Definition R k1-Ring, M R-Modul.

(i) Erzeugendensystem für M: Fam. $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ in M mit

$$M = \mathrm{Lin}(\mathcal{F}).$$

(ii) Eine Fam. $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ in M heisst linear unabhängig, falls stets

$$\sum_{i \in I} r_i \cdot u_i = 0_M \implies r_i = 0_R \text{ für alle } i \in I.$$

(iii) M endlich erzeugt, falls M endl. Erz-Syst. besitzt.

(iv) M frei, falls $M = \{0_M\}$ oder M Basis besitzt, d.h., l. u. Erz-Syst.

Beispiel R k1-Ring, $\emptyset \neq I$ Menge. Betrachte

$$R^I_\oplus := \bigoplus_{i \in I} R \leq_R \prod_{i \in I} R.$$

Dann $R^I_\oplus$ frei mit kanonischer Basis $(e_i)_{i \in I}$, wobei

$$e_i := (\delta_{ij})_{j \in I}, \quad \delta_{ij} := \begin{cases} 1_R, & j = i, \\ 0_R, & j \neq i. \end{cases}$$

Insbesondere, für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: R^n frei mit kanonischer Basis $(e_1, \dots, e_n)$.

Beispiel Betrachte $v_1 = (2,1)$ und $v_2 = (1,2)$ in $\mathbb{Z}^2$. Dann

* $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ linear unabh.

** $(1,0) \notin \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$.

Für ** bräuchte man Lk $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = (1,0)$. Nicht möglich mit $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$2a + b = 1, \quad a + 2b = 0 \implies -3b = 1.$$

Beispiel Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht frei:

$$2 \cdot \bar{1} = \bar{0}, \quad \text{aber } 2 \neq 0$$

__Satz__ R k1-Ring, M R-Modul mit Basis $B=(u_i)_{i\in I}$. Dann hat jedes $u \in M$ eind. Darst.

$$(*) \quad u = \sum_{i\in I} r_i \cdot u_i, \qquad r_i \in R.$$

__Beweis__ B Erz-Syst $\Rightarrow$ jedes $u \in M$ hat $(*)$. Zur Eindeutigkeit. Betrachte

$$u = \sum_{i\in I} r_i \cdot u_i = \sum_{i\in I} s_i \cdot u_i.$$

Dann:

$$0_M = \sum_{i\in I} r_i \cdot u_i - \sum_{i\in I} s_i \cdot u_i = \sum_{i\in I} (r_i - s_i) \cdot u_i.$$

B lin. unabh. $\Rightarrow r_i = s_i$ f. alle $i \in I$. □

__Definition__ R k1-Ring, M R-Modul mit Basis $B=(u_i)_{i\in I}$. Für $u \in M$ nenne

$$(*) \quad u = \sum_{i\in I} r_i \cdot u_i$$

die Entwicklung von u nach B. Koordinatenvektor von $u \in M$ bez. B:

$$x_B(u) := (r_i)_{i\in I} \in R^I_\oplus.$$

__Satz__ R k1-Ring, M R-Modul mit Basis $B=(u_i)_{i\in I}$, N R-Modul, $(v_i)_{i\in I}$ Fam. in N.

(i) Es gibt eind. best. Hom. $\varphi: M \to N$ mit $\varphi(u_i) = v_i$ für alle $i \in I$:

$$\varphi\Big(\sum_{i\in I} r_i \cdot u_i\Big) := \sum_{i\in I} r_i \cdot v_i.$$

(ii) Sei $\varphi: M \to N$ wie in (i). Dann:

$$\varphi \text{ Iso} \iff (v_i)_{i\in I} \text{ Basis für } V.$$

__Folgerung__ R k1-Ring, M R-Modul mit Basis $B=(u_i)_{i\in I}$. Dann hat man Iso

$$\varphi_B: M \to R^I_\oplus, \qquad u \mapsto x_B(u).$$

__Beweis:__ φ_B ist der Hom. mit $\varphi_B(u_i) = e_i$. □

__Folgerung__ R k1-Ring, M freier R-Modul. Dann:

$$M \text{ endl. erz} \iff M \text{ hat endl. Basis}.$$

__Beweis__ OE: $M = R^I_\oplus$. Nur z.z.: "$\Rightarrow$". Haben

$R^I_\oplus$ endl. erz. $\Rightarrow R^I_\oplus = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_s)$

$\Rightarrow R^I_\oplus = \mathrm{Lin}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \Rightarrow I$ endl. □

Satz R Int-Ring, M freier R-Modul. Dann: Je zwei Basen von M gleich lang.

Beweis OE $M = R^I_\oplus = \bigoplus_{i\in I} R$. Betrachte

$$\mathbb{k} := Q(R).$$

Haben $R \subseteq \mathbb{k}$ vermöge $a \mapsto \frac{a}{1_R}$. Liefert inj. Hom. von R-Moduln:

$$\Phi : \bigoplus_{i\in I} R \to \bigoplus_{i\in I} \mathbb{k}, \quad (a_i) \mapsto \left(\frac{a_i}{1_R}\right).$$

Weiter: $V := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{k}$ ist $\mathbb{k}$-VR. Wissen: Je zwei $\mathbb{k}$-Basen von V sind gleich lang.

