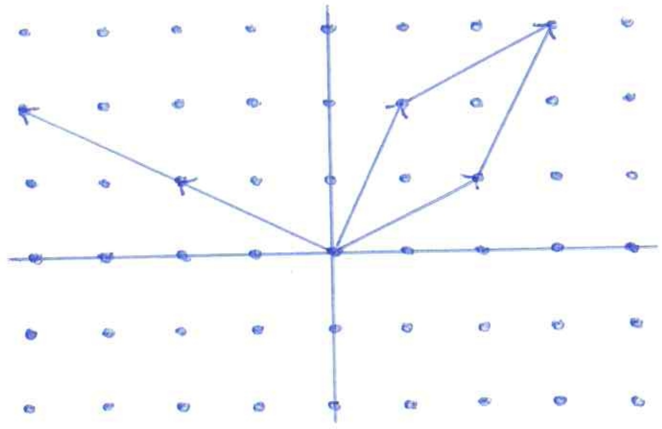
Beispiel Betrachten $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$:



Haben komponentenw. Addition ($\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$):

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2).$$

Weiter Skalarmult. mit ganzen Zahlen:

$$a \cdot (u_1, u_2) = (au_1, au_2).$$

Definition R k1-Ring. R-Modul: Abelsche Gruppe $(M,+)$ mit Abb. (Skalarmult.)

$$R \times M \to M, \quad (r, u) \mapsto r \cdot u,$$

sodass für alle $u, u' \in M$ und $r, r' \in R$:

$$1_R \cdot u = u, \qquad (rr') \cdot u = r \cdot (r' \cdot u),$$

$$(r+r') \cdot u = r \cdot u + r' \cdot u, \quad r \cdot (u+u') = r \cdot u + r \cdot u'.$$

Bemerkung $\mathbb{K}$ Körper, M $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann: M $\mathbb{K}$-Modul.

Beispiel R k1-Ring. R^n wird R-Modul durch

$$(r_1, \ldots, r_n) + (s_1, \ldots, s_n) := (r_1+s_1, \ldots, r_n+s_n),$$

$$a \cdot (r_1, \ldots, r_n) := (ar_1, \ldots, ar_n).$$

Konstruktion $(G,+)$ abelsche Gruppe. Dann: G wird $\mathbb{Z}$-Modul durch

$$n \cdot g := \begin{cases} \underbrace{g + \ldots + g}_{n\text{-mal}}, & n > 0, \\ 0_G, & n = 0, \\ -(\underbrace{g + \ldots + g}_{-n\text{-mal}}), & n < 0. \end{cases}$$

Konstruktion $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi : V \to V$ lineare Abb. Schreibe für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\varphi^n := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-mal}}, \qquad \varphi^0 := \mathrm{id}_V.$$

Dann: V $\mathbb{K}[T]$-Modul durch

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot v := \left(\sum a_\nu \varphi^\nu\right)(v)$$

$$= \sum a_\nu \varphi^\nu(v).$$

Definition Seien R k1-Ring, M R-Modul und $\emptyset \neq N \subseteq M$ mit

$$v, v' \in N \Rightarrow v+v' \in N, \quad r \in R, v \in N \Rightarrow r \cdot v \in N.$$

Nenne N mit $(v,v') \mapsto v+v'$ und $(r,v) \mapsto r \cdot v$ einen Untermodul von M ($N \leq_R M$).

Bemerkung R k1-Ring, M R-Modul, $N \leq_R M$.
(i) $N \leq M$, $0_N = 0_M$.
(ii) N wieder R-Modul.

