Definition $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-VR. **Bilinearform** auf V: Abbildung

$$\beta: V \times V \to \mathbb{K}, \quad (v,w) \mapsto \beta(v,w),$$

sodass stets

$$\beta(a \cdot v + a' \cdot v', w) = a \cdot \beta(v,w) + a' \cdot \beta(v',w),$$
$$\beta(v, b \cdot w + b' \cdot w') = b \cdot \beta(v,w) + b' \cdot \beta(v,w').$$

Beispiele $\mathbb{K}$ Körper.

(i) Multiplikation in $\mathbb{K}$ liefert Bilinearform:

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto xy$$

(ii) Anwenden von Vektoren liefert Bilinearform:

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto x^t \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

(iii) Jedes $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ def. Bilinearform:

$$\beta_A: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y$$

Beispiel Sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann ist das Skalarprodukt von V eine Bilinearform:

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \langle v, w \rangle.$$

Beispiel Sei V $\mathbb{K}$-VR, $V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$ der zugeh. Dualraum, $u, u' \in V^*$. Dann hat man Bilinearform

$$V \times V \to \mathbb{K}, \quad (v,w) \mapsto u(v) \cdot u'(w).$$

Konstruktion V $\mathbb{K}$-VR. Haben punktweise Addition und Skalarmult. für Bilinearformen:

$$(\beta + \beta')(v,w) := \beta(v,w) + \beta'(v,w),$$
$$(a \cdot \beta)(v,w) := a \cdot \beta(v,w).$$

Damit erhält man $\mathbb{K}$-VR

$$\mathrm{BiLin}(V) := \{\beta: V \times V \to \mathbb{K};\ \beta \text{ Bil.-Form}\}.$$

Beweis Wissen: Für jede Menge $X \neq \emptyset$ hat man $\mathbb{K}$-VR

$$\mathrm{Abb}(X,\mathbb{K}) = \{f;\ f: X \to \mathbb{K} \text{ Abbildung}\}$$

mit punktw. Addition und Skalarmult. Reicht z.z.:

$$\mathrm{BiLin}(V) \leq_{\mathbb{K}} \mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{K})$$

Haben beispielsweise

$$(\beta + \beta')(v+v', w) = \beta(v+v', w) + \beta'(v+v', w)$$
$$= \beta(v,w) + \beta(v',w) + \beta'(v,w) + \beta'(v',w)$$
$$= (\beta+\beta')(v,w) + (\beta+\beta')(v',w). \quad \square$$

Definition V $\mathbb{k}$-VR, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{k})$ zugeh. Dualraum. Zu jeder Basis

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$$

für V gibt es duale Basis

$$\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*).$$

Dabei ist $v_i^* \in V^*$ definiert durch

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & \text{falls } i = j, \\ 0_{\mathbb{k}}, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Satz V $\mathbb{k}$-VR mit Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Weiter $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis. Dann hat man Basis $(\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le n)$ für $\mathrm{BiLin}(V)$, wobei

$$\beta_{ij}(v, w) = v_i^*(v) \cdot v_j^*(w).$$

Lemma V $\mathbb{k}$-VR, $(v_1, \dots, v_n)$ Basis für V und $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$. Dann, für alle $v = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$, $w = y_1 \cdot v_1 + \dots + y_n \cdot v_n$:

$$\beta(v, w) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \beta(v_i, v_j).$$

Beweis Bilineares Rechnen:

$$\beta(v, w) = \beta\Big(\sum_i x_i \cdot v_i, \sum_j y_j \cdot v_j\Big)$$

$$= \sum_i x_i \cdot \beta\Big(v_i, \sum_j y_j \cdot v_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \beta(v_i, v_j). \qquad \square$$

Beweis Satz Zeigen $(\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le n)$ lin. unabh.

Sei

$$0_{\mathrm{BiLin}(V)} = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} \cdot \beta_{ij} =: \beta$$

Dann:

$$0_{\mathbb{k}} = \beta(v_k, v_l) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \beta_{ij}(v_k, v_l)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} v_i^*(v_k) \cdot v_j^*(v_l) = a_{ij}.$$

Zeigen $(\beta_{ij};\ 1 \le i,j \le n)$ erzeugend. Sei $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$.

