Definition R k1-Ring. **Ideal**: $\emptyset \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ mit

(i) $a, a' \in \mathfrak{a} \Rightarrow a + a' \in \mathfrak{a}$,

(ii) $a \in \mathfrak{a}, r \in R \Rightarrow ra \in \mathfrak{a}$.

Schreiben $\mathfrak{a} \leq_R R$, falls $\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideal.

Beispiel Sei R k1-Ring. Dann:

$$\{0_R\} \leq_R R, \qquad R \leq_R R.$$

Beispiel Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann:

$$n\mathbb{Z} \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

Für $n \geq 2$: $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ kein Unterring.

Satz Seien R k1-Ring, $\mathfrak{a} \leq_R R$. Dann $\mathfrak{a} \subseteq R$ Untergruppe bez. "+".

Beweis Wegen $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ gibt es $r \in \mathfrak{a}$. Damit:

$$0_R = 0_R \cdot r \in \mathfrak{a}.$$

Klar: $a, a' \in \mathfrak{a} \Rightarrow a + a' \in \mathfrak{a}$. Weiter, für jedes $a \in \mathfrak{a}$:

$$-a = (-1_R) \cdot a \in \mathfrak{a}. \qquad \square$$

Satz Seien R k1-Ring und $\mathfrak{a} \leq_R R$. Dann:

$$\mathfrak{a} = R \iff \mathfrak{a} \cap R^* \neq \emptyset.$$

Beweis Zu "$\Rightarrow$": Haben

$$\mathfrak{a} = R \Rightarrow 1_R \in \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} \cap R^* \neq \emptyset.$$

Zu "$\Leftarrow$": Sei $c \in \mathfrak{a} \cap R^*$. Dann, für jedes $r \in R$:

$$r = r \cdot 1_R = r(c^{-1}c) = (rc^{-1})c \in \mathfrak{a}. \qquad \square$$

Folgerung $\mathfrak{a} \leq_R R$ Unterring $\iff \mathfrak{a} = R$.

Konstruktion R K1-Ring, $\emptyset \neq A \subseteq R$.

Das von A erzeugte Ideal ist

$$\langle A \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \,;\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, r_i \in R, a_i \in A \right\}$$

$$\leq_R R.$$

Für $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ schreibe

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle := \langle A \rangle.$$

Weiter $\langle \emptyset \rangle := \{0_R\}$. Hauptideal:

$$\langle a \rangle \leq_R R \quad \text{mit } a \in R.$$

Haben

$$\langle a \rangle = \{ra \,;\, r \in R\} = R \cdot a.$$

Beweis Zu zeigen: $\langle A \rangle \leq_R R$.

klar: $A \subseteq \langle A \rangle$. Somit $\langle A \rangle \neq \emptyset$.

Weiter:

$$\sum r_i a_i, \sum r_j' a_j' \in \langle A \rangle \Rightarrow \sum r_i a_i + \sum r_j' a_j' \in \langle A \rangle,$$

$$\sum r_i a_i \in \langle A \rangle, r \in R \Rightarrow r \sum r_i a_i = \sum r r_i a_i \in \langle A \rangle.$$

$\square$

Beispiel Betrachte $4, 6 \in \mathbb{Z}$.

Dann:

$$\langle 4, 6 \rangle = \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z} \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

klar:

$$4, 6 \in \langle 2 \rangle \Rightarrow \langle 4, 6 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle$$

Weiter: $2 = 6 - 4$. Somit

$$2 \in \langle 4, 6 \rangle \Rightarrow \langle 2 \rangle \subseteq \langle 4, 6 \rangle.$$

__Konstruktion__ R k1-Ring, $\mathfrak{a}_i \leq_R R$, $i \in I$. Neue Ideale:

(i) Durchschnitt:

$$\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i \leq_R R.$$

(ii) Summe:

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i \right\rangle \leq_R R.$$

(iii) Falls I endlich: Produkt:

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{a}_i := \left\langle \prod_{i\in I} a_i \,;\, a_i \in \mathfrak{a}_i \right\rangle \leq_R R.$$

