__Erinnerung__ Körper der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit

$$(x,y)+(x',y') := (x+x', y+y'),$$
$$(x,y)\cdot(x',y') := (xx'-yy', xy'+yx').$$

Haben injektiven Körperhom.:

$$\jmath : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x,0).$$

Elegante Schreibweisen in $\mathbb{C}$:

* x für $\jmath(x)$,
* I für $(0,1)$.

Damit $I^2 = -1$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eind. Darstellung

$$z = x + Iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nenne dabei

$Re(z) := x$ Realteil von z,

$Im(z) := y$ Imaginärteil von z.

Rechnen in $\mathbb{C}$:

$$(x+Iy)+(x'+Iy') = x+x'+I(y+y'),$$
$$(x+Iy)\cdot(x'+Iy') \overset{\text{Aus Mult.}}{=} xx'-yy'+I(xy'+yx').$$

Komplexe Konjugation:

$$\varkappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x+Iy \mapsto \bar{z} := x - Iy.$$

Leistet:

* $\bar{\bar{z}} = z$,
* z reell $\Leftrightarrow z = \bar{z}$,
* $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$,
* $z+\bar{z} = 2Re(z)$, $z-\bar{z} = 2Im(z)\cdot I$

Insbes.: $\varkappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist Körperhom.

Abolutbetrag von $z = x+Iy \in \mathbb{C}$:

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{z\bar{z}}.$$

Definition V $\mathbb{C}$-VR. *Hermitesches Skalarprodukt* auf V: Abb.

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$$

mit

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ ist linear in der ersten Komp.:

$$\langle a\cdot v + b\cdot v', w\rangle = a\langle v,w\rangle + b\langle v',w\rangle,$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *antilinear* in der zweiten Komp.:

$$\langle v, a\cdot w + b\cdot w'\rangle = \bar{a}\langle v,w\rangle + \bar{b}\langle v,w'\rangle,$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *hermitesch*, d.h. stets

$$\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle},$$

(iv) $\langle\ ,\ \rangle$ ist positiv definit, d.h. stets

$$\langle v,v\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V.$$

Unitärer Vektorraum: $\mathbb{C}$-VR mit hermiteschem Skalarprodukt.

Beispiel *Hermitesches Standard-SP* auf $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto z\cdot\overline{w} = z_1\overline{w}_1 + \dots + z_n\overline{w}_n$$

wobei $\overline{w} := (\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_n)$ für $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Haben:

(i) $(az + b\cdot z')\cdot\overline{w} = a\, z\cdot\overline{w} + b\, z\cdot\overline{w},$

(ii)
$$\begin{aligned} z\cdot\overline{(a\cdot w + b\cdot w')} &= \sum z_i\,\overline{(aw_i + bw_i')} \\ &= \sum z_i\,(\bar{a}\,\overline{w_i} + \bar{b}\,\overline{w_i'}) \\ &= \bar{a}\sum z_i\overline{w_i} + \bar{b}\sum z_i\overline{w_i'} \\ &= \bar{a}\, z\cdot\overline{w} + \bar{b}\, z\cdot\overline{w'}, \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} z\cdot\overline{w} &= \sum z_i\overline{w_i} = \sum \overline{w_i}\, z_i \\ &= \overline{\overline{\sum \overline{w_i}\, z_i}} = \overline{\sum w_i\,\overline{z_i}} = \overline{w\cdot\overline{z}}, \end{aligned}$$

(iv)
$$z\cdot\overline{z} = \sum z_i\overline{z_i} = \sum x_i^2 + y_i^2 \geq 0$$

und

$$z\cdot\overline{z} = 0 \Rightarrow x_i = y_i = 0 \text{ f. alle } i \Rightarrow z = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Definition V $\mathbb{C}$-VR mit hermiteschem SP $\langle\ ,\ \rangle$. Zugehörige Norm:

$$V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\ ,\ \rangle$ und zugeh. Norm $\|\ \|$. Dann, für alle $v, w \in V$:

$$\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2.$$

Weiter: Gleichheit $\iff$ (v,w) linear abh.

Beweis Gleicher Trick wie im reellen Fall: Haben immer

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle a\cdot v + b\cdot w, a\cdot v + b\cdot w\rangle \\
&= a\langle v, a\cdot v + b\cdot w\rangle + b\langle w, a\cdot v + b\cdot w\rangle \\
&= a\bar{a}\langle v,v\rangle + a\bar{b}\langle v,w\rangle + b\bar{a}\langle w,v\rangle + b\bar{b}\langle w,w\rangle \\
&= a\bar{a}\langle v,v\rangle + a\bar{b}\langle v,w\rangle + b\bar{a}\overline{\langle v,w\rangle} + b\bar{b}\langle w,w\rangle \\
&= a\bar{a}\langle v,v\rangle + a\bar{b}\langle v,w\rangle + \overline{a\bar{b}\langle v,w\rangle} + b\bar{b}\langle w,w\rangle \\
&= a\bar{a}\langle v,v\rangle + 2\operatorname{Re}\left(a\bar{b}\langle v,w\rangle\right) + b\bar{b}\langle w,w\rangle.
\end{aligned}$$

