Bemerkung $V$ endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb.. $\mathbb{k}[T]$-Modulstruktur auf $V$:

$$\left(\sum a_\nu T^\nu\right) \cdot v = \sum a_\nu \varphi^\nu(v).$$

Bislang: Elementarteiler liefern rationale Normalform.

Jetzt: Primäre Elementarteiler liefern Jordansche Normalform z.B. für $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Erinnerung $R$ euklidischer Ring, $P \subset R$ Primsystem und $M$ endl. erz. Torsionsmodul über $R$.

Dann hat man eind. Darstellungen

$$M = \bigoplus_{p \in P} M_p$$

mit den $p$-Torsionsmod. $M_p \leq_R M$ und

$$M_p \cong \bigoplus_{i=1}^{d(p)} R/\langle p^{\nu_{p,i}} \rangle, \quad 1 \leq \nu_{p,1} \leq \ldots \leq \nu_{p,d(p)}$$

mit primären Elementarteilern $p_i^{\nu_{p,i}} \in R$ für $M$.

Definition $V$ endl. dim. $\mathbb{k}$-VR. Die primären El-Teiler einer lin. Abb. $\varphi: V \to V$ sind die normierten primären El-Teiler $p_i^{\nu_i} \in \mathbb{k}[T]$ des zugeh. $\mathbb{k}[T]$-Moduls $V$.

**Satz** Seien $V$ endl. dim. $\mathbb{K}$-VR und $\varphi: V \to V$ lineare Abb. mit den primären Elementarteilern $p_i^{\nu_{ij}} \in \mathbb{K}[T]$, $1 \le i \le r$, $1 \le \nu_{i1} \le \ldots \le \nu_{id_i}$.
Dann:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, \qquad V_i = V_{i1} \oplus \ldots \oplus V_{id_i}$$

mit $V_{ij} \le_{V_2} V_i \le_{V_2} V$, sodass stets

$$\varphi(V_{ij}) \subseteq V_{ij}, \quad \dim(V_{ij}) = \deg(p_i^{\nu_{ij}})$$

und für $\varphi_{ij} := \varphi|_{V_{ij}}: V_{ij} \to V_{ij}$ und $\varphi_i := \varphi|_{V_i}: V_i \to V_i$ gilt:

(i) $V_{ij}$ ist $\varphi_{ij}$-zyklisch,

(ii) $p_i^{\nu_{ij}}$ ist das Minpol. von $\varphi_{ij}$,

(iii) $p_i^{\nu_{id_i}}$ ist das Minpol. von $\varphi_i$,

(iv) $V_i = \operatorname{kern}(p_i^{\nu_{id_i}}(\varphi))$,

(v) $p_1^{\nu_{1d_1}} \cdots p_r^{\nu_{rd_r}}$ ist das Minpol von $\varphi$.

**Beweis** $V$ ist $\mathbb{K}[T]$-Torsionsmodul und man hat Iso von $\mathbb{K}[T]$-Moduln

$$\Phi: \bigoplus_{i=1}^{r} \left( \bigoplus_{j=1}^{d_i} \mathbb{K}[T]/\langle p_i^{\nu_{ij}} \rangle \right) \longrightarrow V.$$

wobei $p_i^{\nu_{ij}}$ die primären El-Teiler von $\varphi$. Setze

$$V_i := \Phi\left( \bigoplus_{j=1}^{d_i} \mathbb{K}[T]/\langle p_i^{\nu_{ij}} \rangle \right) \le_{\mathbb{K}[T]} V,$$

$$V_{ij} := \Phi\left( \mathbb{K}[T]/\langle p_i^{\nu_{ij}} \rangle \right) \le_{\mathbb{K}[T]} V_i.$$

Dann:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, \quad V_i = V_{i1} \oplus \ldots \oplus V_{id_i}$$

Weiter: $V_{ij}$ $\varphi_{ij}$-zyklisch mit Minpol $p_i^{\nu_{ij}}$ und $\dim(V_{ij}) = \deg(p_i^{\nu_{ij}})$, s. Satz 5.1.10.

