Erinnerung $\mathbb{K}$ körper, V $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Dann: V $\mathbb{K}[T]$-Modul durch

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot v := \sum a_\nu \varphi^\nu(v).$$

Falls $V = \mathbb{K}^n$ und $\varphi(v) = A \cdot v$ mit $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$:

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot v = \left(\sum a_\nu \cdot A^\nu\right) \cdot v$$

Definition R k1-Ring, M R-Modul. Annulatorideal von M:

$$\mathfrak{a}_M := \{a \in R;\ a \cdot v = 0_V \text{ für alle } v \in M\}$$
$$\leq_R R.$$

Satz $\mathbb{K}$ körper, V endl. dim $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ Lineare Abb.. Dann:

$$\mathfrak{a}_V = \{f \in \mathbb{K}[T];\ f \cdot V = \{0_V\}\} = \langle q_\varphi \rangle$$

mit einem eind. best. normierten Pol. $q_\varphi \in \mathbb{K}[T]$. Dabei $q_\varphi \neq 0_{\mathbb{K}[T]}$ und $\deg(q_\varphi) > 0$ sobald $V \neq \{0_V\}$.

Beweis Zeigen $\mathfrak{a}_V \neq \{0_{\mathbb{K}[T]}\}$. Betrachte

$$\varepsilon: \mathbb{K}[T] \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V), \quad \sum a_\nu T^\nu \mapsto \sum a_\nu \varphi^\nu.$$

Dann: ε lineare Abb. von $\mathbb{K}$-VR. Haben:

$$\mathrm{kern}(\varepsilon) = \{f \in \mathbb{K}[T];\ \sum a_\nu \varphi^\nu = 0_{\mathrm{Hom}(V,V)}\}$$
$$= \mathfrak{a}_V.$$

Angenommen $\mathfrak{a}_V = \{0_{\mathbb{K}[T]}\}$. Dann ε injektiv. Somit

$$\infty = \dim(\mathbb{K}[T]) \leq \dim(\mathrm{Hom}(V,V)) = \dim(V)^2 \ \lightning$$

Also: $\mathfrak{a}_V \neq \{0_{\mathbb{K}[T]}\}$. Wegen $\mathbb{K}[T]$ HIR:

$$\mathfrak{a}_V = \langle q_\varphi \rangle$$

mit $0_{\mathbb{K}[T]} \neq q_\varphi \in \mathbb{K}[T]$. OE q_φ normiert.

Eindeutigkeit: Sei $\langle q_\varphi \rangle = \langle p \rangle$ mit $p \in \mathbb{K}[T]$ normiert. Dann $q_\varphi \sim p$. Somit $q_\varphi = p$.

Zeigen: $\deg(q_\varphi) > 0$ falls $V \neq \{0_V\}$. Wissen: $\deg(q_\varphi) \geq 0$. Angenommen, $\deg(q_\varphi) = 0$. Dann, für alle $v \in V$:

$$0_V = q_\varphi \cdot v = T^0 \cdot v = v \quad \lightning \text{ zu } V \neq \{0_V\}. \quad \square$$

Folgerung V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Dann ist V ein $\mathbb{K}[T]$-Torsionsmodul.

__Definition__ V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Minimalpolynom von φ: Das normierte $q_\varphi \in \mathbb{k}[T]$ mit $\mathfrak{a}_V = \langle q_\varphi \rangle$.

__Beispiel__ Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto A \cdot v,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Betrachte $T-\lambda \in \mathbb{R}[T]$. Dann: $T-\lambda$ normiert. Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$:

$$(T-\lambda) \cdot v = (\varphi^1 - \lambda \cdot \varphi^0)(v)$$
$$= (A^1 - \lambda \cdot A^0) \cdot v$$
$$= (A - \lambda \cdot E_2) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit $T-\lambda \in \mathfrak{a}_V$. Folglich $q_\varphi \mid T-\lambda$. Wegen $\deg(q_\varphi) > 0$ und q_φ normiert:

$$q_\varphi = T - \lambda.$$

__Beispiel__ Betrachte die lineare Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto B \cdot v$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Suchen q_ψ. Testen $T-\lambda' \in \mathbb{R}[T]$:

$$(T-\lambda') \cdot v = (B^1 - \lambda' \cdot E_2) \cdot v$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda-\lambda' & 0 \\ 1 & \lambda-\lambda' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda')v_1 \\ v_1 + (\lambda-\lambda')v_2 \end{pmatrix}$$

