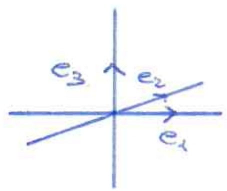
__Definition__ V euklid. VR mit Skalarprod. $\langle\,,\,\rangle$. Orthonormalbasis für V: Basis $(v_1,\dots,v_n)$ für V mit

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

__Beispiel__ Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Dann ist $(e_1,\dots,e_n)$ eine ONB für $\mathbb{R}^n$.



__Satz__ V euklid. VR mit Skalarprod. $\langle\,,\,\rangle$. $B=(v_1,\dots,v_n)$ ONB für V. Dann:

(i) Entwicklung von $v\in V$ bez. B:

$$v = \langle v, v_1\rangle\cdot v_1 + \dots + \langle v, v_n\rangle \cdot v_n.$$

(ii) Für $v=\sum a_i\cdot v_i$ und $w=\sum b_i\cdot v_i$:

$$\langle v, w\rangle = x_B(v)\cdot x_B(w) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

__Beweis__ Zu (i). Sei $v=\sum a_i v_i$. Zu zeigen:

$$a_i = \langle v, v_i\rangle$$

Haben:

$$\begin{aligned} \langle v, v_i\rangle &= \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i\rangle \\ &= a_1\langle v_1, v_i\rangle + \dots + a_n\langle v_n, v_i\rangle \\ &= a_i\langle v_i, v_i\rangle \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Zu (ii). Bilineares Rechnen:

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \Big\langle \sum_i a_i\cdot v_i, \sum_j b_j\cdot v_j\Big\rangle \\ &= \sum_i a_i \Big\langle v_i, \sum_j b_j\cdot v_j\Big\rangle \\ &= \sum_i a_i \sum_j b_j \langle v_i, v_j\rangle \\ &= \sum_i\sum_j a_i b_j\langle v_i, v_j\rangle \\ &= \sum_i a_i b_i \langle v_i, v_i\rangle \\ &= \sum_i a_i b_i. \end{aligned}$$

$\square$

__Gram-Schmidt-Verfahren__ V euklidischer VR mit Skalarprod. $\langle\,,\,\rangle$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabh.

Betrachte

$$\tilde{u}_1 := v_1, \qquad u_1 := \frac{1}{\|\tilde{u}_1\|} \cdot \tilde{u}_1,$$

$$\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1, \qquad u_2 := \frac{1}{\|\tilde{u}_2\|} \cdot \tilde{u}_2,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\tilde{u}_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \cdot u_i, \qquad u_n := \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|} \cdot \tilde{u}_n .$$

Dann: $(u_1, \ldots, u_n)$ ONB für $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. Insbes.: $(u_1, \ldots, u_n)$ ONB für V, falls $\mathcal{B}$ Basis für V.

__Lemma__ V euklid. VR, $u_1, \ldots, u_k \in V$ mit $u_i \neq 0_V$ für $i = 1, \ldots, k$ und $u_i \perp u_j$ für $i \neq j$. Dann: $(u_1, \ldots, u_k)$ linear unabh..

__Beweis__ Sei $a_1 u_1 + \ldots + a_k \cdot u_k = 0_V$. Z.z. $a_1 = \ldots = a_k = 0$.
Haben:

$$0 = \langle a_1 \cdot u_1 + \ldots + a_k \cdot u_k, u_i \rangle = a_i \langle u_i, u_i \rangle .$$

Wegen $u_i \neq 0_V$: $\langle u_i, u_i \rangle \neq 0$. Somit $a_i = 0$. □

__Beweis G-S-V__ Induktion über n. Zu "$n=1$":
Haben

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1, \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 \rangle = \frac{1}{\|v_1\|^2} \cdot \langle v_1, v_1 \rangle = 1.$$

Also: $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$ liefert ONB (u_1) für $\mathrm{Lin}(v_1)$.

