Bemerkung $\mathbb{k}$ Körper, V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abbildung.

Ziel: φ gut verstehen. **Idee:** V in möglichst einfache Bausteine zerlegen, d.h.:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r, \quad V_i \leq_{\mathbb{k}} V, \quad \varphi(V_i) \subseteq V_i$$

Dann $\varphi|_{V_i}: V_i \to V_i$ gut verstehen. **Zugang:** $\mathbb{k}[T]$-Modulstruktur auf V:

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot v = \sum a_\nu \varphi^\nu(v).$$

Erinnerung R euklid. Ring, M endl. erz. Torsionsmodul über R. Dann:

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} R/\langle a_i \rangle$$

mit den Elementarteilern $a_1, \dots, a_m \in R$ von M. Dabei $0_R \neq a_i \notin R^*$, $a_1 | a_2, \dots, a_{m-1} | a_m$, a_i eind. bis auf Assoz.

Definition V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear. Elementarteiler von φ: normierte Elementarteiler des zugeh. $\mathbb{k}[T]$-Moduls V.

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi, \psi: V \to V$ lin. Abb. Dann äquivalent:

(i) φ, ψ haben dieselben Elementarteiler.

(ii) φ, ψ definieren isomorphe $\mathbb{k}[T]$-Moduln.

(iii) Es gibt $\mathbb{k}$-VR-Iso $\varkappa: V \to V$ mit $\psi = \varkappa \circ \varphi \circ \varkappa^{-1}$.

Beweis "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)": Hauptsatz über endl. erz. Mod. über euklid. Ringen.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (iii)". Sei $\varkappa: V \to V$ Iso von $\mathbb{k}[T]$-Moduln. Dann:

$$\varkappa(\varphi(v)) = \varkappa(T \cdot v) = T \cdot \varkappa(v) = \psi(\varkappa(v)).$$

Also $\psi = \varkappa \circ \varphi \circ \varkappa^{-1}$. Klar: $\varkappa$ Iso von $\mathbb{k}$-VR.

Zu "(iii) $\Rightarrow$ (ii)". Zeigen: $\varkappa$ sogar Iso von $\mathbb{k}[T]$-Moduln. Haben

$$\begin{aligned}
\varkappa\left(\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \underset{\varphi}{\cdot} v\right) &= \varkappa\left(\sum a_\nu \varphi^\nu(v)\right) \\
&= \varkappa\left(\sum a_\nu (\varkappa^{-1} \circ \psi \circ \varkappa)^\nu (v)\right) \\
&= \varkappa\left(\sum a_\nu \varkappa^{-1} \circ \psi^\nu \circ \varkappa(v)\right) \\
&= \sum a_\nu \psi^\nu(\varkappa(v)) \\
&= \left(\sum a_\nu T^\nu\right) \underset{\psi}{\cdot} \varkappa(v).
\end{aligned}$$

$\square$

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. mit Elementarteilern $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{k}[T]$.

Dann:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r, \quad V_i \leq_{\mathbb{k}} V,$$

sodass $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, $\dim(V_i) = \deg(q_i)$ und für $\varphi_i := \varphi|_{V_i}: V_i \to V_i$ gilt:

(i) Jedes V_i ist φ_i-zyklisch.

(ii) q_i ist Minimalpolynom von $\varphi_i: V_i \to V_i$

(iii) q_r ist Minimalpolynom von $\varphi: V \to V$.

Beweis Betrachte die durch $\varphi: V \to V$ def. $\mathbb{k}[T]$-Modulstruktur auf V.

Wissen: V ist Torsionsmodul. Hauptsatz liefert Iso. von $\mathbb{k}[T]$-Moduln:

$$\Phi: \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle \longrightarrow V,$$

wobei $q_1, \dots, q_r$ die EL-teiler. Setze:

$$V_i := \Phi(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ter Summand}}}{\mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle}) \leq_{\mathbb{k}[T]} V.$$

Dann: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ als $\mathbb{k}[T]$-Mod., ebenso als $\mathbb{k}$-VR. Haben:

$$\begin{aligned}\varphi(V_i) = T \cdot V_i &= T \cdot \Phi(\mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle) \\ &= \Phi(T \cdot (\mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle)) \\ &\subseteq \Phi(\mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle) = V_i\end{aligned}$$

Wissen: $V_i \cong \mathbb{k}[T]/\langle q_i \rangle$ ist φ_i-zyklisch mit Minimalpolynom q_i für φ_i.

Zeigen: q_r ist Minimalpolynom für φ.

Haben für $v = v_1 + \dots + v_r \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$:

$$\begin{aligned} q_r \cdot v &= q_r \cdot (v_1 + \dots + v_r) = q_r \cdot v_1 + \dots + q_r \cdot v_r \\ \underset{q_i | q_r}{\overset{\text{verwende}}{=}} &\; p_1 q_1 \cdot v_1 + \dots + p_r \cdot q_r \cdot v_r = 0_V.\end{aligned}$$

Folglich $q_r \in \mathfrak{a}_V = \langle q_\varphi \rangle$. Somit $q_\varphi | q_r$.