__Bemerkung__ R k1-Ring, $\mathfrak{a}_i \leq_R R$, $i \in I$.

Dann:

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \left\{ \sum_{j\in J} a_j \,;\, J \subseteq I \text{ endl.}, a_j \in \mathfrak{a}_j \right\}.$$

Falls I endlich:

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i .$$

__Beispiel__ In $\mathbb{Z}$ haben wir:

$$\langle 4\rangle + \langle 6\rangle = \langle 4,6\rangle = \langle \underbrace{2}_{\text{ggT}(4,6)} \rangle$$

$$\langle 4\rangle \cap \langle 6\rangle = 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = \langle \underbrace{12}_{\text{kgV}(4,6)} \rangle$$

$$\langle 4\rangle \cdot \langle 6\rangle = \langle 24\rangle \subsetneq \langle 4\rangle \cap \langle 6\rangle.$$

Satz $\varphi: R \to S$ Homomorphismus von k1-Ringen. Dann:

(i) $\mathfrak{b} \leq_S S \implies \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \leq_R R$.

Insbes.: $\mathrm{kern}(\varphi) \leq_R R$.

(ii) $\mathfrak{a} \leq_R R$ und φ surjektiv

$\implies \varphi(\mathfrak{a}) \leq_S S$.

Beweis Zu (i). klar: $0_R \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$.

Seien $a, a_1, a_2 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$, $r \in R$. Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(a_1), \varphi(a_2) \in \mathfrak{b} &\implies \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \in \mathfrak{b} \\ &\implies \varphi(a_1 + a_2) \in \mathfrak{b} \\ &\implies a_1 + a_2 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b}). \end{aligned}$$

Zu (ii). Klar: $0_S = \varphi(0_R) \in \varphi(\mathfrak{a})$.

Seien $b, b_1, b_2 \in \varphi(\mathfrak{a})$, $s \in S$.

Wähle $a, a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$ sodass

$b = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(a_1)$, $b_2 = \varphi(a_2)$.

Wegen φ surjektiv gibt es $r \in R$ mit $\varphi(r) = s$

Damit:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ &= \varphi(a_1 + a_2) \\ &\in \varphi(\mathfrak{a}), \\ s\,b &= \varphi(r)\varphi(b) \\ &= \varphi(rb) \\ &\in \varphi(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel Betrachte Inklusionshom.

$\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto a$.

Dann: $\mathbb{Z} \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ aber $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ kein Ideal in $\mathbb{Q}$: $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$.

__Konstruktion__ R k1-Ring, $\mathfrak{a} \leq_R R$. Faktorgruppe:

$$R/\mathfrak{a} = \{r + \mathfrak{a};\ r \in R\},$$

wobei $(r+\mathfrak{a}) + (s+\mathfrak{a}) = (r+s)+\mathfrak{a}$. Definiere Multiplikation:

$$(r+\mathfrak{a})(s+\mathfrak{a}) := rs + \mathfrak{a}$$

Damit: $R/\mathfrak{a}$ k1-Ring, Faktorring von R nach $\mathfrak{a}$. Haben

$$0_{R/\mathfrak{a}} = 0_R + \mathfrak{a}, \qquad 1_{R/\mathfrak{a}} = 1_R + \mathfrak{a}.$$

Weiter hat man surj. Ring hom.

$$\pi : R \to R/\mathfrak{a}, \qquad r \mapsto r + \mathfrak{a}$$

Dabei gilt $\mathrm{kern}(\pi) = \mathfrak{a}$.