Zu "$n-1 \to n$": Nach Induktionsvoraussetzung ist $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ ONB für $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Somit:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n-1$$

Zeigen $\tilde{u}_n \neq 0_V$. Andernfalls:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \cdot u_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{n-1}) \ \lightning$$

Zeigen $\langle u_n, u_j \rangle = \delta_{jn}$. Haben für $j < n$:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{u}_n, u_j \rangle &= \langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \cdot u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v_n, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v_n, u_j \rangle - \langle v_n, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit für $j < n$:

$$\langle u_n, u_j \rangle = \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|} \cdot \langle \tilde{u}_n, u_j \rangle = 0$$

Für $j = n$:

$$\langle u_n, u_n \rangle = \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|^2} \cdot \langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n \rangle = 1.$$

Lemma: $(u_1, \ldots, u_n)$ lin. unabh. in $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. Wegen $\dim(\mathrm{Lin}(\mathcal{B})) = n$: $(u_1, \ldots, u_n)$ ONB für $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. □

Satz V endl. dim. euklidischer VR mit Skalarprod. $\langle\, , \rangle$ und $U \leq_{\mathbb{R}} V$. Dann gibt es ONB $(u_1, \ldots, u_n)$ für V mit

$$U = \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_k),$$

$$U^\perp = \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

Weiter:

$$V = U \oplus U^\perp$$

und die Projektionen $P_U : V \to U$ sowie $P_{U^\perp} : V \to U^\perp$ sind gegeben durch

$$P_U(v) = \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \ldots + \langle v, u_k \rangle \cdot u_k,$$

$$P_{U^\perp}(v) = \langle v, u_{k+1} \rangle \cdot u_{k+1} + \ldots + \langle v, u_n \rangle \cdot u_n.$$

Beweis Wähle Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ für U.
Ergänze zu Basis $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ für V.

Anwenden von Gram-Schmidt auf $(v_1, \ldots, v_n)$ liefert eine ONB $(u_1, \ldots, u_n)$ für V sodass

$$U = \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_k).$$

Weiter $U \cap U^\perp = \{0_V\}$, denn

$$u \in U \cap U^\perp \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$$

$$\Rightarrow u = 0_V.$$

klar: $u_{k+1}, \ldots, u_n \in U^\perp$. Somit

$$\mathrm{Lin}(u_{k+1}, \ldots, u_n) \subseteq U^\perp.$$

Folglich $V = U + U^\perp$. Satz 7.1.10:

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Also

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n - k$$

und

$$U^\perp = \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

Beschreibung von P_U und $P_{U^\perp}$ klar mit

$$v = \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \ldots + \langle v, u_n \rangle \cdot u_n. \qquad \square$$

Bemerkung V endl. dim. euklidischer VR, $U \leq_{\mathbb{R}} V$. Nenne

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

zugehörige orthogonale Zerlegung und

$$P_U : V \to U, \quad P_{U^{\perp}} : V \to U^{\perp}$$

Orthogonalprojektionen. Haben dabei

$$P_U + P_{U^{\perp}} = \mathrm{id}_V .$$

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis für V. Setze

$$U_k := \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Dann: k-ter Schritt im Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\tilde{u}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle \cdot u_i$$

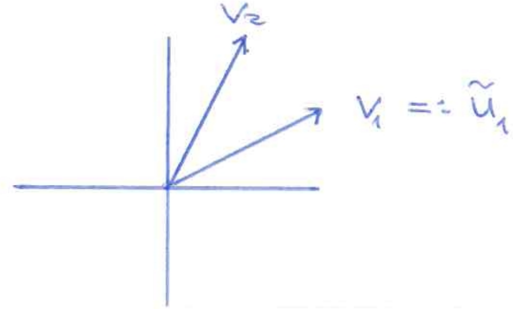
$$= v_k - P_{U_k}(v_k)$$

$$= P_{U_k^{\perp}}(v_k).$$

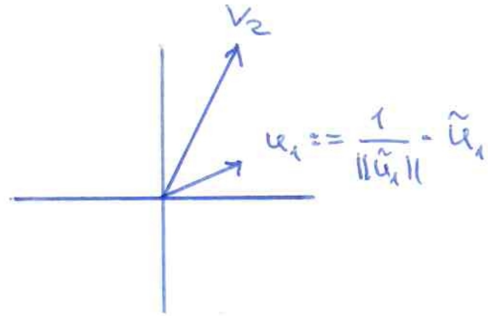
Beispielsweise in $\mathbb{R}^2$:

$k = 1$:

