__Definition__ R k1-Ring. *(m×n)-Matrix* über R:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Mat}(m,n;R) :=$ Menge aller $(m\times n)$-Matrizen über R.

Matrix-Vektor-Multiplikation: Für $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$ und $x \in R^n$:

$$A\cdot x := \begin{pmatrix} \sum a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum a_{mj}x_j \end{pmatrix} \in R^m.$$

Matrizenmultiplikation: Für $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n,l;R)$:

$$A\cdot B := \left(\sum a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le l}} \in \mathrm{Mat}(m,l;R).$$

Die *Transponierte* von $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$ ist $A^t := (a_{ji}) \in \mathrm{Mat}(n,m;R)$.

__Satz__ R k1-Ring.

(i) $\mathrm{Mat}(m,n;R)$ wird R-Modul durch

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij}+b_{ij}), \quad r\cdot(a_{ij}) := (ra_{ij}).$$

(ii) Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$ und $x, y \in R^n$:

$$A\cdot(x+y) = A\cdot x + A\cdot y, \quad A\cdot(r\cdot x) = r\cdot(A\cdot x),$$
$$(A+B)\cdot x = A\cdot x + B\cdot x, \quad (r\cdot A)\cdot x = r\cdot(A\cdot x).$$

(iii) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$, $B \in \mathrm{Mat}(n,l;R)$ und $C \in \mathrm{Mat}(l,k;R)$:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C).$$

Sind weiter $A' \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$, $B' \in \mathrm{Mat}(n,l;R)$, so hat man

$$A\cdot(B+B') = A\cdot B + A\cdot B', \quad (A+A')\cdot B = A\cdot B + A'\cdot B.$$

(iv) Für die *Einheitsmatrix* $E_n \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$ und alle $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$, $B \in \mathrm{Mat}(n,l;R)$ gilt:

$$A\cdot E_n = A, \qquad E_n\cdot B = B.$$

(v) $\mathrm{Mat}(n,n;R)$ mit "+" und "·" ist Ring mit Einselement E_n und

$$\mathrm{Mat}(n,n;R)^* = \{A \in \mathrm{Mat}(n,n;R);\ A \text{ invertierbar}\}.$$

(vi) Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$ und $\lambda \in R$:

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \quad (\lambda\cdot A)^t = \lambda\cdot A^t, \quad (A^t)^t = A.$$

(vii) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$, $B \in \mathrm{Mat}(n,l;R)$:

$$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t.$$

__Satz__ R k1-Ring, M, N freie R-Moduln mit Basen $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ bzw. $\mathcal{E} = (v_1, \dots, v_m)$.

(i) Zu jedem $A \in \mathrm{Mat}(m, n; R)$ gibt es einen eind. best. Modulhom. $\mu^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(A) : M \to N$ mit

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(A)"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}} : u \mapsto x_{\mathcal{B}}(u)"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\mathcal{E}} : v \mapsto x_{\mathcal{E}}(v)"] \\ R^n \arrow[r, "\mu_A : x \mapsto A \cdot x"'] & R^m \end{tikzcd}.$$

(ii) Zu jedem Modulhom. $\varphi : M \to N$ gibt es eind. best. Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ mit

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}} : u \mapsto x_{\mathcal{B}}(u)"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\mathcal{E}} : v \mapsto x_{\mathcal{E}}(v)"] \\ R^n \arrow[r, "x \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi) \cdot x"'] & R^m \end{tikzcd},$$

nämlich:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi) = (x_{\mathcal{E}}(\varphi(u_1)), \dots, x_{\mathcal{E}}(\varphi(u_n))).$$

__Konstruktion__ R k1-Ring, M, N R-Moduln. Dann:

$$\mathrm{Hom}(M, N) := \{\varphi : M \to N;\ \varphi\ R\text{-Modulhom.}\}$$

R-Modul mit den punktweisen Verknüpfungen:

$$(\varphi + \psi)(u) := \varphi(u) + \psi(u), \qquad (r \cdot \varphi)(u) := r \cdot \varphi(u).$$

Dabei $\mathrm{End}(M) := \mathrm{Hom}(M, M)$ Ring durch

$$(\varphi \cdot \psi)(u) := \varphi \circ \psi(u).$$

Einselement id_M, Einheitengruppe

$$\mathrm{End}(M)^* = \{\varphi : M \to M;\ \varphi \text{ Iso.}\}.$$

__Satz__ R k1-Ring, L, M, N endl. erz. freie R-Moduln mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{E}$.

(i) Seien $n := \mathrm{rg}(M)$, $m := \mathrm{rg}(N)$. Haben zueinander inverse Isos von R-Moduln:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(m, n; R) &\longleftrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \\ A &\mapsto \mu^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(A) \\ \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi) &\leftarrow\!\shortmid \varphi. \end{aligned}$$