Weiter, für $v_r \in V_r$:

$$q_\varphi \cdot v_r = 0_V \implies q_\varphi \in \mathfrak{a}_{V_r} = \langle q_r \rangle$$
$$\implies q_r | q_\varphi$$

Also $q_\varphi \sim q_r$. Beide normiert $\implies q_\varphi = q_r$. $\square$

Definition Sei $q = T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{k}[T]$.
Zugehörige Begleitmatrix:

$$B(q) := \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(k,k;\mathbb{k})$$

Beispiel Betrachte $q = T^2 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$.
Begleitmatrix:

$$B(q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear mit El-Teilern $q_1, \ldots, q_r$. Dann gibt es Basis $\mathcal{B}$ für V mit

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} B(q_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(q_r) \end{pmatrix}.$$

Beweis Vorüberlegung: Sei V φ-zyklisch mit Minimalpolynom

$$q_\varphi = T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0.$$

Dann hat V Basis der Form

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\varphi = (v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v)),$$

wobei $v \in V$. Haben dabei:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{k-1}(v)) &= \varphi^k(v) \\ &= T^k \cdot v \\ &= (q_\varphi - a_{k-1}T^{k-1} - \ldots - a_0) \cdot v \\ &= -a_{k-1}\varphi^{k-1}(v) - \ldots - a_0 \cdot v \end{aligned}$$

Somit, darstellende Matrix:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (x_{\mathcal{B}}(\varphi(v)), \ldots, x_{\mathcal{B}}(\varphi^k(v))) = B(q_\varphi).$$

Zurück zum Satz. Wissen

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, \quad V_i \leq_{\mathbb{k}} V, \quad \varphi(V_i) \subseteq V_i$$

sodass V_i φ_i-zyklisch für $\varphi_i := \varphi|_{V_i}: V_i \to V_i$ und $q_{\varphi_i} = q_i$. Also, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{B}_{\varphi_r})$ tut's. $\square$

Erinnerung V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR. Charakteristisches Polynom einer lin. Abb. $\varphi: V \to V$:

$$P_\varphi := \det(T \cdot E_n - \mathcal{M}_B^B(\varphi)) \in \mathbb{k}[T],$$

wobei $n = \dim(V)$ und B bel. Basis von V.

Satz von Cayley-Hamilton V endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ linear mit EL-Teilern $q_1, \ldots, q_r$. Dann:

$$P_\varphi = q_1 \cdots q_r$$

Insbes.: $P_\varphi \in \mathfrak{a}_V = \langle q_\varphi \rangle = \langle q_r \rangle$. Weiter haben P_φ und $q_\varphi = q_r$ dieselben Primteiler.

Beweis Wissen: V hat Basis B, sodass

$$\mathcal{M}_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} B(q_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(q_r) \end{pmatrix}.$$

Damit:

$$P_\varphi = \det(T \cdot E_n - \mathcal{M}_B^B(\varphi))$$
$$= \det(T \cdot E_{n_1} - B(q_1)) \cdots \det(T \cdot E_{n_r} - B(q_r)),$$

wobei $n_i = \deg(q_i)$ und $n = n_1 + \ldots + n_r$. Betr.:

$$q_i = T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0, \quad k = n_i.$$

und

$$T \cdot E_{n_i} - B(q_i) = \begin{pmatrix} T & & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & T + a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Berechnen $\det(T \cdot E_{n_i} - B(q_i))$ mittels Entwicklung nach der letzten Spalte:

$$\det(T \cdot E_{n_i} - B(q_i)) = (-1)^{1+k} \cdot a_0 \cdot (-1)^{k-1}$$
$$+ (-1)^{2+k} \cdot a_1 \cdot T \cdot (-1)^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$+ (-1)^{k-1+k} \cdot a_{k-2} \cdot T^{k-2} \cdot (-1)$$
$$+ (-1)^{k+k} \cdot (T + a_{k-1}) \cdot T^{k-1}$$
$$= T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0$$
$$= q_i.$$

Folglich $P_\varphi = q_1 \cdots q_r$. $\square$

Definition $\mathbb{k}$ Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. *Elementarteiler* von A: Elementarteiler $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{k}[T]$ von

$$\mu_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

Rationale Normalform $\mathbb{k}$ Körper.

(i) Besitzt $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$ die El-Teiler $q_1, \ldots, q_r$, so gibt es $S \in GL(n;\mathbb{k})$ mit

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} B(q_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(q_r) \end{pmatrix}.$$

(ii) Für $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$ sind äq.:

(*) $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ mit $S \in GL(n;\mathbb{k})$

(**) A, B haben dieselben El-Teiler.

Beweis Zu (i). Betrachte lin. Abb.

$$\mu_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

Wissen: $\mathbb{k}^n$ hat Basis $\mathcal{B}$ mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A) = \begin{pmatrix} B(q_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(q_r) \end{pmatrix}$$

Transformationsformel: Es gibt $S \in GL(n;\mathbb{k})$ mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A) = S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Zu (ii). Betrachte $\varphi := \mu_A$, $\psi := \mu_B$. Dann:

φ, ψ selbe ET $\iff$ $\psi = \varkappa \circ \varphi \circ \varkappa^{-1}$ mit einem Iso $\varkappa : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$

$\iff$ $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ mit einem $S \in GL(n;\mathbb{k})$. $\square$