Definition $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$. *Charakteristisches Polynom* von A:

$$P_A := \det(T \cdot E_n - A) \in \mathbb{k}[T].$$

Bemerkung Haben für $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$:

$$B := T \cdot E_n - A \in Mat(n,n;\mathbb{k}(T)),$$

$$b_{ij} \in \mathbb{k}[T] \in \mathbb{k}(T) \text{ für alle } i,j.$$

Damit:

$$P_A = \det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \in \mathbb{k}[T].$$

Beispiel Für $A \in Mat(2,2;\mathbb{k})$:

$$P_A = \det\begin{pmatrix} T - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & T - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (T - a_{11})(T - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

$$= T^2 - (a_{11} + a_{22})T + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Definition *Spur* von $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$:

$$Spur(A) := a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

Satz Sei $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$. Dann:

$$P_A = T^n - Spur(A)\,T^{n-1} + \alpha_{n-2}T^{n-2} + \dots + \alpha_1 T + (-1)^n \det(A)$$

mit $\alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1 \in \mathbb{k}$. Insbesondere ist P_A normiert und vom Grad n.

Beweis Mit $B := T \cdot E_n - A$ gilt

$$P_A = \det(B)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sg(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= b_{11} \cdots b_{nn} + \sum_{\sigma \neq id} sg(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= (T - a_{11}) \cdots (T - a_{nn}) + c_{n-2}T^{n-2} + \dots + c_1 T + c_0.$$

Dabei für $\sigma \neq id$: $\deg(b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}) \leq n-2$.

Nach Ausmult. von $(T - a_{11}) \cdots (T - a_{nn})$:

$$P_A = T^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})T^{n-1} + \alpha_{n-2}T^{n-2} + \dots + \alpha_1 T + \alpha_0.$$

Weiter:

$$\alpha_0 = P_A(0_{\mathbb{k}}) = \det(-A) = (-1)^n \det(A). \quad \square$$

__Satz__ Seien $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$, $S \in GL(n,\mathbb{k})$.
Dann gilt
$$P_{S\cdot A\cdot S^{-1}} = P_A .$$

__Beweis__ In $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k}(T))$ gilt
$$S\cdot(T\cdot E_n - A)\cdot S^{-1} = S\cdot T\cdot E_n\cdot S^{-1} - S\cdot A\cdot S^{-1}$$
$$= T\cdot E_n - S\cdot A\cdot S^{-1}.$$

Damit:
$$\begin{aligned} P_{S\cdot A\cdot S^{-1}} &= \det(T\cdot E_n - S\cdot A\cdot S^{-1}) \\ &= \det(S\cdot(T\cdot E_n - A)\cdot S^{-1}) \\ &\overset{\text{Det Mult Satz}}{=} \det(T\cdot E_n - A) \\ &= P_A . \end{aligned}$$
□

__Folgerung__ V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\varphi: V \to V$ linear. Dann:
$$P_{\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)} = P_{\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)} .$$

__Beweis__ Wissen: $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = S\cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\cdot S^{-1}$ mit $S \in GL(n;\mathbb{k})$, $n = \dim(V)$. □

__Definition__ V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear. Charakteristisches Polynom von φ:
$$P_\varphi := P_{\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)}, \quad \text{wobei } \mathcal{B} \text{ Basis von } V.$$

__Satz__ V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear.
Dann: $\deg(P_\varphi) = \dim(V)$.
Weiter sind für jedes $\lambda \in \mathbb{k}$ äquivalent:

(i) λ ist Eigenwert von φ.

(ii) $\mathrm{kern}(\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \varphi) \neq \{0_V\}$.

(iii) $\det(\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \varphi) = 0_{\mathbb{k}}$.

(iv) λ ist Nullstelle von P_φ.

__Beweis__ Mit 8.3.5: $\deg(P_\varphi) = \dim(V)$. Weiter:
$$(i) \iff V_\lambda \neq \{0_V\} \overset{8.1.15}{\iff} (ii)$$
$$\iff \underset{\text{kein Iso}}{\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \varphi} \overset{7.3.11}{\iff} (iii).$$

Zu "(iii) $\iff$ (iv)": Sei $\mathcal{B}$ Basis für V. Dann, für jedes $\lambda \in \mathbb{k}$:
$$\begin{aligned} P_\varphi(\lambda) &= \det(\lambda\cdot E_n - \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)) \\ &= \det(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\lambda\cdot \mathrm{id}_V) - \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)) \\ &\overset{4.3.12}{=} \det(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \varphi)) = \det(\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \varphi). \end{aligned}$$
□

Definition $\mathbb{k}$ Körper, $f \in \mathbb{k}[T]$, $f \neq 0_{\mathbb{k}[T]}$.

(i) Ordnung einer NST λ von f, in Zeichen $\operatorname{ord}_\lambda(f)$: maximales $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit

$$f = (T-\lambda)^\nu \cdot g, \quad \text{wobei } g \in \mathbb{k}[T].$$

(ii) f zerfällt in Linearfaktoren, falls

$$f = a \cdot (T-\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (T-\lambda_r)^{\nu_r}$$

mit $a \in \mathbb{k}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{k}$ und $\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Lemma $\mathbb{k}$ Körper, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{k}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Betrachte

$$f := (T-\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (T-\lambda_r)^{\nu_r}$$

Dann: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ genau die NST von f, $\deg(f) = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ und $\operatorname{ord}_{\lambda_i}(f) = \nu_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Beweis Klar: λ_i genau die NST von f, $\deg(f) = \nu_1 + \ldots + \nu_r$, $\operatorname{ord}_{\lambda_i}(f) \geq \nu_i$.