Insbes.: $(T-\lambda') \cdot v \neq (0,0)$ für $v = (1,0)$. Folglich $\deg(q_\psi) \geq 2$. Haben

$$(T-\lambda)^2 \cdot v = (B - \lambda \cdot E_2)^2 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $q_\psi \mid (T-\lambda)^2$ und $\deg(q_\psi) \geq 2$:

$$q_\psi = (T-\lambda)^2 = T^2 - 2\lambda T + \lambda^2.$$

Definition V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Nenne V *φ-zyklisch*, falls $v \in V$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt, sodass

$$\left(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{k-1}(v)\right)$$

eine Basis für V ist.

Bemerkung V eindim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear. Dann, für jedes $0_V \neq v \in V$:

$$(v) = (\varphi^0(v))$$

Basis für V. Insbes. V φ-zyklisch: Jedes $v \neq 0_V$ und $k = 1$ tun's.

Beispiel Betrachte $V := \mathbb{R}^2$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Für $\varphi: v \mapsto A \cdot v$ ist V nicht φ-zyklisch, denn $\varphi(v) \in \mathbb{R} \cdot v$ für jedes $v \in V$.

Für $\psi: v \to B \cdot v$ ist V φ-zyklisch: Mit $v := (1,0)$ und $k = 2$ haben wir

$$v = \psi^0(v) = E_2 v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^{k-1}(v) = \psi(v) = B \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit $(v, \psi(v))$ Basis für $V = \mathbb{R}^2$.

Satz Seien V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR und $\varphi: V \to V$ lineare Abb.. Dann sind äquivalent:

(i) V ist φ-zyklisch.

(ii) Es gibt normiertes $q \in \mathbb{k}[T]$ und Iso. von $\mathbb{k}[T]$-Moduln

$$V \cong \mathbb{k}[T]/\langle q \rangle.$$

Gilt (i) oder (ii), so ist q das Minimalpolynom von φ und man hat

$$\deg(q) = \dim(V).$$

__Lemma__ R k1-Ring, M R-Modul. Dann äquiv.:

(i) M monogen, d.h., $M = R\cdot v$ mit $v \in M$.

(ii) Es gibt Iso $M \cong R/\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \leq_R R$.

Gilt (ii), so hat man $\mathfrak{b} = \mathrm{an}_M$.

__Beweis__ Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Haben surj. Hom von R-Mod.:

$$\varepsilon : R \longrightarrow M, \quad r \mapsto r\cdot v.$$

Dabei:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = 0_M &\iff r\cdot v = 0_M \\ &\iff r\cdot(r'\cdot v) = 0_M \text{ f. alle } r' \in R \\ &\iff r\cdot v' = 0_M \text{ f. alle } v' \in V. \end{aligned}$$

Somit $\mathrm{kern}(\varepsilon) = \mathrm{an}_M$. Homsatz:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "r \mapsto r + \mathrm{an}_M"'] & \arrow[d, phantom, "G"] & M \\ & R/\mathrm{an}_M \arrow[ur, "\cong"', "r + \mathrm{an}_M \mapsto \varepsilon(r)"] & \end{tikzcd}$$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Sei $\varphi : R/\mathfrak{b} \to M$ Iso. Betr.:

$$v := \varphi(1_R + \mathfrak{b}) \in M$$

Dann:

$$R\cdot v = \varphi(R\cdot(1_R + \mathfrak{b})) = \varphi(R/\mathfrak{b}) = M.$$

Zusatz: Sei $\varphi : R/\mathfrak{b} \to M$ Isomorphismus.