Bemerkung G abelsche Gruppe. Dann:

$$n \cdot g = g + \dots + g, \; n > 0, \quad 0 \cdot g = 0_G, \quad n \cdot g = -(g + \dots + g), \; n < 0$$

macht G zu $\mathbb{Z}$-Modul. Dabei für $H \subseteq G$:

$$H \leq G \iff H \leq_{\mathbb{Z}} G.$$

Bemerkung R k1-Ring. Dann $(R,+)$ R-Modul durch $r \cdot u := ru$. Dabei für $\mathfrak{a} \subseteq R$:

$$\mathfrak{a} \text{ Ideal in } R \iff \mathfrak{a} \text{ Untermodul von } R$$

Definition R k1-Ring, M R-Modul, $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ Familie in M. Linearkomb. über $\mathcal{F}$:

$$\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i, \quad a_i \in R, \; a_i \neq 0_R \text{ für höchstens endlich viele } i \in I.$$

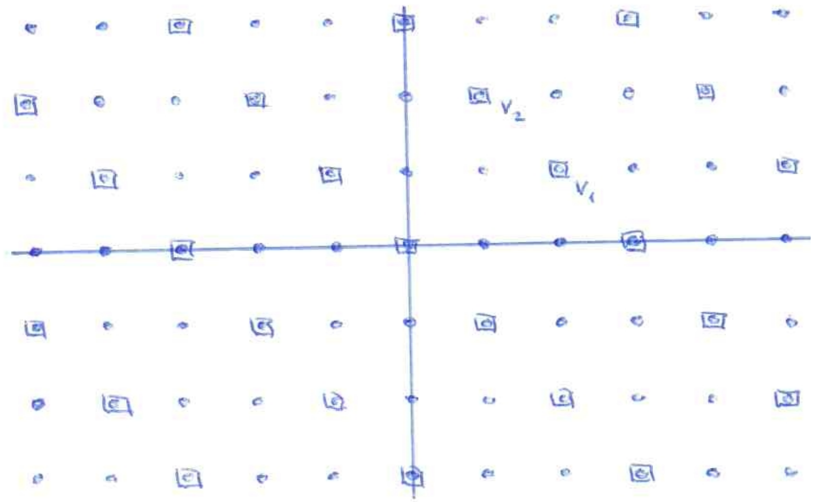
Konstruktion R k1-Ring, M R-Modul, $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ Familie in M. Lineare Hülle über $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) := \{u \in M;\ u \text{ Linkomb. über } \mathcal{F}\} \leq_R M.$$

Schreibe $\mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_n)$, falls $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$.
Weiter $\mathrm{Lin}() := \{0_M\}$. Für $A \subseteq M$:

$$\langle A \rangle := \mathrm{Lin}(A) := \mathrm{Lin}((a)_{a \in A}).$$

Beispiel $\mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ für $v_1 = (2,1)$ und $v_2 = (1,2)$ im $\mathbb{Z}^2$:



Konstruktion R k1-Ring, M R-Modul, $N_i \leq_R M$, $i \in I$ Untermoduln. Summe

$$\sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle = \left\{ \sum_{i \in I} u_i;\ u_i \in N_i \right\} \leq_R M.$$

Definition *Homomorphismus* von R-Moduln M und N: Abbildung $\varphi: M \to N$ sodass stets

$$\varphi(u+u') = \varphi(u) + \varphi(u'), \quad \varphi(r \cdot u) = r \cdot \varphi(u).$$

Nenne Hom. $\varphi: M \to N$ *Isomorphismus*, falls es Hom. $\psi: N \to M$ gibt mit

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_N.$$

Nennen dann M, N *isomorph* zueinander, in Zeichen $M \cong N$.

Weiter, für jeden Hom. $\varphi: M \to N$:

$$\mathrm{kern}(\varphi) := \{u \in M;\ \varphi(u) = 0_N\} = \varphi^{-1}(0_N),$$

$$\mathrm{Bild}(\varphi) := \{\varphi(u);\ u \in M\}.$$

Bemerkung Seien G, H ab. Grp., $\varphi: G \to H$ Abbildung. Dann:

(i) φ Gruppenhom. $\iff$ φ Hom. von $\mathbb{Z}$-Moduln.

(ii) $G \cong H$ als Grp. $\iff$ $G \cong H$ als $\mathbb{Z}$-Moduln.

