschieden. $\square$

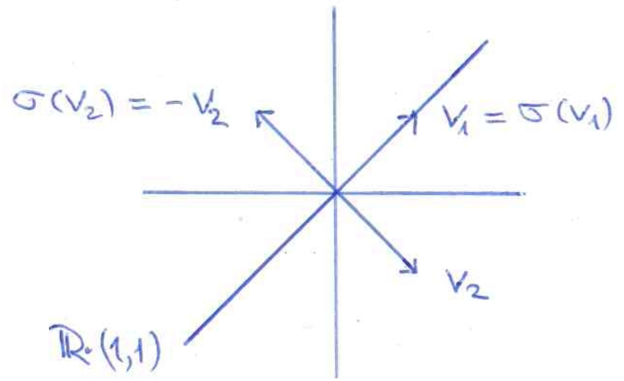
Folgerung V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Dann hat φ höchstens $\dim(V)$ pw. verschiedene Eigenwerte.

Beweis Wissen: $\dim(V)$ ist die max. Länge aller lin. unabh. Fam. in V. $\square$

Definition V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR. Eine lineare Abb. $\varphi: V \to V$ heisst *diagonalisierbar*, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

Beispiel Spiegelung an $\mathbb{R}\cdot(1,1) \leq \mathbb{R}^2$:

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1).$$



EW, EV: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (1,1)$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (1,-1)$.

Somit: σ diagonalisierbar.

Bemerkung V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb., $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis aus EV v_i zu EW λ_i. Dann:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere:

$$\varphi \text{ diagonalisierbar} \iff \begin{array}{l} V \text{ hat Basis } \mathcal{B} \text{ sodass} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ Diagonalmatrix.} \end{array}$$

Beispiel Spiegelung an $\mathbb{R}\cdot(1,1) \leq \mathbb{R}^2$:

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1).$$

Darstellende Matrix bez. Std.-Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Haben zudem Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit

* $v_1 = (1,1)$, EV zum EW 1,
* $v_2 = (1,-1)$, EV zum EW -1.

Damit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Zu $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ betrachte

$$\mu_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

Dann äquivalent (Z.3.12):

(i) μ_A diagonalisierbar,

(ii) $\mathbb{K}^n$ hat Basis $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A)$ Diagonalmatrix,

(iii) Es gibt $S \in GL(n; \mathbb{K})$ mit $S \cdot A \cdot S^{-1}$ Diagonalmatrix.

Definition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$.

(i) *Eigenwerte* bzw. *Eigenvektoren* von A: EW bzw. EV von μ_A.

(ii) A *diagonalisierbar*, falls μ_A diagonalisierbar.

Lemma V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abbildung. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ setze

$$V_\lambda := \{v \in V;\ \varphi(v) = \lambda \cdot v\} \subseteq V.$$

Dann gilt:

(i) V_λ ist UVR von V.

(ii) $V_\lambda \neq \{0_V\} \iff \lambda$ EW von φ.

(iii) $V_\lambda = \{0_V\} \cup \{v \in V;\ v \text{ EV zu } \lambda\}$.

Beweis Zu (i). UV1: klar mit $0_V \in V_\lambda$.

UV2: Seien $v, v' \in V_\lambda$. Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(v+v') &= \varphi(v) + \varphi(v') \\ &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot v' = \lambda \cdot (v+v'). \end{aligned}$$

Somit $v, v' \in V_\lambda$.

UV3: Seien $v \in V_\lambda$, $a \in \mathbb{K}$. Dann:

$$\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (a \cdot v).$$

Somit $a \cdot v \in V_\lambda$.

Weiter: (ii), (iii) klar. $\square$

Definition V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb.. Eigenraum zu $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$V_\lambda = \{v \in V;\ \varphi(v) = \lambda \cdot v\} \leq_{\mathbb{K}} V.$$

Beispiel V $\mathbb{K}$-VR mit $V \neq \{0_V\}$.

(i) $\varphi: V \to V$, $v \mapsto 0_V$ hat $0_{\mathbb{K}}$ als EW und

$$V_{0_{\mathbb{K}}} = V.$$

(ii) $\mathrm{id}_V: V \to V$, $v \mapsto v$ hat $1_{\mathbb{K}}$ als EW und

$$V_{1_{\mathbb{K}}} = V.$$

Bemerkung V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lin. Abb. Dann, für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$V_\lambda = \mathrm{kern}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi).$$

Satz Es seien V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lin. Abb. und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ pw. verschiedene EW von φ. Dann:

$$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Beweis Nach Def. der direkten Summe ist zu zeigen:

$$v_1 + \dots + v_r = 0_V \text{ mit } v_i \in V_{\lambda_i} \implies v_1 = \dots = v_r = 0_V.$$

Angenommen, es gibt i mit $v_i \neq 0_V$. Seien $i_1, \dots, i_k$ diese. Dann:

$$v_{i_1} + \dots + v_{i_k} = 0_V.$$

Wegen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ pw. verschieden: $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ linear unabh. $\lightning$

Satz V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die EW von φ, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann äquivalent:

(i) φ diagonalisierbar.

(ii) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$.

Beweis Zeigen "(i) $\Rightarrow$ (ii)":

φ diagonalisierbar $\implies$ V hat Basis aus EV zu gewissen λ_i

$$\implies V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$$

$$\xrightarrow{\text{voriger Satz}} V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$$

Zeigen "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Wähle Basis $B_i = (v_1^i, \dots, v_{n_i}^i)$ für V_{λ_i}, wobei $i = 1, \dots, r$. Dann:

$B := (B_1, \dots, B_r) = (v_1^1, \dots, v_{n_1}^1, \dots, v_1^r, \dots, v_{n_r}^r)$

Basis aus EV für V (7.1.14). $\square$