__Beweis__ Zeigen "·" wohldef. Seien $r, r', s, s' \in R$ mit

$$r + \mathfrak{a} = r' + \mathfrak{a}, \qquad s + \mathfrak{a} = s' + \mathfrak{a}.$$

Zu zeigen:

$$rs + \mathfrak{a} = r's' + \mathfrak{a}.$$

Haben $r - r' \in \mathfrak{a}$, $s - s' \in \mathfrak{a}$. Damit:

$$\begin{aligned} rs &= (r' + (r-r'))(s' + (s-s')) \\ &= r's' + \underbrace{r'(s-s') + s'(r-r') + (r-r')(s-s')}_{\in \mathfrak{a}} \end{aligned}$$

Somit $rs - r's' \in \mathfrak{a} \Rightarrow rs + \mathfrak{a} = r's' + \mathfrak{a}$. $\square$

__Beispiel__ Haben Ideal $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ und somit Faktorring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

__Homomorphiesatz__ Seien $\varphi : R \to S$ Hom. von k1-Ringen, $\mathfrak{a} \leq_R R$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{kern}(\varphi)$. Dann hat man kommut. Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi : r \mapsto \varphi(r)"] \arrow[dr, "\pi : r \mapsto r + \mathfrak{a}"'] & & S \\ & R/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\overline{\varphi} : r + \mathfrak{a} \mapsto \varphi(r)"'] & \end{tikzcd}$$

von Ringhom., wobei $\overline{\varphi} : R/\mathfrak{a} \to S$ eindeutig bestimmt. Weiter

(i) $\overline{\varphi}$ injektiv $\iff$ $\mathfrak{a} = \mathrm{kern}(\varphi)$

(ii) $\overline{\varphi}$ surjektiv $\iff$ φ surjektiv.

__Folgerung__ $\varphi : R \to S$ surj. Hom. von k1-Ringen. Dann hat man Iso

$$\overline{\varphi} : R/\mathrm{kern}(\varphi) \to S$$

__Folgerung__ Haben Iso von k1-Ringen

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to C_n, \quad a + n\mathbb{Z} \mapsto \overline{r(a;n)}.$$

<u>Chinesischer Restsatz</u> Seien R k1-Ring, $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r \leq_R R$ mit $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$. Dann hat man Iso. von k1-Ringen:

$$R / \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \longrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \dots \times R/\mathfrak{a}_n,$$
$$r + \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \longmapsto (r + \mathfrak{a}_1, \dots, r + \mathfrak{a}_n).$$

<u>Beweis</u> Haben Hom. von k1-Ringen

$$\varphi : R \longrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \dots \times R/\mathfrak{a}_n,$$
$$r \longmapsto (r + \mathfrak{a}_1, \dots, r + \mathfrak{a}_n).$$

Dabei

$$\mathrm{kern}(\varphi) = \{ r \in R ; r \in \mathfrak{a}_i \text{ für } i = 1, \dots, n \} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$$

HomSatz:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "r \mapsto r + \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i"'] & & R/\mathfrak{a}_1 \times \dots \times R/\mathfrak{a}_n \\
& R / \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \arrow[ur, "\bar{\varphi} : r + \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \mapsto (r + \mathfrak{a}_1, \dots, r + \mathfrak{a}_n)"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ und $\bar{\varphi}$ injektiv. Nur noch zu zeigen: φ surjektiv.

Vorüberlegung: Sei $1 \leq i \leq n$. Zu $j \neq i$ wähle $a_j \in \mathfrak{a}_i$ und $b_j \in \mathfrak{a}_j$ mit

$$a_j + b_j = 1_R.$$

Dann:

$$1_R = \prod_{j \neq i} a_j + b_j \in \mathfrak{a}_i + \prod_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$$
$$\subseteq \mathfrak{a}_i + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$$

liefert zu jedem i ein $c_i \in \mathfrak{a}_i$ und ein $d_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$ mit

$$c_i + d_i = 1_R.$$

Damit:

$$\varphi(d_i) = (0_{R/\mathfrak{a}_1}, \dots, 0_{R/\mathfrak{a}_{i-1}}, 1_{R/\mathfrak{a}_i}, 0_{R/\mathfrak{a}_{i+1}}, \dots, 0_{R/\mathfrak{a}_n})$$

Somit, für $r_1, \dots, r_n \in R$:

$$(r_1 + \mathfrak{a}_1, \dots, r_n + \mathfrak{a}_n) = \varphi(r_1 d_1 + \dots + r_n d_n).$$

□