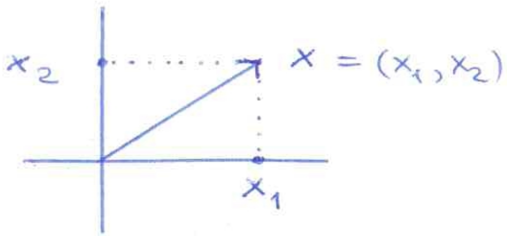
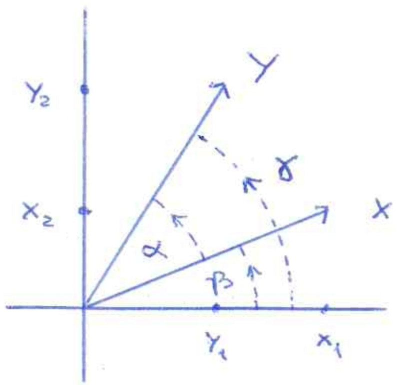
Bemerkung Betrachte $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:



Satz von Pythagoras:

$$\text{Länge}(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} =: \|x\|.$$

Bemerkung Betr. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1, x_2 > 0$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_1, y_2 > 0$.



Winkel:

$$\alpha = \measuredangle(x, y)$$

$$\beta = \measuredangle(e_1, x)$$

$$\gamma = \measuredangle(e_1, y)$$

Dann:

$$\cos(\beta) = \frac{x_1}{\|x\|}, \qquad \sin(\beta) = \frac{x_2}{\|x\|},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{y_1}{\|y\|}, \qquad \sin(\gamma) = \frac{y_2}{\|y\|}.$$

Mit Additionstheorem für Cosinus:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\gamma - \beta) \\
&= \cos(\gamma)\cos(-\beta) - \sin(\gamma)\sin(-\beta) \\
&= \cos(\gamma)\cos(\beta) + \sin(\gamma)\sin(\beta) \\
&= \frac{x_1}{\|x\|} \cdot \frac{y_1}{\|y\|} + \frac{x_2}{\|x\|} \cdot \frac{y_2}{\|y\|} \\
&= \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{\|x\| \cdot \|y\|}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|x\| \cdot \|y\|}\right).$$

Bemerkung Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definiere

Standardskalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Dann, für x, y wie vorhin:

$$\text{Länge}(x) = \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

$$\measuredangle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right).$$

Definition V $\mathbb{R}$-VR. Skalarprodukt auf V: Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\quad (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$$

mit

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear, d.h., stets

$$\langle a\cdot v + a'\cdot v', w\rangle = a\langle v,w\rangle + a'\langle v',w\rangle,$$

$$\langle v, b\cdot w + b'\cdot w'\rangle = b\langle v,w\rangle + b'\langle v,w'\rangle.$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ symmetrisch, d.h., stets

$$\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle.$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit, d.h., stets

$$\langle v,v\rangle \geq 0,\quad \langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V.$$

Euklidischer Vektorraum: $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt.

Beispiel Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,y) \mapsto x\cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Damit: $\mathbb{R}^n$ euklidischer Vektorraum.

Beispiel Betrachte VR der stetigen Funktionen auf $[0,1]$:

$$\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$$

mit den punktweisen Verknüpfungen.

Skalarprodukt:

$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx.$$

Bemerkung V euklid. VR mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, $U \leq_{\mathbb{R}} V$ Untervektorraum.

Dann: U euklid. VR mit Skalarprodukt

$$U \times U \longrightarrow \mathbb{R},\quad (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle.$$

Definition V euklid. VR mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zugehörige Norm:

$$V \to \mathbb{R},\quad v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Beispiel Norm zum Standardskalarprodukt:

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung V $\mathbb{R}$-VR

mit Skalarprod. $\langle\,,\,\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\ \|$. Dann, für alle $v, w \in V$:

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2.$$

Weiter: Gleichheit $\Leftrightarrow$ (v,w) Linear abh.

Beweis Fall 1: $\|v\| = 0$. Dann: $v = 0_V$, da $\langle\,,\,\rangle$ pos. def. Weiter

$$\langle 0_V, w\rangle = \langle 0\cdot 0_V, w\rangle$$

$$= 0\cdot\langle 0_V, w\rangle = 0 = \|v\|\cdot\|w\|.$$

Fall 2 $\|v\| \neq 0$. Vorüberlegung

$$\langle a\cdot v+b\cdot w, a\cdot v+b\cdot w\rangle = a\langle v, a\cdot v+b\cdot w\rangle + b\langle w, a\cdot v+b\cdot w\rangle$$

$$= a^2\langle v,v\rangle + ab\langle v,w\rangle + ba\langle w,v\rangle + b^2\langle w,w\rangle$$

$$= a^2\langle v,v\rangle + 2ab\langle v,w\rangle + b^2\langle w,w\rangle.$$

Insbes. für $a := -\langle v,w\rangle$ und $b := \langle v,v\rangle$:

$$\langle a\cdot v+b\cdot w, a\cdot v+b\cdot w\rangle = \langle v,w\rangle^2\langle v,v\rangle$$

$$-2\langle v,w\rangle^2\langle v,v\rangle$$

$$+\langle v,v\rangle^2\langle w,w\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle\left(-\langle v,w\rangle^2 + \|v\|^2\cdot\|w\|^2\right).$$

