Beispiel Für $n \geq 2$ betrachte $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Für jedes $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$n \cdot \bar{a} = (na) \cdot \bar{1} = (an) \cdot \bar{1} = a \cdot \bar{n} = a \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Insbes. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht frei. Andernfalls hätte man Basis $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r)$, aber

$$n\bar{a}_1 + \ldots + n\bar{a}_r = \bar{0}, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}. \ \lightning$$

Definition R Int-Ring, M R-Modul.

(i) Nenne $u \in M$ *Torsionselement*, falls es $0_R \neq r \in R$ gibt mit $r \cdot u = 0_M$. Setze

$$T(M) := \{u \in M;\ u \text{ Tors-El.}\}.$$

(ii) Nenne M *Torsionsmodul*, falls $M = T(M)$. Nenne M *torsionsfrei*, falls $T(M) = \{0_M\}$.

Beispiel R Int-Ring, $a \in R \setminus \{0\}$. Dann $R/\langle a \rangle$ Torsionsmodul.

Satz R Int-Ring, M R-Modul.

(i) $T(M) \subseteq M$ ist Untermodul von M.

(ii) M frei $\Rightarrow$ M torsionsfrei.

(iii) M torsionsfrei $\Rightarrow$ Jedes $N \leq_R M$ ist torsionsfrei.

Beweis Zu "(i)": klar: $0_M \in T(M)$. Seien $u, u' \in T(M)$. Dann:

$$r \cdot u = 0_M, \quad r' \cdot u' = 0_M \quad \text{mit } 0_R \neq r, r' \in R$$

Wegen R Int-Ring: $r \cdot r' \neq 0_R$. Weiter

$$(rr') \cdot (u + u') = (r'r) \cdot u + (rr') \cdot u'$$
$$= r' \cdot (r \cdot u) + r \cdot (r' \cdot u') = 0_M.$$

Seien $u \in T(M)$, $s \in R$. Wähle $0_R \neq r \in R$ mit $r \cdot u = 0_M$. Dann:

$$r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u = (sr) \cdot u = s \cdot (r \cdot u) = 0_M.$$

Zu (ii). Sei $(u_i)_{i \in I}$ Basis für M. Z.z.: $T(M) = \{0_M\}$. Sei $u \in T(M)$. Dann $r \cdot u = 0_M$ mit $0_R \neq r \in R$. Schreibe $u = \sum r_i \cdot u_i$. Dann

$$0_M = r \cdot u = r \cdot \sum r_i \cdot u_i = \sum (r r_i) \cdot u_i.$$

Somit $r r_i = 0_R$ für alle $i \in I$. Wegen R Int-Ring: $r_i = 0_R$ für alle $i \in I$. Also: $u = 0_M$. $\square$

Definition R k1-Ring und M R-Modul.
Länge $L_R(M)$: Supremum aller Längen r von Ketten
$$\{0_M\} \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M, \quad M_i \leq_R M.$$

Bemerkung R k1-Ring, M R-Modul.
Dann:
$$L_R(M) = 0 \iff M = \{0_M\}.$$

Beispiel $\mathbb{K}$ Körper, V endl.-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann:
$$L_{\mathbb{K}}(V) = \dim(V).$$

Zu "$\geq$": Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis für V. Haben Kette
$$\{0_V\} \subsetneq \mathrm{Lin}(v_1) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n) = V$$
von UVR der Länge $n = \dim(V)$.

Zu "$\leq$": Betrachte Kette von UVR:
$$\{0_V\} \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V.$$
Dann: $\dim(V_i) < \dim(V_{i+1})$. Folglich $r \leq \dim(V)$.

Beispiel Haben $L_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \infty$. Es gibt Ketten beliebiger Länge:
$$\{0\} \subsetneq \langle 2^r \rangle \subsetneq \langle 2^{r-1} \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq \mathbb{Z}.$$

Beispiel Sei $p \in \mathbb{Z}$ Primzahl. Dann:
$$L_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 1.$$

Betrachte $\{\bar{0}\} \subsetneq M_1 \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Sei $\bar{0} \neq \bar{a} \in M_1$.
Dann:
$$1 \cdot \bar{a}, \; 2 \cdot \bar{a}, \; \dots, \; p \cdot \bar{a} \in M_1.$$

Beh.: $k \cdot \bar{a} \neq l \cdot \bar{a}$ für alle $1 \leq k < l \leq p$.
Sonst: $(l-k) \cdot \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \overline{l-k} \cdot \bar{a} = \bar{0}$ $\lightning$
Also $M_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Somit $L_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 1$.