Start

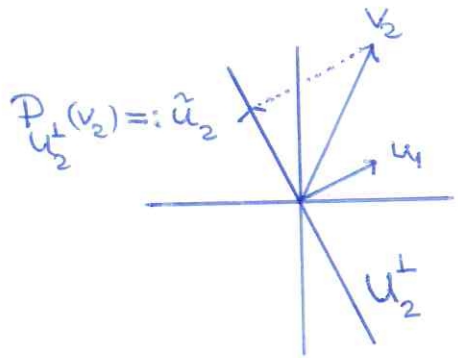


Normierung

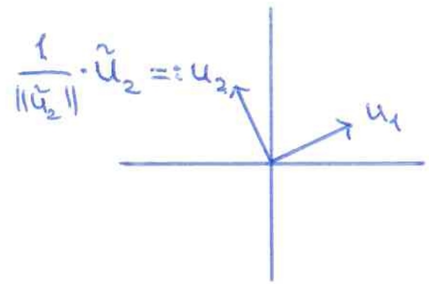


$k = 2$:

Orthogonal-projektion



Normierung



Definition V, W euklidische VR mit Skalarprod. $\langle\,,\,\rangle_V$ bzw $\langle\,,\,\rangle_W$. Eine lineare Abb. $\varphi: V \to W$ heisst *Isometrie*, falls stets

$$\langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V .$$

Bemerkung Jede Isometrie $\varphi: V \to W$ ist injektiv, denn

$$\varphi(v) = 0_W \implies 0 = \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle_W = \langle v, v \rangle_V$$
$$\implies v = 0_V .$$

Insbesondere, für endl. dim. V: Jede Isometrie $V \to V$ ist Isomorphismus.

Definition $A \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ heisst *orthogonal*, falls A invertierbar und $A^{-1} = A^t$.

Satz Betr. $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-SP. Dann sind für jedes $A \in Mat(n,n;\mathbb{R})$ äquivalent:

(i) A ist orthogonal.

(ii) Spalten von A sind ONB von $\mathbb{R}^n$.

(iii) Zeilen von A sind ONB von $\mathbb{R}^n$.

Beweis Haben

$$A \text{ orthogonal} \iff A^t \cdot A = E_n \quad \text{(i)}$$
$$\iff A_{*i} \cdot A_{*j} = \delta_{ij} \quad \text{(ii)},$$
$$A \text{ orthogonal} \iff A \cdot A^t = E_n \quad \text{(i)}$$
$$\iff A_{i*} \cdot A_{j*} = \delta_{ij} \quad \text{(iii)}. \quad \square$$

Beispiel Für jedes $0 \le \alpha \le 2\pi$ hat man orthogonale Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

__Satz__ V euklid. VR mit ONB $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$, $\varphi: V \to V$ lin. Abb.. Dann äquivalent:

(i) φ ist Isometrie.

(ii) $(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))$ ist ONB für V.

(iii) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist orthogonal.

__Beweis__ "(i) $\Rightarrow$ (ii)" klar nach Def. von Isometrie.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Seien

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i\,, \quad v' = \sum_{j=1}^{n} a_j' \cdot v_j \quad \in V$$

gegeben. Dann:

$$\langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle = \langle \varphi(\textstyle\sum_i a_i \cdot v_i), \varphi(\sum_j a_j' \cdot v_j) \rangle$$

$$= \langle \textstyle\sum_i a_i \cdot \varphi(v_i), \sum_j a_j' \varphi(v_j) \rangle$$

$$= \sum_i \sum_j a_i a_j' \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle$$

$$\overset{(ii)}{=} a_1 a_1' + \dots + a_n a_n'$$

$$\overset{9.2.3}{=} \langle v, v' \rangle .$$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (iii)". Zeigen: Spalten von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ bilden ONB für $\mathbb{R}^n$:

$$x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j)) \overset{9.2.3}{=} \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle$$

$$\overset{(ii)}{=} \delta_{ij} .$$

Zu "(iii) $\Rightarrow$ (ii)". Verwenden: Spalten von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ bilden ONB für $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle \overset{9.2.3}{=} x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j))$$

$$\overset{(iii)}{=} \delta_{ij} .$$

$\square$