Zeigen "$\mathrm{an}_M \leq \mathfrak{b}$". Sei $r \in \mathrm{an}_M$. Dann:

$$0_M = r\cdot\varphi(1_R + \mathfrak{b}) = \varphi(r + \mathfrak{b})$$

Wegen φ injektiv: $r \in \mathfrak{b}$.

Zeigen "$\mathrm{an}_M \geq \mathfrak{b}$". Sei $r \in \mathfrak{b}$. Dann, für alle $v \in M$:

$$r\cdot v = r\cdot(\varphi(\varphi^{-1}(v)) = \varphi(r\cdot\varphi^{-1}(v)) = \varphi(0_{R/\mathfrak{b}}) = 0_M. \quad \square$$

__Lemma__ $\mathbb{k}$ Körper, $q \in \mathbb{k}[T]$, $q \neq 0_{\mathbb{k}[T]}$. Dann hat man zueinander inverse Isos von $\mathbb{k}$-VR:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\nu=0}^{\deg(q)-1} \mathbb{k}\cdot T^\nu &\longleftrightarrow \mathbb{k}[T]/\langle q\rangle \\ f &\mapsto f + \langle q\rangle \\ r_f &\leftarrow\!\shortmid f + \langle q\rangle, \end{aligned}$$

wobei r_f definiert durch $f = g_f\cdot q + r_f$ mit $r_f = 0_{\mathbb{k}[T]}$ oder $\deg(r_f) < \deg(q)$.

__Beweis__ klar: $f \mapsto f + \langle q\rangle$ lin. Abb. Weiter:

* $f = r_f$ für $f \in \bigoplus_{\nu=0}^{\deg(q)-1} \mathbb{k}\cdot T^\nu$

* $f - r_f \in \langle q\rangle$, d.h., $f + \langle q\rangle = r_f + \langle q\rangle$.

Folglich "$\mapsto$" und "$\leftarrow\!\shortmid$" invers zueinander. $\square$

__Satz__ V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb.. Dann äquivalent:

(i) V ist φ-zyklisch, d.h., es gibt Basis der Form $(v, \varphi(v), \dots, \varphi^{k-1}(v))$ für V.

(ii) Es gibt normiertes $q \in \mathbb{k}[T]$ und Iso. von $\mathbb{k}[T]$-Moduln

$$V \cong \mathbb{k}[T]/\langle q \rangle .$$

Gilt (i) oder (ii), so ist q das Minimalpolynom von φ, und man hat $\deg(q) = \dim(V)$.

__Beweis__ Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Lemma: Reicht, zu zeigen, dass V monogener $\mathbb{k}[T]$-Modul.

Wähle Basis der Form $(v, \varphi(v), \dots, \varphi^{k-1}(v))$ für V.

Dann hat jedes $w \in V$ eine Darstellung

$$w = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \cdot \varphi^\nu(v) = \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu T^\nu \right) \cdot v$$

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Setze $k := \deg(q)$. Zweites Lemma: Haben Iso. von $\mathbb{k}$-VR:

$$\mathbb{k}[T]/\langle q \rangle \cong \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{k}\, T^i .$$

Somit Basis $(w_0, \dots, w_{k-1})$ für den $\mathbb{k}$-VR $\mathbb{k}[T]/\langle q \rangle$ durch

$$w_i := T^i + \langle q \rangle = T^i \cdot w_0$$

Sei $\iota: \mathbb{k}[T]/\langle q \rangle \to V$ Iso von $\mathbb{k}[T]$-Moduln. Dann, mit $v := \iota(w_0)$:

$$\iota(w_i) = \iota(T^i \cdot w_0) = T^i \cdot \iota(w_0) = T^i \cdot v = \varphi^i(v).$$

Klar: ι auch Iso. von $\mathbb{k}$-VR. Insbesondere ist $(v, \varphi(v), \dots, \varphi^{k-1}(v))$ Basis für V.

Zusatz: Erstes Lemma: $\langle q \rangle = \mathfrak{a}_v$. Wegen q normiert: q Minimalpolynom von φ.

Zweites Lemma: $\deg(q) = \dim(V)$. $\square$