Denn, falls $\varphi: G \to H$ Gruppenhom.: Für $n \geq 0$:

$$\varphi(n \cdot g) = \varphi(g + \ldots + g) = \varphi(g) + \ldots + \varphi(g) = n \cdot \varphi(g).$$

Für $n \leq 0$:

$$\varphi(n \cdot g) = \varphi(-(g + \ldots + g)) = -(\varphi(g) + \ldots + \varphi(g)) = n \cdot \varphi(g).$$

Bemerkung Komposition von Modulhom. ist Modulhom.

Bemerkung Sei $\varphi: M \to N$ Hom. von R-Moduln.

(i) $M' \leq_R M \implies \varphi(M') \leq_R N$.

(ii) $N' \leq_R N \implies \varphi^{-1}(N') \leq_R M$.

(iii) φ injektiv $\iff$ $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_M\}$.

(iv) φ Iso. $\iff$ φ bijektiv.

Konstruktion R k1-Ring, M_i, $i \in I$, R-Moduln.

Direktes Produkt:

$$\prod_{i \in I} M_i := \{(u_i)_{i \in I};\ u_i \in M_i\}$$

mit den komponentenweisen Verknüpfungen:

$$(u_i)_{i \in I} + (u_i')_{i \in I} := (u_i + u_i')_{i \in I}, \quad r \cdot (u_i)_{i \in I} := (r \cdot u_i)_{i \in I}.$$

Direkte Summe:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \left\{(u_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i;\ \begin{matrix} u_i \neq 0_{M_i} \text{ für höchstens} \\ \text{endl. viele } i \in I \end{matrix}\right\} \leq_R \prod_{i \in I} M_i.$$

Haben Hom. (Projektionen):

$$\prod M_i \xrightarrow{\pi_j} M_j, \quad (u_i) \mapsto u_j, \qquad \bigoplus M_i \xrightarrow{\pi_j} M_j, \quad (u_i) \mapsto u_j.$$

__Konstruktion__ R k1-Ring, M R-Modul und $N \leq_R M$. Haben Faktorgruppe

$$M/N = \{u+N;\ u \in M\},$$

wobei $(u+N)+(v+N) = (u+v)+N$. Definiere Skalarmultiplikation:

$$r \cdot (u+N) := r \cdot u + N.$$

Damit: M/N R-Modul, Faktormodul von M nach N. Haben

$$0_{M/N} = 0_M + N.$$

Weiter hat man surj. Modulhom.

$$\pi : M \to M/N, \quad u \mapsto u+N.$$

Dabei gilt $\mathrm{kern}(\pi) = N$.

__Beispiel__ R k1-Ring, $\mathfrak{a} \subseteq R$ Ideal. Dann $R/\mathfrak{a}$ R-Modul.

__Homomorphiesatz__ Seien $\varphi : M \to N$ Hom. von R-Moduln, $M_0 \leq_R M$ mit $M_0 \subseteq \mathrm{kern}(\varphi)$. Dann hat man ein kommut. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi:\ u \mapsto \varphi(u)"] \arrow[dr, "\pi:\ u \mapsto u+M_0"'] & & N \\
& M/M_0 \arrow[ur, "\bar{\varphi}:\ u+M_0 \mapsto \varphi(u)"'] &
\end{tikzcd}$$

von R-Modulhom., wobei $\bar{\varphi} : M/M_0 \to N$ eindeutig bestimmt. Weiter:

(i) $\bar{\varphi}$ injektiv $\iff$ $M_0 = \mathrm{kern}(\varphi)$

(ii) $\bar{\varphi}$ surjektiv $\iff$ φ surjektiv.

__Folgerung__ Sei $\varphi : M \to N$ surjektiver Hom. von R-Moduln. Dann hat man Iso:

$$\bar{\varphi} : M/\mathrm{kern}(\varphi) \to N, \quad u + \mathrm{kern}(\varphi) \mapsto \varphi(u).$$