Satz R k1-Ring, M, N R-Moduln. Dann:

$$L_R(M \oplus N) = L_R(M) + L_R(N).$$

Beweis Zeigen "$\geq$". Gegeben seien

$$\{0_M\} \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M, \quad M_i \leq_R M,$$

$$\{0_N\} \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_s = N, \quad N_j \leq_R N.$$

Brauchen Kette der Länge mind. $r+s$ in $M \oplus N$. Haben

$$\{0_{M \oplus N}\} \subsetneq M_1 \oplus \{0_N\} \subsetneq \dots \subsetneq M_r \oplus \{0_N\}$$

$$\subsetneq M_1 \oplus N_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r \oplus N_s = M \oplus N.$$

Zeigen "$\leq$". Betrachte die Hom.

$$\iota : M \mapsto M \oplus N, \quad u \mapsto (u, 0_N),$$

$$\pi : M \oplus N \mapsto N, \quad (u, v) \mapsto v.$$

Dabei:

$$\iota(M) = \ker(\pi).$$

Gegeben sei Untermodulkette

$$\{0_{M \oplus N}\} \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_r = M \oplus N.$$

Haben in M bzw. N:

$$\iota^{-1}(U_j) \subseteq \iota^{-1}(U_{j+1}), \quad \pi(U_j) \subseteq \pi(U_{j+1}).$$

Falls mind. einmal "$\subsetneq$" für jedes j: ✓

Angenommen, es gibt j mit zweimal "$=$".
Zeigen: $U_j = U_{j+1}$. Sei $(u,v) \in U_{j+1}$. Dann:

$$\pi(U_j) = \pi(U_{j+1}) \Rightarrow \text{es gibt } (u', v) \in U_j.$$

Haben

$$(u-u', 0_N) = (u,v) - (u',v) \in U_{j+1}.$$

Somit

$$u - u' \in \iota^{-1}(U_{j+1}) = \iota^{-1}(U_j).$$

Also

$$(u,v) = (u',v) + (u-u', 0_N) \in U_j$$

Folglich $U_j = U_{j+1}$ ↯ $\square$

Satz R euklid. Ring, $q_1, \ldots, q_n \in R$ Primel.

Dann:
$$L_R(R/\langle q_1 \cdots q_n \rangle) = n.$$

Lemma R euklid. Ring, $a \in R$, $a = c p_1^{\nu_1} \cdots p_n^{\nu_n}$ mit $c \in R^*$ und p_i pw. nichtassoz. prim. Dann hat man Iso von R-Moduln:

$$R/\langle a \rangle \cong R/\langle p_1^{\nu_1} \rangle \times \ldots \times R/\langle p_n^{\nu_n} \rangle.$$

Beweis Chinesischer Restsatz. $\square$

Beweis Satz. FALL 1: $q_1 = \ldots = q_n =: q$.

Betrachte
$$\pi : R \to R/\langle q^n \rangle, \qquad r \mapsto r + \langle q^n \rangle.$$

Zeigen $L_R(R/\langle q^n \rangle) \geq n$. Haben Kette in R:

$$\{0_R\} \subsetneq \langle q^{n-1} \rangle \subsetneq \ldots \subsetneq \langle q \rangle \subsetneq \langle 1_R \rangle = R.$$

Jeweils "$\subsetneq$" wegen $q^{i+1} \nmid q^i$. Damit Kette

$$\{0_{R/\langle q^n \rangle}\} \subsetneq \pi(\langle q^{n-1} \rangle) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi(\langle q \rangle) \subsetneq R/\langle q^n \rangle.$$

Jeweils "$\subsetneq$", denn sonst

$$\pi(q^i) \in \pi(\langle q^{i+1} \rangle) \Rightarrow q^i \in \langle q^{i+1} \rangle + \underbrace{\langle q^n \rangle}_{\ker(\pi)} = \langle q^{i+1} \rangle \lightning$$

Zeigen $L_R(R/\langle q^n \rangle) \leq n$. Betrachte Kette

$$\{0_{R/\langle q^n \rangle}\} \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = R/\langle q^n \rangle.$$

Wegen π surjektiv: Echt aufsteigende Kette

$$\langle q^n \rangle \subsetneq \pi^{-1}(M_1) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(M_r) = R.$$

Ideale in R

Wegen R HIR: $\pi^{-1}(M_i) = \langle s_i \rangle$ mit $s_i \in R$.

