Bemerkung Suchen Rationale Normalform und Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{C}).$$

Brauchen: Elementarteiler für RNF sowie primäre Elementarteiler für JNF.

Betrachte charakteristisches Polynom von A:

$$p_A = \det(T \cdot E_3 - A) = \det\begin{pmatrix} T-3 & 1 & -1 \\ -1 & T-1 & -1 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$= (T-2)\det\begin{pmatrix} T-3 & 1 \\ -1 & T-1 \end{pmatrix}$$

$$= (T-2)\big((T-3)(T-1)+1\big)$$
$$= (T-2)(T^2-4T+4)$$
$$= (T-2)^3.$$

Seien $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{K}[T]$ die El-Teiler von A. Wissen:

(*) $q_r = q_A$ Minimalpolynom,

(**) $q_1 \cdots q_r = p_A$ (Cayley-Hamilton).

Demgemäß möglich:

$$q_A = T-2, \quad q_A = (T-2)^2, \quad q_A = (T-2)^3.$$

klar: $A - 2 \cdot E_n \neq 0$. Weiter

$$(A - 2E_n)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit:

$$q_r = q_A = (T-2)^2.$$

Mit $p_A = q_1 \cdots q_r$: $r = 2$. D.h., El-Teiler von A:

$$q_1 = T-2, \quad q_2 = (T-2)^2 = T^2 - 4T + 4.$$

Rationale Normalform:

$$\begin{pmatrix} B(q_1) & 0 \\ 0 & B(q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primäre El-Teiler via Primfaktorzerlegung der El-Teiler:

$$p_{11} = T-2, \quad p_{12} = (T-2)^2.$$

Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} J(1;2) & 0 \\ 0 & J(2;2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Satz Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$. Die El-Teiler von A sind die normierten nichtkonstanten Diagonaleinträge der Smith-Normalform von

$$T \cdot E_n - A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k}[T]).$$

Beispiel Betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{C}).$$

Bestimmen Smith-NF von $T \cdot E_3 - A$:

$$\begin{pmatrix} T-3 & 1 & -1 \\ -1 & T-1 & -1 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1,2)} \begin{pmatrix} -1 & T-1 & -1 \\ T-3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(T-3;\,1,2)} \begin{pmatrix} -1 & T-1 & -1 \\ 0 & (T-3)(T-1)+1 & -T+2 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1;3,2)} \begin{pmatrix} -1 & T-1 & -1 \\ 0 & (T-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{SpOp}(-1;\,1,3)]{\mathrm{SpOp}(T-1;\,1,2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (T-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & T-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{SpOp}(2,3)]{\mathrm{ZOp}(2,3)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & T-2 & 0 \\ 0 & 0 & (T-2)^2 \end{pmatrix}$$

Somit: El-Teiler von A sind

$$q_1 = T-2, \quad q_2 = (T-2)^2.$$

Bemerkung Rezept zur NF-Berechnung für $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{k})$:

(1) Bestimme Smith-NF B von $T \cdot E_n - A$.

(2) El-Teiler von A: Die nichtkonstanten $b_{11}, \dots, b_{nn}$. Rationale NF von A:

$$\begin{pmatrix} B(b_{11}) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & B(b_{nn}) \end{pmatrix}$$

(3) Falls $q_A = b_{nn}$ in Linearfakt. zerfällt: primäre El-Teiler $p_i^{\nu_{ij}} = (T-\lambda_i)^{\nu_{ij}}$ mittels PFZ:

$$b_{11} = p_1^{\mu_{11}} \cdots p_r^{\mu_{1r}}, \quad \dots, \quad b_{nn} = p_1^{\mu_{k1}} \cdots p_r^{\mu_{kr}},$$

wobei $k = n-l$. Liefert die $p_i^{\nu_{ij}}$. Jordansche NF:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J(\nu_{i1};\lambda_i) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & J(\nu_{iq_i};\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Beispiel Betrachte nochmals

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(3,3;\mathbb{C}).$$

Bereits bestimmt:

$$P_A = (T-2)^3, \qquad q_A = (T-2)^2.$$

Primäre EL-Teiler:

$$P_{11} = T-2, \qquad P_{12} = (T-2)^2.$$

Damit Jordansche Normalform von A:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: $S \in GL(3;\mathbb{C})$ mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

Bestimmen Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{C}^3$ mit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A) = J.$$

Eigenraum zum EW $\lambda = 2$:

$$\ker(A - 2\cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Wegen $q_A = (T-2)^2$:

$$(A - 2\cdot E_3)\cdot v \in \ker(A - 2\cdot E_3)$$

für alle $v \in \mathbb{C}^3$.

Betrachte etwa

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker(A - 2\cdot E_3).$$

Dann, mit

$$v_3 := (A - 2\cdot E_3)\cdot v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die gesuchte Basis und man hat

$$S = (v_1, v_2, v_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Sei $A \in Mat(n,n;\mathbb{C})$. Schritte zur Bestimmung von S mit $S \cdot A \cdot S^{-1}$ in JNF:

① Bestimme $q_A = (T-\lambda_1)^{m_1} \cdots (T-\lambda_r)^{m_r}$.

② Bestimme die zugehörigen Haupträume

$$V_i := \ker((A - \lambda_i \cdot E_n)^{m_i}).$$

③ Bestimme Basis $\mathcal{B}_i = (v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i)$ für V_i mit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}(\mu_A|V_i)$ in JNF. Falls V_i zyklisch:

* suche $v \in V$ mit $(A - \lambda_i \cdot E_n)^{m_i} \cdot v \neq 0_V$,
* $\mathcal{B}_i := (v, (A - \lambda_i \cdot E_n)\cdot v, \ldots, (A - \lambda_i \cdot E_n)^{m_i - 1}\cdot v)$.

④ Gesuchte Matrix S ist

$$S = (v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{n_r}^r)^{-1}.$$