Definition V unitärer VR mit HSP $\langle\, ,\, \rangle$. Eine lineare Abb. $\varphi: V \to V$ heisst *selbstadjungiert*, falls stets

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle .$$

Definition $A = (a_{ij}) \in Mat(n,n;\mathbb{C})$ *hermitesch*, falls

$$A = \overline{A}^t, \quad \text{d.h. } a_{ij} = \overline{a}_{ji}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Satz V unitärer VR, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ONB für V, $\varphi: V \to V$ lin. Abb. Dann äquivalent:

(i) φ ist selbstadjungiert.

(ii) $\mathcal{M}_B^B(\varphi)$ ist hermitesch.

Bemerkung Fassen $x \in \mathbb{K}^n$ als $(n \times 1)$-Matrix auf:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Mat(n, 1; \mathbb{K})$$

Damit: Anwenden als Matrizenprodukt:

$$x^t \cdot y \in Mat(1,1;\mathbb{K}) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^n$$

Matrix-Vektor-Mult. als Matrizenprodukt:

$$A \cdot x \in Mat(n,1;\mathbb{K}), \quad A \in Mat(n,n;\mathbb{K}),\ x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis Satz Setze $A := \mathcal{M}_B^B(\varphi)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(v), w \rangle &\overset{9.3.10}{=} x_B(\varphi(v))^t \cdot \overline{x_B(w)} \\
&= (A \cdot x_B(v))^t \cdot \overline{x_B(w)} \\
&= x_B(v)^t \cdot A^t \cdot \overline{x_B(w)} \\
&= x_B(v)^t \cdot \overline{\overline{A}^t \cdot x_B(w)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi(w) \rangle &\overset{9.3.10}{=} x_B(v)^t \cdot \overline{x_B(\varphi(w))} \\
&= x_B(v)^t \cdot \overline{A \cdot x_B(w)} .
\end{aligned}$$

Damit: "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Betr.

$$v := v_j, \qquad w := v_i .$$

Dann:

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= (A \cdot e_j)^t \cdot e_i = (A \cdot x_B(v_j))^t \cdot \overline{x_B(v_i)} \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \langle \varphi(v_j), v_i \rangle \overset{(i)}{=} \langle v_j, \varphi(v_i) \rangle \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} x_B(v_j)^t \cdot \overline{A \cdot x_B(v_i)} = e_j^t \cdot (\overline{A} \cdot e_i) \\
&= \overline{a}_{ji} .
\end{aligned}$$

$\square$

Satz V endl. dim. unitärer VR, $\varphi: V \to V$ selbstadjungierter Endomorphismus. Dann:

(i) Jeder EW von φ ist reell.

(ii) V hat ONB aus EV von φ.

Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

Fundamentalsatz der Algebra Jedes nicht konstante $f \in \mathbb{C}[T]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis Satz Zu (i). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von φ. Wähle EV $v \in V$ zu λ. Dann:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \langle v, v \rangle &= \langle \lambda \cdot v, v \rangle \\ &= \langle \varphi(v), v \rangle \\ &= \langle v, \varphi(v) \rangle \\ &= \langle v, \lambda \cdot v \rangle \\ &= \overline{\lambda} \cdot \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Somit $\lambda = \overline{\lambda}$. Folglich ist λ reell.

Zu (ii). Induktion über $n := \dim(V)$.

"$n = 1$": ✓

"$n-1 \to n$": Nach FSA besitzt φ einen EW $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Wähle EV $v_1 \in V$ zu λ_1. Satz 9.3.12:

$$V = \mathbb{C} \cdot v_1 \oplus (\mathbb{C} \cdot v_1)^\perp.$$

Setze $V_1 := (\mathbb{C} \cdot v_1)^\perp$. Zeigen $\varphi(V_1) \subseteq V_1$.

Für $w \in V_1$:

$$\begin{aligned} \langle v_1, \varphi(w) \rangle &= \langle \varphi(v_1), w \rangle \\ &= \langle \lambda_1 \cdot v_1, w \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v_1, w \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also $\varphi(w) \in (\mathbb{C} \cdot v_1)^\perp = V_1$, d.h., $\varphi(V_1) \subseteq V_1$.

Ind.-Vor.: V_1 hat ONB $(v_2, \dots, v_n)$ aus EV von φ. Setze

$$v_1' := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1.$$

Dann: $(v_1', v_2, \dots, v_n)$ gewünschte ONB. $\square$

__Folgerung__ Sei $A \in Mat(n,n;\mathbb{C})$ hermitesch. Dann ex. unitäres $S \in Mat(n,n;\mathbb{C})$, sodass $\bar{S}^t \cdot A \cdot S$ reelle Diagonalmatrix.

__Beweis__ Betrachte $\mathbb{C}^n$ mit Standard-HSP und der ONB $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$.

9.4.3: Haben selbstadjungierten Endomorphismus

$$\mu_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

9.4.5: Es gibt ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV von μ_A.

Dabei: $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_A)$ reelle Diagonalmatrix.

9.3.17: $S = (v_1, \dots, v_n)$ ist unitäre Matrix.

