**Bemerkung** Seien $\mathbb{K}$ Körper und $A \in Mat(m,n;\mathbb{K})$.

Dann:

$$A \xrightarrow[SpOp]{ZOp} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Frage: Was erreicht man mit ZOp und SpOp in $Mat(m,n;R)$ für k1-Ring $R$?

Ein Beispiel in $Mat(3,3;\mathbb{Z})$, zunächst nur ZOp:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(1;1,2)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(1;1,3)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(-1;3,2)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(-1;2,1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Über $\mathbb{Q}$:
* 1 noch weg
* normieren

Weiter mit ZOp und SpOp:

$$\xrightarrow{SpOp(1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(-2;1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(-1;2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{SpOp(-3;1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{ZOp(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{SpOp(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Beachte dabei:

$1 \mid 2$ und $2 \mid 6$.

**Bemerkung** $R$ kt-Ring, $\lambda \in R$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.
Elementarmatrix in $\mathrm{Mat}(n,n;R)$:

$$E(n;\lambda;j,i) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + \lambda \cdot e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & i \\ \quad\quad j & \end{array}$$

$$= (e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j + \lambda \cdot e_i, \ldots, e_n).$$

Haben:

$$E(n;\lambda;j,i) \cdot A = ZOp(\lambda;j,i)(A),$$
$$B \cdot E(n;\lambda;j,i) = SpOp(\lambda;i,j)(B),$$
$$E(n;\lambda;j,i)^{-1} = E(n;-\lambda;j,i).$$

**Bemerkung** $R$ kt-Ring, $1 \leq i < j \leq n$. Elementarmatrix in $\mathrm{Mat}(n,n;R)$:

$$E(n;i,j) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \quad\quad i \quad\quad j & \end{array}$$

$$= (e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n).$$

Haben:

$$E(n;i,j) \cdot A = ZOp(i,j)(A),$$
$$B \cdot E(n;i,j) = SpOp(i,j)(B),$$
$$E(n;i,j)^{-1} = E(n;i,j).$$

**Bemerkung** $R$ kt-Ring, $\lambda \in R^*$, $1 \leq i \leq n$.
Elementarmatrix in $\mathrm{Mat}(n,n;R)$:

$$E(n;\lambda;i) := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & i \\ \quad\quad i & \end{array}$$

$$= (e_1, \ldots, \lambda \cdot e_i, \ldots, e_n).$$

Haben:

$$E(n;\lambda;i) \cdot A = ZOp(\lambda;i)(A),$$
$$B \cdot E(n;\lambda;i) = SpOp(\lambda;i)(A),$$
$$E(n;\lambda;i)^{-1} = E(n;\lambda^{-1};i).$$

**Hermite-Normalform** $(R,\delta)$ eukl. Ring und $A \in Mat(m,n;R)$. Dann gibt es Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_b \in Mat(m,m;R)$, sodass $B := S_b \cdots S_1 \cdot A$ von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & * & \cdots & * & \boxtimes & * & \cdots & * & \boxtimes & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{2j_2} & * & \cdots & * & \boxtimes & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{rj_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $b_{ij_i} \neq 0_R$ gilt und weiter

$$\delta(b_{ij_l}) < \delta(b_{lj_l}) \text{ oder } b_{ij_l} = 0_R$$

für $l = 2, \ldots, r$ und $i = 1, \ldots, l-1$.

**Beweis** Reicht: $A$ durch ZOp auf gewünschte Form bringen.

**Schritt 1:** Suche kleinstes $j_1$ mit $A_{*j_1} \neq 0_R^m$.

Wähle $i_1$ mit $a_{i_1j_1} \neq 0_R$ und $\delta(a_{i_1j_1})$ minimal unter allen $\delta(a_{ij_1})$, $a_{ij_1} \neq 0_R$.

Nach $ZOp(1,i_1)$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{i_1j_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxtimes & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxtimes & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

**Schritt 2** Durch $ZOp(-q_i; 1, i)$ an $A'$:

$$\delta(\boxtimes) < \delta(a'_{1j_1}) \text{ oder } \boxtimes = 0_R$$

Verwende Div. mit Rest: $a'_{ij_1} = q_i a'_{1j_1} + r_i$.

Iterieren von 1 und 2 liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1*} \\ C \end{pmatrix}.$$

Weiter mit $C$ etc. bringt $A$ auf ZS-Form.

Justieren $b_{ij_l}$ mittels $ZOp(-q_{il}; l, i)$, wobei $b_{ij_l} = q_{il} b_{lj_l} + r_{il}$ (Div. mit Rest). $\square$

**Smith-Normalform** $(R,\delta)$ euklid. Ring und $A \in \mathrm{Mat}(m,n;R)$. Dann gibt es Elementarmatrizen $S_1,\ldots,S_k \in \mathrm{Mat}(m,m;R)$ und $T_1,\ldots,T_l \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$, sodass

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $D \in \mathrm{Mat}(r,r;R)$ Diagonalmatrix mit $d_{ii} \neq 0_R$ für $i = 1,\ldots,r$ und

$$d_{11} | d_{22},\ d_{22} | d_{33},\ \ldots,\ d_{r-1\,r-1} | d_{rr}.$$

**Beweis** Reicht: $A$ mittels $ZOp$ und $SpOp$ auf gewünschte Form zu bringen.

Falls $A = 0$: ✓. Sei $A \neq 0$. Verwenden konkretes Verfahren:

**Schritt 1** Mittels $ZOp(i,j)$ und $SpOp(i,j)$:

$$a_{11} \neq 0_R, \quad \delta(a_{11}) \leq \delta(a_{ij}) \text{ f. alle } i,j \text{ mit } a_{ij} \neq 0_R.$$

**Schritt 2** Mittels $ZOp(-q_i; 1, i)$:

$$\delta(a_{i1}) < \delta(a_{11}) \text{ oder } a_{i1} = 0_R \text{ für } i = 2,\ldots,m.$$

Verwende: $a_{i1} = q_i a_{11} + r_i$ (Div. mit Rest).

