Satz R euklid. Ring, M endl. erz. R-Modul.

Dann:

$$M \cong F \oplus T(M),$$

wobei $F \leq_R M$ frei und $T(M) \leq_R M$ Torsionsmodul. Weiter:

$$F \cong R^l, \qquad T(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle,$$

wobei $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0_R \neq a_1, \dots, a_m \in R \setminus R^*$ mit

$$a_1 | a_2, \ a_2 | a_3, \dots, a_{m-1} | a_m.$$

Dabei: l eind., $a_1, \dots, a_m$ bis auf Assoz. eind.

Lemma R k1-Ring, M_i, $i \in I$, R-Moduln, $N_i \leq_R M_i$. Dann:

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} M_i/N_i.$$

Beweis Hom-Satz:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus M_i \arrow[rr, "\varphi:\, (u_i) \mapsto (u_i+N_i)", "\text{surjektiv}"'] \arrow[dr, "(u_i) \mapsto (u_i)+(\bigoplus N_i)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigoplus M_i/N_i \\
& \left(\bigoplus M_i\right)/\left(\bigoplus N_i\right) \arrow[ur, "\cong"', "\overline{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

$\ker(\varphi) = \bigoplus N_i$

$\square$

Beweis Seien $u_1, \dots, u_n \in M$ Erzeugende für M. Haben surj. Hom.:

$$\pi: R^n \longrightarrow M, \quad (r_1, \dots, r_n) \mapsto r_1 \cdot u_1 + \dots + r_n \cdot u_n.$$

Setze $N := \ker(\pi) \leq_R R^n$. Hom-Satz:

$$M \cong R^n/N.$$

Wissen (4.1.8): Es gibt Basis $(v_1, \dots, v_n)$ für R^n und $0_R \neq a_1, \dots, a_s \in R$ mit

* $N = R \cdot a_1 v_1 \oplus \dots \oplus R \cdot a_s v_s$,
* $a_1 | a_2, \ a_2 | a_3, \dots, a_{s-1} | a_s$.

OE: $a_1, \dots, a_b$ die Einheiten unter den a_i. Dann:

$$M \cong R^n/N \underset{\text{Lemma}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{b} R/\langle a_i \rangle \oplus \bigoplus_{i=b+1}^{s} R/\langle a_i \rangle \oplus R^{n-s}$$

$$\cong \underbrace{R^{n-s}}_{\substack{\text{frei} \\ R^{n-s} \cong M/T(M)}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=b+1}^{s} R/\langle a_i \rangle}_{\cong T(M),\ \text{annuliert durch } a_{b+1} \cdots a_s}$$

Eind. von $l = n-s$ ✓. Eind. von $a_1, \dots, a_m$: 3.4.11. $\square$

Definition R Int-Ring, M R-Modul, $p \in R$ prim.

(i) $v \in M$ *p-Torsionselement*, falls $p^n \cdot v = 0_M$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(ii) *p-Torsionsmodul* von M:

$$M_p := \{v \in M;\ v \text{ p-Tors-El.}\} \leq_R M.$$

(iii) M *p-Torsionsmodul*, falls $M = M_p$.

Satz R euklid. Ring, $P \subset R$ Primsystem und M endl. erz. R-Modul. Dann:

$$M \cong F \oplus \bigoplus_{p \in P} M_p$$

wobei $F \leq_R M$ frei, $T(M) = \oplus M_p$, nur endl. viele $M_p \neq \{0_M\}$ und für $M_p \neq \{0_M\}$:

$$M_p = \bigoplus_{i=1}^{d(p)} R/\langle p^{\nu_{p,i}} \rangle$$

mit $1 \leq \nu_{p,1} \leq \dots \leq \nu_{p,d(p)}$. Dabei sind $d(p)$ und die $\nu_{p,i}$ eindeutig.