Insbes. für $a = -\overline{\langle v,w\rangle}$ und $b = \langle v,v\rangle$:

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle\langle v,v\rangle \\
& - 2\operatorname{Re}\left(\overline{\langle v,w\rangle}\,\overline{\langle v,v\rangle}\langle v,w\rangle\right) \\
& + \langle v,v\rangle\overline{\langle v,v\rangle}\langle w,w\rangle \\
=\ & -\langle v,v\rangle\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,v\rangle\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle.
\end{aligned}$$

Damit: CS-Ungl. für $v \neq 0_V$. $\square$

Folgerung V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\ ,\ \rangle$ und zugeh. Norm $\|\ \|$. Dann:

(i) Stets $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

(ii) Stets $\|c\cdot v\| = |c|\,\|v\|$.

(iii) Stets $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beweis Zu (iii): Haben

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle v,w\rangle) + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}} + \|w\|^2 \\
\text{CS-Ungl} \to\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Definition V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle$.

(i) $v, w \in V$ orthogonal zueinander, $(v \perp w)$, falls $\langle v, w\rangle = 0$.

(ii) Orthogonales Komplement von $U \subseteq V$:

$$U^\perp := \{v \in V;\ \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\} \leq_{\mathbb{C}} V.$$

Definition V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle$. Orthonormalbasis: Basis $(v_1, \dots, v_n)$ für V mit

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Beispiel Für $\mathbb{C}^n$ mit Standard-HSP ist $(e_1, \dots, e_n)$ eine ONB.

Satz V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ONB für V. Dann:

(i) Entwicklung von $v \in V$ nach B:

$$v = \langle v, v_1\rangle \cdot v_1 + \dots + \langle v, v_n\rangle \cdot v_n$$

(ii) Für $v = \sum a_i \cdot v_i$ und $w = \sum b_j \cdot v_j$:

$$\langle v, w\rangle = x_B(v) \cdot \overline{x_B(w)} = a_1\overline{b_1} + \dots + a_n\overline{b_n}.$$

Gram-Schmidt-Verfahren V $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ lin. unabh. Betr.:

$$\tilde{u}_1 := v_1, \qquad u_1 := \frac{1}{\|\tilde{u}_1\|} \cdot \tilde{u}_1$$

$$\tilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1\rangle \cdot u_1 \qquad u_2 := \frac{1}{\|\tilde{u}_2\|} \cdot \tilde{u}_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\tilde{u}_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i\rangle \cdot u_i \qquad u_n := \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|} \cdot \tilde{u}_n$$

Dann: $(u_1, \dots, u_n)$ ONB für $\mathrm{Lin}(B)$.

Satz V endl. dim. $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle$, $U \leq_{\mathbb{C}} V$. Dann ex. ONB $(u_1, \dots, u_n)$ für V mit

$$U = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_k), \qquad U^\perp = \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Weiter $V = U \oplus U^\perp$ und Proj. gegeben als

$$P_U : V \to U, \qquad v \mapsto \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \cdot u_i,$$

$$P_{U^\perp} : V \to U^\perp, \qquad v \mapsto \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, u_i\rangle \cdot u_i.$$

Definition V, W $\mathbb{C}$-VR mit HSP $\langle\,,\,\rangle_V$ bzw. $\langle\,,\,\rangle_W$. Eine lineare Abb. $\varphi: V \to W$ heisst *Isometrie*, falls stets

$$\langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle_W = \langle v, v' \rangle_V .$$

Definition $A \in Mat(n,n;\mathbb{C})$ heisst *unitär*, falls A invertierbar und

$$A^{-1} = \overline{A}^t, \text{ wobei } \overline{A} = (\overline{a_{ij}}) \text{ für } A = (a_{ij}).$$

Satz Betr. $\mathbb{C}^n$ mit Standard-HSP. Dann für jedes $A \in Mat(n,n;\mathbb{C})$ äquivalent:

(i) A unitär.

(ii) Spalten von A bilden ONB für $\mathbb{C}^n$.

(iii) Zeilen von A bilden ONB für $\mathbb{C}^n$.

Beweis Zeigen "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)". Haben

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &\Longleftrightarrow \overline{A}^t \cdot A = E_n \\
&\Longleftrightarrow \overline{A}_{*i} \cdot A_{*j} = \delta_{ij} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, a_{kj} = \delta_{ij} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, \overline{a_{kj}} = \delta_{ij} \\
&\Longleftrightarrow A_{*i} \cdot \overline{A}_{*j} = \delta_{ij} \\
&\Longleftrightarrow \text{(ii)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz V unitärer VR, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ONB für V, $\varphi: V \to V$ linear. Dann äquivalent:

(i) $\varphi: V \to V$ ist Isometrie.

(ii) $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ ist ONB für V.

(iii) $M_B^B(\varphi)$ ist unitär.