Zu (iii): $p_i^{\nu_{id_i}} \cdot V_i = \{0_V\} \Rightarrow p_i^{\nu_{id_i}} \in \langle q_{V_i} \rangle$,

$$q_{V_i} \cdot V_{id_i} = \{0_V\} \Rightarrow q_{V_i} \in \langle p_i^{\nu_{id_i}} \rangle.$$

Zu (iv): $V_i$ ist $p_i$-Torsionsmod. von $V$. Also

$$V_i = \{v \in V;\ p_i^n \cdot v = 0_V \text{ für ein } n\}$$
$$= \{v \in V;\ p_i^{\nu_{id_i}} \cdot v = 0_V\} = \operatorname{kern}(p_i^{\nu_{id_i}}).$$

Zu (v): klar: $p = p_1^{\nu_{1d_1}} \cdots p_r^{\nu_{rd_r}} \in \mathfrak{a}_V = \langle q_\varphi \rangle$.
Somit $q_\varphi \mid p$.

Weiter: $q_\varphi \in \mathfrak{a}_{V_i} \Rightarrow p_i^{\nu_{id_i}} \mid q_\varphi$. Also $p = q_\varphi$. $\square$

**Satz** $V$ endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lin. Abb. mit den primären El-Teilern

$$p_i^{\nu_{ij}} \in \mathbb{k}[T], \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq \nu_{ij} \leq \nu_{id_i}.$$

Dann besitzt $V$ Basis $\mathcal{B}$, sodass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} B(p_i^{\nu_{i1}}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(p_i^{\nu_{id_i}}) \end{pmatrix}.$$

**Beweis** Wissen: $V$ hat direkte Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i, \quad V_i = \bigoplus_{j=1}^{d_i} V_{ij}$$

wobei $V_{ij} \leq_{\mathbb{k}} V_i \leq_{\mathbb{k}} V$ mit $\varphi(V_{ij}) \subseteq V_{ij}$ sodass

* $V_{ij}$ ist $\varphi_{ij}$-zyklisch für $\varphi_{ij} := \varphi|V_{ij}$,
* $\varphi_{ij}$ hat Minpol $p_i^{\nu_{ij}}$.

Wissen weiter: Jedes $V_{ij}$ hat Basis $B_{ij}$ sodass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_{ij}) = B(p_i^{\nu_{ij}}).$$

Jetzt: $B_{ij}$ zu Basis $\mathcal{B}$ zusammensetzen. $\square$

**Folgerung** $V$ endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi: V \to V$ lineare Abb. Dann äquivalent:

(i) $\varphi$ ist diagonalisierbar

(ii) $q_\varphi = (T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_r)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

**Beweis** Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Haben char. Polynom

$$P_\varphi = (T-\lambda_1)^{n_1} \cdots (T-\lambda_r)^{n_r}.$$

Weiter: $(T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_r) \in \mathfrak{a}_V$. Mit Satz von Cayley-Hamilton: $q_\varphi = (T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_r)$.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Haben

$$\begin{aligned} (T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_r) &= q_\varphi \\ &= p_1^{\nu_{1d_1}} \cdots p_r^{\nu_{rd_r}} \end{aligned}$$

Somit stets $p_i^{\nu_{ij}} = (T-\lambda_i)$ und $B(p_i^{\nu_{ij}}) = (\lambda_i)$. $\square$

**Folgerung** $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. Dann äquivalent:

(i) Es gibt $S \in GL(n;\mathbb{k})$ sodass $SAS^{-1}$ Diagonalmatrix

(ii) $q_A := q_{\mu_A} = (T-\lambda_1) \cdots (T-\lambda_r)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

**Definition** $\mathbb{k}$ Körper, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\lambda \in \mathbb{k}$.

Jordankästchen:

$$J(n,\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{k}).$$

**Satz** $V$ endl. dim. $\mathbb{k}$-VR, $\varphi$-zyklisch für $\varphi: V \to V$ mit Minpol.

$$q_\varphi = q^n = (T-\lambda)^n, \quad q := T - \lambda.$$

Weiter sei $v \in V$ mit

$$q^{n-1} \cdot v = (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{n-1}(v) \neq 0_V.$$

Dann: $\mathcal{B} = (v, q \cdot v, \ldots, q^{n-1} \cdot v)$ Basis für $V$ mit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = J(n, \lambda).$$

**Beweis** Wissen:

$V$ $\varphi$-zykl. $\Rightarrow \dim(V) = \deg(q_\varphi) = n$.