**Schritt 3** Mittels $SpOp(-q_j; 1, j)$:

$$\delta(a_{1j}) < \delta(a_{11}) \text{ oder } a_{1j} = 0_R \text{ für } j = 2,\ldots,n.$$

Verwende: $a_{1j} = q_j a_{11} + r_j$ (Div. mit Rest).

Falls $\delta(a_{11})$ nicht mehr minimal: 1, 2, 3 iterieren. Liefert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

wobei $\delta(a_{11}) \leq \delta(a_{ij})$ für alle $i,j$ mit $a_{ij} \neq 0_R$.

Falls $a_{11} | a_{ij}$ für alle $i,j$: Mit $*$ weitermachen.

Falls $a_{11} \nmid a_{ij}$: Div. mit Rest: $a_{ij} = q_{ij} a_{11} + r_{ij}$.

Dann: $SpOp(1; 1, j)$ und $ZOp(-q_{ij}; 1, i)$.

Führt zu neuem $a_{ij} = r_{ij}$ mit $\delta(a_{ij}) < \delta(a_{11})$.

Gesamtes Verfahren iterieren. □

**Folgerung** $R$ eukl. Ring, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;R)$. Dann äquivalent:

(i) $A \in \mathrm{Mat}(n,n;R)^*$.

(ii) $A$ ist Produkt von Elementarmatrizen.

__Satz__ $R$ euklid. Ring, $F$ endl. erz. freier $R$-Modul, $M \leq_R F$. Dann gibt es Basis $(v_1, \ldots, v_m)$ von $F$ und $a_1, \ldots, a_s \in R$ mit

(i) $(a_1 \cdot v_1, \ldots, a_s \cdot v_s)$ ist Basis von $M$.

(ii) $a_1 | a_2, a_2 | a_3, \ldots, a_{s-1} | a_s$.

__Lemma__ $R$ Int-Ring, $A \in Mat(m, n; R)$.

(i) Für jedes $T \in Mat(n,n;R)^*$ gilt

$$Lin(A_{*1}, \ldots, A_{*n}) = Lin((A \cdot T)_{*1}, \ldots, (A \cdot T)_{*n}).$$

(ii) Seien $S \in Mat(m,m;R)^*$, $T \in Mat(n,n;R)^*$ mit

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & a_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $a_i \neq 0_R$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist $(a_1 \cdot S^{-1} \cdot e_1, \ldots, a_r \cdot S^{-1} \cdot e_r)$ eine Basis für $Lin(A_{*1}, \ldots, A_{*n})$.

__Beweis__ Zu (i). Erhalten "$\supseteq$" mit

$$(A \cdot T)_{*j} = A \cdot T_{*j} = \begin{pmatrix} a_{11} t_{1j} + \ldots + a_{1n} t_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1} t_{1j} + \ldots + a_{mn} t_{nj} \end{pmatrix} = t_{1j} A_{*1} + \ldots + t_{nj} A_{*n}.$$

Zeigen "$\subseteq$". Haben

$$Lin(A_{*1}, \ldots, A_{*n}) = Lin((A \cdot T \cdot T^{-1})_{*1}, \ldots, (A \cdot T \cdot T^{-1})_{*n}) \overset{\text{s.o.}}{\subseteq} Lin((A \cdot T)_{*1}, \ldots, (A \cdot T)_{*n}).$$

Zu (ii). Offenbar ist $(a_1 \cdot e_1, \ldots, a_r \cdot e_r)$ Basis für $Lin((S \cdot A \cdot T)_{*1}, \ldots, (S \cdot A \cdot T)_{*n}) \overset{(i)}{=} Lin((S \cdot A)_{*1}, \ldots, (S \cdot A)_{*n})$.
Somit ist $(a_1 \cdot S^{-1} e_1, \ldots, a_r \cdot S^{-1} e_r)$ Basis für

$$S^{-1} \cdot Lin((S \cdot A)_{*1}, \ldots, (S \cdot A)_{*n}) = Lin(A_{*1}, \ldots, A_{*n}).$$

$\square$

__Beweis Satz__ OE: $F = R^m$. Wissen (Satz 3.2.13): $M$ frei mit Basis $(u_1, \ldots, u_n)$, wobei $n \leq m$. Betrachte

$$A := (u_1, \ldots, u_n) \in Mat(m, n; R).$$

Smith-NF: Es gibt $S \in Mat(m,m;R)^*$, $T \in Mat(n,n;R)^*$ mit

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & a_s & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 | a_2, \ldots, a_{s-1} | a_s$$

Setze $v_i := S^{-1} \cdot e_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Mit Lemma: $(v_1, \ldots, v_m)$ ist gewünschte Basis für $F = R^m$. $\square$

**Bemerkung** Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,3;\mathbb{Z}).$$

**Gesucht:** Matrizen

$$S \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{Z})^*, \quad T \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Z})^*$$

sodass $S \cdot A \cdot T$ in Smith-Normal-form.

**Idee:** $S = S_1 \cdots S_k$ und $T = T_1 \cdots T_l$, wobei $S_i$, $T_j$ Elementarmatrizen zu geeigneten ZOP und SpOp.

$$\begin{array}{cccc} & A & \text{Notizblock } S_i & \text{Notizblock } T_j \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \right. & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{\mathrm{ZOp}(-1;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \right. & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1;2,1)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \right. & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{\mathrm{SpOp}(1;1,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \right. & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{\mathrm{SpOp}(2;2,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & \text{SNF von } A & S & T \end{array}$$