Haben Transformationsmatrix

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n}) \overset{7.3.6}{=} (v_1, \dots, v_n)^{-1} \cdot (e_1, \dots, e_n) = S^{-1} = \bar{S}^t.$$

Mit Transformationsformel (7.3.7):

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mu_A) = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n}) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mu_A) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{C}^n})^{-1} = \bar{S}^t \cdot A \cdot S.$$

$\square$

Definition V eukl. VR mit SP $\langle\,,\,\rangle$. Eine lineare Abb. $\varphi: V \to V$ heisst *selbstadjungiert*, falls stets

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle .$$

Definition $A \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{R})$ *symmetrisch*, falls $A = A^t$, d.h., $a_{ij} = a_{ji}$ für $1 \le i,j \le n$.

Bemerkung Sei $A \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{R})$. Dann:

A symmetrisch $\Longrightarrow A \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{C})$ hermitesch

$\Longrightarrow$ Es gibt unitäres $S \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{C})$ mit $\bar{S}^t \cdot A \cdot S$ reelle Diagonalmatrix

$\Longrightarrow P_A = P_{\bar{S}^t \cdot A \cdot S}$ zerfällt in reelle Linearfaktoren

$\Longrightarrow$ A hat reellen Eigenwert.

Satz V eukl. VR mit ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\varphi: V \to V$ linear. Dann äquivalent:

(i) φ ist selbstadjungiert.

(ii) $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist symmetrisch.

Beweis Analog zu 9.4.3. $\square$

Satz V endl. dim. eukl. VR, $\varphi: V \to V$ selbstadj. Dann besitzt V ONB aus EV von φ.

Beweis Wie in 9.4.5: Induktion über $n := \dim(V)$. Wieder: "$n-1$" klar.

"$n-1 \to n$": Haben (reellen) EW λ_1 für φ. Wähle EV $v_1 \in V$ zu λ_1 mit $\|v_1\| = 1$. Dann:

$$V = \mathbb{R} \cdot v_1 \oplus (\mathbb{R} \cdot v_1)^\perp .$$

Setze $V_1 := (\mathbb{R} \cdot v_1)^\perp$. Dann:

* $\varphi(V_1) \subseteq V_1$,
* V_1 hat ONB $(v_2, \dots, v_n)$ aus EV von φ (Ind.-Vor.).

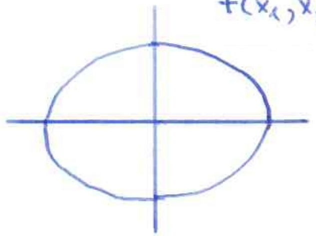
Somit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ gewünschte ONB. $\square$

Folgerung $A \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann ex $S \in \mathcal{M}at(n,n;\mathbb{R})$ orthogonal sodass $S^t \cdot A \cdot S$ Diagonalmatrix.

__Hauptachsentransformation__ Betrachte rein quadratisches Polynom in $x_1, \dots, x_n$:

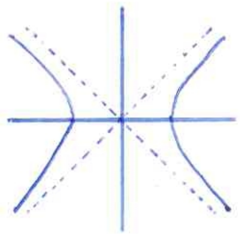
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} f_{ij} x_i x_j, \quad f_{ij} \in \mathbb{R}.$$

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$



Zugehörige Quadrik:

$Q := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$



$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

f definiert symmetr. $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} := \begin{cases} f_{ij}/2, & i < j, \\ f_{ii}, & i = j, \\ f_{ji}/2, & i > j. \end{cases}$$

Damit elegante Darstellung:

$$f(x) = x^t \cdot A \cdot x.$$

9.4.13: Es gibt orthogonales $S \in Mat(n, n; \mathbb{R})$ mit

$$S^t \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Dabei:

$$S^t \cdot A \cdot S \cdot e_i = \lambda_i e_i \Rightarrow A \cdot S \cdot e_i = \lambda_i \cdot S \cdot e_i$$

Somit: Spalten $v_1, \dots, v_n$ von S bilden ONB aus EV von A für $\mathbb{R}^n$.

Nenne v_i (bzw. $\mathbb{R} \cdot v_i$), $i = 1, \dots, n$ die Hauptachsen von Q.

Betrachte jetzt die Isometrie

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto S^{-1} \cdot v.$$

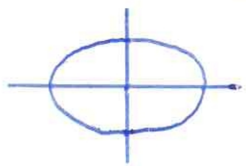
Leistet:

(1) φ(Hauptachsen) = Standardeinheitsvektoren

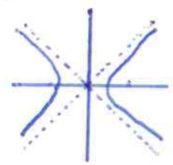
(2) Mit den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A:

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= S^{-1} \cdot Q \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n;\ f(S \cdot y) = 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n;\ (S \cdot y)^t \cdot A \cdot (S \cdot y) = 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n;\ y^t \cdot S^t \cdot A \cdot S \cdot y = 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n;\ \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = 1\}. \end{aligned}$$

z.B. Quadriken $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $Rang(Q) := Rang(A) = 2$:



Ellipsen: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$



Hyperbeln: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$