Zeigen: $\mathcal{B}$ ist linear unabh. Sei

$$(*) \quad 0_V = a_0 \cdot v + a_1 \cdot q \cdot v + \ldots + a_{n-1} \cdot q^{n-1} \cdot v.$$

Mult. $(*)$ mit $q^{n-1}$: $\quad a_0 \cdot q^{n-1} \cdot v = 0_V \Rightarrow a_0 = 0_{\mathbb{k}}$.

" " " $q^{n-2}$: $\quad a_1 q^{n-1} \cdot v = 0_V \Rightarrow a_1 = 0_{\mathbb{k}}$

Usw. liefert $\mathcal{B}$ l.u.. Somit $\mathcal{B}$ Basis.

Bestimmen $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Für $i = 0, \ldots, n-2$:

$$q^{i+1} \cdot v = q \cdot q^i \cdot v = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(q^i \cdot v)$$

Somit

$$\varphi(q^i \cdot v) = \lambda \cdot q^i \cdot v + q^{i+1} \cdot v.$$

Für $i = n-1$:

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(q^{n-1} \cdot v) = q^n \cdot v = 0_V$$

Also

$$\varphi(q^{n-1} \cdot v) = \lambda \cdot q^{n-1} \cdot v. \qquad \square$$

**Satz** $V$ endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\varphi: V \to V$ lin. Abb., sodass

$$q_\varphi = (T-\lambda_1)^{m_1} \cdots (T-\lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j.$$

Dann besitzt $V$ Basis $\mathcal{B}$ mit

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J(k_{i1}, \lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(k_{id_i}, \lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Dabei: $1 \le k_{i1} \le \dots \le k_{id_i} = m_i$. Weiter sind $(T-\lambda_i)^{k_{ij}}$ die primären El-Teiler von $\varphi$.

**Beweis** Die primären El-Teiler $p_i^{\nu_{ij}}$ von $\varphi$ liefern $V_{ij} \le_{\mathbb{K}} V_i \le_{\mathbb{K}} V$ mit

$$V = \bigoplus V_i, \quad V_i = \bigoplus V_{ij}, \quad \varphi(V_{ij}) \subseteq V_{ij}$$

Mit $\varphi_{ij} := \varphi|_{V_{ij}}$: $V_{ij}$ ist $\varphi_{ij}$-zyklisch und hat Minpol $p_i^{\nu_{ij}}$. Weiter: jedes $p_{ij}^{\nu_{ij}}$ teilt

$$q_\varphi = (T-\lambda_1)^{m_1} \cdots (T-\lambda_r)^{m_r}$$

Eindeutigkeit der PFZ: $p_{ij}^{\nu_{ij}} = (T-\lambda_i)^{\nu_{ij}}$.

Weiter $p_i^{\nu_{id_i}} = (T-\lambda_i)^{m_i}$. Voriger Satz $\Rightarrow$ Beh. $\square$

**Definition** Primäre El-Teiler einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$: Primäre El-Teiler der Lin. Abb. $\mu_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

**Jordansche Normalform** $\mathbb{K}$ Körper

(i) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ sodass $q_A$ in Linearfakt. zerfällt. Dann ex. $S \in GL(n,\mathbb{K})$ mit

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J(k_{i1}, \lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(k_{id_i}, \lambda_i) \end{pmatrix},$$

wobei $(T-\lambda_i)^{k_{ij}}$ die primären El-Teiler von $A$.

(ii) Für $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ sind äquivalent:

(*) $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ mit $S \in GL(n;\mathbb{K})$

(**) $A, B$ haben dieselben prim. El-Teiler.

**Beweis** Zu (i): Voriger Satz und Transformel.
Zu (ii): (**) $\Leftrightarrow$ $A, B$ selbe El-Teiler $\Leftrightarrow$ (*). $\square$

**Bemerkung** Jedes $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$ lässt sich in Jordansche NF bringen.