Wegen $\langle\,,\,\rangle$ pos. def. und $\langle v,v\rangle = \|v\|^2 \neq 0$:

$$0 \leq -\langle v,w\rangle^2 + \|v\|^2\cdot\|w\|^2.$$

Zu "=" $\Longleftrightarrow$ (v,w) Linear abh.

"$\Longleftarrow$": Wegen $\|v\| \neq 0$ gilt $v \neq 0_V$ (pos. def). Somit: $w = c\cdot v$ mit $c \in \mathbb{R}$. Also

$$\langle v,w\rangle^2 = \langle v, c\cdot v\rangle^2 = c^2\langle v,v\rangle\langle v,v\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle\langle c\cdot v, c\cdot v\rangle = \|v\|^2\cdot\|w\|^2.$$

"$\Longrightarrow$": Zu zeigen: (v,w) Linear abhängig. Betrachte

$$a := -\langle v,w\rangle, \qquad b := \langle v,v\rangle \neq 0.$$

Gemäß Vorüberlegung:

$$\langle a\cdot v+b\cdot w, a\cdot v+b\cdot w\rangle = \langle v,v\rangle\underbrace{\left(-\langle v,w\rangle^2 + \|v\|^2\cdot\|w\|^2\right)}_{=0 \text{ nach Voraussetzung}}$$

$$= 0$$

Wegen $\langle\,,\,\rangle$ positiv definit:

$$a\cdot v + b\cdot w = 0_V.$$

Dabei $b = \langle v,v\rangle \neq 0$. Somit (v,w) lin. abh. $\square$

Folgerung V $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprod. $\langle\ ,\ \rangle$ und zugeh. Norm $\|\ \|$. Dann:

(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und stets $$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V.$$

(ii) $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$ und $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Für alle $v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung:
$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Beweis (i), (ii) klar mit $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Zu (iii). Haben
$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\overset{\text{C-S-Ungl.}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \qquad \square\end{aligned}$$

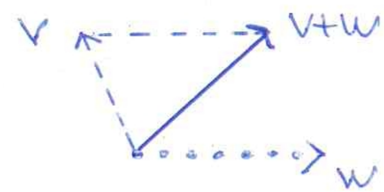
Definition V $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und zugehöriger Norm $\|\ \|$.

(i) Länge von $v \in V$: $\|v\|$.

(ii) Für $v, w \in V$ mit $v \neq 0_V \neq w$: Winkel zwischen v, w:
$$\sphericalangle(v,w) := \arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right).$$

Bemerkung V $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und zugeh. Norm $\|\ \|$, $v, w \in V$.

Dreiecksungl.: — ist höchstens so lang wie - - - -



Für $v \neq 0_V \neq w$: C-S-Ungleichung
$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1.$$

Somit $\sphericalangle(v,w)$ wohldefiniert.

Definition V euklid. VR mit Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$.

(i) $v, w \in V$ orthogonal zueinander ($v \perp w$), falls $\langle v, w\rangle = 0$.

(ii) Orthogonales Komplement zu $U \subseteq V$:

$$U^\perp := \{v \in V;\ v \perp u \text{ f. alle } u \in U\} \subseteq V.$$

Satz V euklid. VR, $U \subseteq V$. Dann: $U^\perp \leq_{\mathbb{R}} V$.

Beweis (UV1) klar mit $0_V \in U^\perp$.

Zu (UV2): Seien $v, v' \in U^\perp$. Dann, für alle $u \in U$:

$$\langle v+v', u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v', u\rangle = 0$$

Somit: $v + v' \in U^\perp$.

Zu (UV3): Seien $v \in U^\perp$, $a \in \mathbb{R}$. Dann, für alle $u \in U$:

$$\langle a \cdot v, u\rangle = a\langle v, u\rangle = 0$$

Somit $a \cdot v \in U^\perp$. $\square$

Beispiel Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq (0,0) \neq w$:

$$v \perp w \iff v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$
$$\iff (w_1, w_2) = c \cdot (v_2, -v_1) \text{ mit } c \in \mathbb{R}^*.$$

Beispielsweise

$$(\mathbb{R} \cdot (1,2))^\perp = \mathbb{R}(2,-1)$$