(ii) Seien $\varphi : L \to M$, $\psi : M \to N$ Hom. Dann

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\psi) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

(iii) Haben zueinander inverse Ringisos

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(n, n; R) &\longleftrightarrow \mathrm{End}(M) \\ A &\mapsto \mu^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(A) \\ \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) &\leftarrow\!\shortmid \varphi. \end{aligned}$$

__Definition__ R kl-Ring, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$.

Determinante:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in R.$$

Die zu A komplementäre Matrix ist

$$A^\# := \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \cdots & \det(A_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(A_{n1}) & \cdots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix}^t \in \mathrm{Mat}(n,n;R),$$

wobei

$$A_{ij} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad\qquad j \qquad\qquad\qquad\qquad \end{matrix} \end{array}$$

$\in \mathrm{Mat}(n,n;R)$.

__Satz__ R Int-Ring, $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$.

Dann:

(i) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\det(A^t) = \det(A)$.

(iii) $A^\# \cdot A = A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n$.

__Beweis__ Betrachte Quotkörper $\mathbb{K} := Q(R)$.

Haben injektiven Ringhom.:

$$\iota: R \to \mathbb{K}, \quad a \mapsto \frac{a}{1_R}.$$

Liefert injektiven Ringhom.

$$\iota: \mathrm{Mat}(n,n;R) \to \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}), \quad (a_{ij}) \mapsto \left(\frac{a_{ij}}{1_R}\right)$$

Dabei:

$$\det(\iota(A)) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) \frac{a_{1\sigma(1)}}{1_R} \cdots \frac{a_{n\sigma(n)}}{1_R} = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}{1_R} = \iota(\det(A)).$$

Damit z.B.:

$$\iota(\det(AB)) = \det(\iota(AB)) = \det(\iota(A)\iota(B)) \overset{!}{=} \det(\iota(A))\det(\iota(B)) = \iota(\det(A))\,\iota(\det(B)) = \iota(\det(A)\det(B))$$

Wegen ι injektiv: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

Satz R Int-Ring, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$. Dann sind äquivalent:

(i) A invertierbar, d.h., $A \in \mathrm{Mat}(n,n;R)^*$.

(ii) Spalten von A bilden Basis von R^n.

(iii) Zeilen von A bilden Basis von R^n.

(iv) Es gilt $\det(A) \in R^*$.

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (iv)". Haben $A \cdot A^{-1} = E_n$.

Damit:

$$1_R = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Folglich $\det(A) \in R^*$.

Zu "(iv) $\Rightarrow$ (i)". Betrachte $A^\#$. Dann

$$A^\# \cdot A = A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n$$

Somit: $\det(A)^{-1} \cdot A^\#$ Inverse zu A.

Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Haben Iso $\mu_A : R^n \to R^n$, $u \mapsto A \cdot u$.

Liefert Basis

$$(\mu_A(e_1), \ldots, \mu_A(e_n)) = (A_{*1}, \ldots, A_{*n}).$$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Wähle $b_i \in R^n$ mit

$$A \cdot b_i = b_{i1} \cdot A_{*1} + \ldots + b_{in} \cdot A_{*n} = e_i.$$

Dann, mit $B = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$A \cdot B = E_n \Rightarrow \det(A)\det(B) = 1_R$$
$$\Rightarrow \det(A) \in R^*$$
$$\Rightarrow A \text{ invertierbar.}$$

Zu "(i) $\Leftrightarrow$ (iii)". Haben

$$A \in \mathrm{Mat}(n,n;R)^* \Longleftrightarrow A^t \in \mathrm{Mat}(n,n;R)^* \overset{\text{s.o.}}{\Longleftrightarrow} \text{Zeilen von } A \text{ bilden Basis von } R^n.$$

$\square$

Bemerkung Seien $\mathbb{K}$ Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$.

Wissen:

$$A \text{ invertierbar} \Longleftrightarrow \mathrm{Rang}(A) = n.$$

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Q}).$$

Dann: $\mathrm{Rang}(A) = 2$, aber $A \notin \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Z})^*$ wegen $\det(A) = 4 \notin \mathbb{Z}^*$.