Lemma R euklid. Ring, $p, q \in R$ prim, $p \nmid q$. Weiter $\overline{a} \in R/\langle q^\mu \rangle$. Dann, für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\overline{a} \neq 0_{R/\langle q^\mu \rangle} \implies p^\nu \cdot \overline{a} \neq 0_{R/\langle q^\mu \rangle}.$$

Beweis Haben $\overline{a} = a + \langle q^\mu \rangle$ mit $a \in R$. Damit

$$p^\nu \cdot \overline{a} = 0_{R/\langle q^\mu \rangle} \Rightarrow p^\nu a \in \langle q^\mu \rangle \overset{p \nmid q}{\Rightarrow} a \in \langle q^\mu \rangle \ \lightning \quad \square$$

Beweis Satz Wissen bereits:

$$M \cong F \oplus T(M), \quad T(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle$$

wobei $0_R \neq a_i \in R \setminus R^*$ mit $a_1 | a_2, \dots, a_{m-1} | a_m$.

Betr. Primfaktorzerlegung:

$$a_i = c_i \prod_{p \in P} p^{\nu(p,i)}, \quad c_i \in R^*, \ \nu(p,i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Chinesischer Restsatz:

$$R/\langle a_i \rangle \cong \bigoplus_{p \in P} R/\langle p^{\nu(p,i)} \rangle.$$

Damit

$$\bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \Big(\bigoplus_{p \in P} R/\langle p^{\nu(p,i)} \rangle \Big)$$

$$\left.\begin{matrix}\text{umsortieren}\\ \text{umbenennen}\end{matrix}\right\} \to \cong \bigoplus_{p \in P} \Big(\bigoplus_{i=1}^{d(p)} R/\langle p^{\nu_{p,i}} \rangle \Big)$$

wobei stets $1 \leq \nu_{p,1} \leq \dots \leq \nu_{p,d(p)}$. Lemma:

$$\bigoplus_{i=1}^{d(p)} R/\langle p^{\nu_{p,i}} \rangle \cong M_p.$$

Eindeutigkeit der $\nu_{p,i}$: Satz 3.4.11. $\square$

Definition Eine abelsche Gruppe heisst *endlich erzeugt*, falls sie als $\mathbb{Z}$-Modul endl. erz. ist.

Satz Sei G endl. erz. abelsche Gruppe. Dann hat G eine eind. Darstellung

$$G \cong \mathbb{Z}^d \times \prod_{p\in P}\left[\prod_{i=1}^{d(p)} \mathbb{Z}/p^{\nu_{p,i}}\mathbb{Z}\right],$$

wobei $P \subset \mathbb{Z}$ Menge der Primzahlen, $d(p) > 0$ höchstens endl. oft, dann $1 \leq \nu_{p,1} \leq \dots \leq \nu_{p,d(p)}$.

Beispiel Haben ab. Gruppen der Ordnung 32:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Definition R euklid. Ring, M endl. erz. R-Modul, $T(M) \leq_R M$ zugeh. Torsionsmodul.

(i) *Elementarteiler* für M: $a_1, \dots, a_m \in R$ mit $0_R \neq a_i \in R^*$, $a_1 | a_2, \dots, a_{m-1} | a_m$ und

$$T(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle.$$

(ii) *Primäre Elementarteiler* für M: $p_i^{\nu_{ij}}$ mit $p_1, \dots, p_r \in R$ pw. nichtassoz. Primelemente, $1 \leq \nu_{i1} \leq \dots \leq \nu_{id_i}$ sodass

$$T(M) = \bigoplus_{i=1}^{r}\left(\bigoplus_{j=1}^{d_i} R/\langle p_i^{\nu_{ij}} \rangle\right).$$

Beispiel Betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul

$$M := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Gesucht: Elementarteiler und primäre Elementarteiler. Chinesischer Restsatz:

$$M \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

$$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Also, prim. El-Teiler: $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $3 = 3^1$.

Für El-Teiler: Primäre El-Teiler anordnen:

$p = 2$:	2	4	rechtsbündig
$p = 3$:		3	
	2	12	aufmultiplizieren

Dann: $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ El-Teiler für M. Insbes.:

$$M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$