Also, reicht z.z.: Ist $(u_j)_{j\in J}$ R-Basis für M, so ist $\mathcal{C} := (\Phi(u_j))_{j\in J}$ $\mathbb{k}$-Basis für V.

Zeigen: "$\mathcal{C}$ Erz-Syst für V". Sei $v \in V$.

Dann:

$$v = \left(\frac{a_i}{b_i}\right)_{i\in I}, \text{ nur endl. viele } a_i \neq 0_R.$$

Setze

$$b := \prod_{a_i \neq 0_R} b_i .$$

Dann: $b \neq 0_R$ und

$$v = \frac{1}{b}\circ \underbrace{(b\circ v)}_{\in \Phi(M)} = \frac{1}{b}\cdot \Phi\Big(\sum_{j\in J} c_j u_j\Big)$$

$$= \sum_{j\in J} \frac{c_j}{b}\cdot \Phi(u_j).$$

Zeigen: "$\mathcal{C}$ linear unabh." Betrachte Lk

$$0_V = \sum_{j\in J} \frac{a_j}{b_j}\cdot \Phi(u_j).$$

Setze

$$b := \prod_{a_j \neq 0_R} b_j, \qquad b_j' := \frac{b}{b_j}$$

Dann: $b_j' \neq 0_R$ und

$$0_V = \frac{b}{1_R}\cdot \sum_{j\in J} \frac{a_j}{b_j}\cdot \Phi(u_j) = \sum_{j\in J} \frac{b_j' a_j}{1_R}\cdot \Phi(u_j)$$

$$= \Phi\Big(\underbrace{\sum_{j\in J} b_j' a_j \cdot u_j}_{=:w}\Big).$$

Wegen Φ injektiv: $w = 0_M$. Wegen $(u_j)_{j\in J}$ Basis:

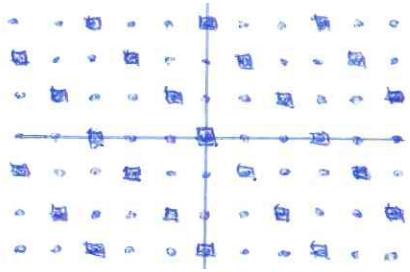
$b_j' a_j = 0_R$ f. alle $j\in J$ $\Rightarrow a_j = 0_R$ f. alle $j \in J$

$\Rightarrow \frac{a_j}{b_j} = 0_{\mathbb{k}}$ f. alle $j\in J$. $\square$

Definition R Int-Ring, M freier R-Modul.
Rang von M:

$$rg(M) := \begin{cases} \infty, & M \text{ hat keine endl. Basis,} \\ n, & M \text{ hat Basis } (u_1, \dots, u_n). \end{cases}$$

Beispiel Haben $rg(\mathbb{Z}^2) = 2$. Mit $v_1 = (2,1)$ und $v_2 = (1,2)$: $\text{Lin}(v_1, v_2) \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2$ ebenfalls vom Rang 2



Satz R HIR, F endl. erz. freier R-Modul, $M \leq_R F$. Dann: M frei und $rg(M) \leq rg(F)$.

Beweis $F = \{0_F\}$: ✓. Seien $F \neq \{0_F\}$, $(v_1, \dots, v_r)$ Basis für F. Betrachte

$$M_0 := \{0_M\} \leq_R F, \dots, M_n := M \cap \text{Lin}(v_1, \dots, v_n) \leq_R F.$$

Dann: $M_r = M$. Zeigen per Induktion über n: M_n frei und $rg(M_n) \leq n$.

"$n = 0$": ✓ Zu "$n-1 \to n$": Betrachte

$$\mathfrak{a} := \{a \in R;\ a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a v_n \in M \text{ mit } a_i \in R\} \leq R.$$

Dann $\mathfrak{a} \leq_R R$. Wegen R HIR haben wir

$$\mathfrak{a} = \langle a_n \rangle \quad \text{mit } a_n \in R.$$

Falls $a_n = 0_R$: $M_n = M_{n-1}$. IV: M_n frei und $rg(M_n) \leq n-1 < n$.

Falls $a_n \neq 0_R$: Wähle Basis $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$ für M_{n-1} und

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n \in M_n.$$

Zeigen: $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k, v)$ erz. M_n. Sei $w \in M_n$. Dann:

$$\begin{aligned} w &= b_1 v_1 + \dots + b_{n-1} v_{n-1} + b_n v_n \\ &= b_1 v_1 + \dots + b_{n-1} v_{n-1} + b a_n v_n \quad \left[\begin{matrix} w \in M \\ \Rightarrow \\ b_n \in \mathfrak{a} \end{matrix}\right] \\ &= (b_1 - b a_1) v_1 + \dots + (b_{n-1} - b a_{n-1}) v_{n-1} + b v \\ &\in \text{Lin}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k, v). \end{aligned}$$

Zeigen: $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k, v)$ lin. unabh. Sei

$$b_1 \tilde{v}_1 + \dots + b_k \tilde{v}_k + b \cdot v = 0_M.$$

Dann:

$$b_1 \tilde{v}_1 + \dots + b_k \tilde{v}_k + b a_1 v_1 + \dots + b a_{n-1} v_{n-1} + b a_n v_n = 0_M.$$

Mit $(v_1, \dots, v_n)$ l.u.: $b a_n = 0_R \Rightarrow b = 0_R$.

Mit $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$ l.u.: $b_1 = \dots = b_k = 0_R$. $\square$