Weiter
$$q^n \in \langle s_i \rangle \Rightarrow s_i \mid q^n \Rightarrow s_i = c_i q^{n_i} \text{ mit } c_i \in R^*.$$

Dabei $n > n_1 > \ldots > n_r = 0$. Also $r \leq n$.

FALL 2: q_i beliebig. Schreibe
$$q_1 \cdots q_n = c p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}$$
mit $c \in R^*$ und $p_1, \ldots, p_m$ pw. nichtassoz. prim.

Dann:
$$L_R(R/\langle q_1 \cdots q_n \rangle) \overset{\text{Lemma}}{=} L_R(R/\langle p_1^{\nu_1} \rangle \times \ldots \times R/\langle p_m^{\nu_m} \rangle)$$

$$\underset{\text{additiv}}{\overset{\text{Länge}}{=}} L_R(R/\langle p_1^{\nu_1} \rangle) + \ldots + L_R(R/\langle p_m^{\nu_m} \rangle)$$

$$\overset{\text{FALL 1}}{=} \nu_1 + \ldots + \nu_m = n.$$

$\square$

Satz R euklid. Ring, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in R \setminus R^*$ mit $a_{i+1} \mid a_i$, $b_{j+1} \mid b_j$ und

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R/\langle a_i \rangle \underset{R\text{-Mod.}}{\cong} \bigoplus_{j=1}^{m} R/\langle b_j \rangle.$$

Dann: $m = n$ und $b_i = c_i a_i$ mit $c_i \in R^*$.

Beweis Zeigen $\langle a_i \rangle = \langle b_i \rangle$ für $1 \leq i \leq \min(m,n)$.

Angenommen es gibt $1 \leq k \leq \min(m,n)$ mit $\langle a_k \rangle \neq \langle b_k \rangle$. Wähle k minimal.

Haben $a_{k+l} \mid a_k$ für $l \geq 0$. D.h.: $a_k R \subseteq \langle a_{k+l} \rangle$.

Damit:

$$M' := a_k \cdot \bigoplus_{i=1}^{n} R/\langle a_i \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{k-1} a_k \cdot (R/\langle a_i \rangle).$$

Wegen $\langle a_i \rangle = \langle b_i \rangle$ für $i = 1, \dots, k-1$:

$$M' \cong a_k \cdot \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle b_j \rangle = \bigoplus_{j=1}^{k-1} a_k \cdot (R/\langle a_j \rangle) \oplus \bigoplus_{j=k}^{m} a_k \cdot (R/\langle b_j \rangle).$$

Mit Additivität der Länge:

$$L_R\left(\bigoplus_{j=k}^{m} a_k \cdot (R/\langle b_j \rangle) \right) = 0.$$

Insbes.:

$$a_k \cdot (R/\langle b_k \rangle) = \{0\} \Rightarrow a_k R \subseteq \langle b_k \rangle.$$

Analog: $b_k \cdot R \subseteq \langle a_k \rangle$. D.h. $\langle a_k \rangle = \langle b_k \rangle$ ↯

Folglich $\langle a_i \rangle = \langle b_i \rangle$ für $i = 1, \dots, \min(m,n)$.

Noch z.z.: $m = n$. Angenommen $m \neq n$, etwa $m < n$. Dann:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle \oplus \bigoplus_{i=m+1}^{n} R/\langle a_i \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle b_i \rangle = \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle.$$

Additivität der Länge:

$$L_R\left(\bigoplus_{i=m+1}^{n} R/\langle a_i \rangle \right) = 0$$

Insbes.: $R/\langle a_n \rangle \cong \{0\}$ ↯ zu $a_n \notin R^*$. $\square$