Angenommen, $\operatorname{ord}_{\lambda_i}(f) > \nu_i$. Dann:

$$f = (T-\lambda_i)^{\nu_i} \underbrace{(T-\lambda_i) \cdot \tilde{f}}_{=: g}$$

Dabei: $0_{\mathbb{k}} = g(\lambda_i) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^{\nu_j} \neq 0_{\mathbb{k}}$ ↯ $\square$

Definition V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb., $\lambda \in \mathbb{k}$ EW von φ.

(i) Algebraische Vielfachheit von λ: $\operatorname{ord}_\lambda(P_\varphi)$.

(ii) Geometrische Vielfachheit von λ: $\dim(V_\lambda)$.

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. $\lambda \in \mathbb{k}$ EW von φ. Dann:

$$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq \operatorname{ord}_\lambda(P_\varphi).$$

Beweis Wegen λ EW gibt es EV $0_V \neq v$ zu λ. Somit $1 \leq \dim(V_\lambda)$.

Zweites "$\leq$": Wähle Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ für V_λ.

Basisergänzung: Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_r)$ für V. Damit

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_k & A \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Also:

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \det(T \cdot E_n - \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)) \\ &\overset{6.3.4}{=} \det((T-\lambda) \cdot E_k) \cdot \det(T \cdot E_{r-k} - B) \\ &= (T-\lambda)^k \cdot Q \end{aligned}$$

mit $Q \in \mathbb{k}[T]$. Somit $\dim(V_\lambda) \leq \operatorname{ord}_\lambda(P_\varphi)$. $\square$

Bemerkung V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ diagonalisierbare lin. Abb. mit den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann:

(i) $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$.

(ii) B_i Basis für V_{λ_i}, $B = (B_1, \dots, B_r)$.
Dann

$$\mathcal{M}_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

(iii) $P_\varphi = (T-\lambda_1)^{\dim(V_{\lambda_1})} \cdots (T-\lambda_r)^{\dim(V_{\lambda_r})}$.

(iv) $\dim(V_{\lambda_i}) = \mathrm{ord}_{\lambda_i}(P_\varphi)$.

Satz V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear.
Dann äquivalent:

(i) φ ist diagonalisierbar.

(ii) P_φ zerfällt in Linearfaktoren und für jeden EW λ von φ gilt

$$\dim(V_\lambda) = \mathrm{ord}_\lambda(P_\varphi).$$

Beweis "(i) $\Rightarrow$ (ii)" ist klar nach voriger Bemerkung.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die EW von φ, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann:

$$V' := V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r} \overset{8.1.16}{=} V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Weiter: P_φ hat genau die NST $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und zerfällt in Linearfaktoren. Somit:

$$P_\varphi \overset{8.3.11}{=} (T-\lambda_1)^{\mathrm{ord}_{\lambda_1}(P_\varphi)} \cdots (T-\lambda_r)^{\mathrm{ord}_{\lambda_r}(P_\varphi)}.$$

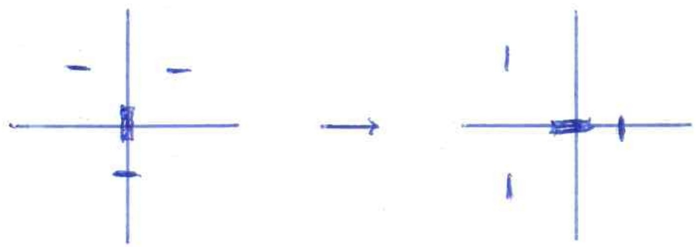
Also

$$\begin{aligned} \dim(V') &\overset{7.1.14}{=} \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_r}) \\ &\overset{(ii)}{=} \mathrm{ord}_{\lambda_1}(P_\varphi) + \dots + \mathrm{ord}_{\lambda_r}(P_\varphi) \\ &= \deg(P_\varphi) \\ &\overset{8.3.9}{=} \dim(V). \end{aligned}$$

Folglich $V' = V$ und φ diagonalisierbar. $\square$

Beispiel Betrachte Drehung um 90°:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1).$$



Dann, mit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$:

$$A := \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

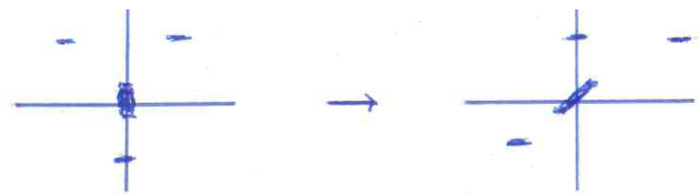
$$P_\varphi = \det(T \cdot E_2 - A) = \det\begin{pmatrix} T & 1 \\ -1 & T \end{pmatrix}$$

$$= T^2 + 1.$$

Somit $P_\varphi \in \mathbb{R}[T]$ keine NST, d.h., φ ist nicht diagonalisierbar.

Beispiel Betrachte die Scherung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2).$$



Dann, mit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$:

$$A := \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_\varphi = \det(T \cdot E_2 - A) = \det\begin{pmatrix} T-1 & -1 \\ 0 & T-1 \end{pmatrix}$$

$$= (T-1)^2.$$

Also: 1 ist einziger EW, $\mathrm{ord}_1(P_\varphi) = 2$. Haben

$$\begin{aligned} \dim(V_1) &= \dim(\mathrm{Kern}(\mathrm{id} - \varphi)) \\ &= 2 - \dim(\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - \varphi)) \\ &= 2 - \mathrm{Rang}(\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id} - \varphi)) \\ &= 2 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Somit $\dim(V_1) < \mathrm{ord}_1(P_\varphi)$. D.h., φ ist nicht diagonalisierbar.