Setze

$$c_{ij} := \beta(v_i, v_j).$$

Dann:

$$\beta\Big(\sum_i x_i \cdot v_i, \sum_j y_j \cdot v_j\Big) \overset{\text{Lemma}}{=} \sum_{i,j} x_i y_j c_{ij}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j c_{ij} \beta(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij} \beta_{ij}\Big(\sum_k x_k \cdot v_k, \sum_l y_l \cdot v_l\Big)$$

$$= \Big(\sum_{i,j} c_{ij} \beta_{ij}\Big)\Big(\sum_k x_k \cdot v_k, \sum_l y_l \cdot v_l\Big). \qquad \square$$

Definition V $\mathbb{k}$-VR, $\beta: V\times V \to \mathbb{k}$ Bilinearform und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis für V. Gramsche Matrix von β bezüglich $\mathcal{B}$:

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) := \left(\beta(v_i, v_j)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in Mat(n,n;\mathbb{k}).$$

Beispiel Betrachte kanon. Basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{k}^n$.

(i) Für $\beta: (x,y) \mapsto x^t \cdot y$: $G_{\mathcal{E}}(\beta) = E_n$.

(ii) Für $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$ und $\beta_A: (x,y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y$:

$$\beta_A(e_i, e_j) = e_i^t \cdot A \cdot e_j = e_i^t \cdot A_{j*} = a_{ij}$$

Somit $G_{\mathcal{E}}(\beta_A) = A$.

Satz V $\mathbb{k}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

(i) Für jede Bilinearform $\beta: V\times V \to \mathbb{k}$ hat man

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\cong", "{(v,w)\mapsto (x_B(v), x_B(w))}"'] & G & \mathbb{k} \\ & \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \arrow[ur, "{(x,y)\mapsto x^t\cdot G_B(\beta)\cdot y}"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) Zu $A \in Mat(n,n;\mathbb{k})$ ex. eind. $\beta_B(A) \in BiLin(V)$ mit

$$\begin{tikzcd} V\times V \arrow[rr, "\beta_B(A)"] \arrow[dr, "\cong", "{(v,w)\mapsto (x_B(v), x_B(w))}"'] & G & \mathbb{k} \\ & \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \arrow[ur, "{\beta_A: (x,y)\mapsto x^t\cdot A\cdot y}"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) Haben zueinander inverse VR-Isos:

$$\begin{aligned} BiLin(V) &\longleftrightarrow Mat(n,n;\mathbb{k}) \\ \beta &\mapsto G_B(\beta) \\ \beta_B(A) &\leftarrow\!\shortmid A \end{aligned}$$

Insbes.: $G_B(\beta)$ eindeutig best. durch (i).

Beweis Zu (i). Seien $v = \sum x_i \cdot v_i$, $w = \sum y_j \cdot v_j$. Dann:

$$\beta(v,w) = \sum x_i\, \beta(v_i, v_j)\, y_j = x^t \cdot G_B(\beta) \cdot y.$$

Zu (ii). Mit $\Phi: V\times V \xrightarrow{\cong} \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n$, $(v,w) \mapsto (x_B(v), x_B(w))$:

$$\beta_B(A) = \beta_A \circ \Phi.$$

Zu (iii). Zeigen $\varphi: \beta \mapsto G_B(\beta)$ ist linear:

$$G_B(a\beta + a'\beta') = \left((a\beta + a'\beta')(v_i, v_j)\right)_{i,j}$$

$$= \left(a\beta(v_i,v_j) + a'\beta'(v_i,v_j)\right)_{i,j} = a\cdot G_B(\beta) + a'\cdot G_B(\beta').$$

Mit $\psi: A \mapsto \beta_B(A)$:

$$\psi\circ\varphi(\beta) = \beta_B(G_B(\beta)) \overset{(i),(ii)}{=} \beta$$

Somit $\psi\circ\varphi = id$. Insbes.: φ injektiv. Weiter

$$\dim(BiLin(V)) = n^2 = \dim(Mat(n,n;\mathbb{k})).$$

Somit φ Iso. Sei φ' Umkehriso. Dann:

$$\psi = \psi\circ\varphi\circ\varphi' = \varphi'.$$

□

Satz V n-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Basen für V, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$. Dann:

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)^t \cdot G_{\mathcal{C}}(\beta) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V).$$

Beweis Schreiben abkürzend

$$B := G_{\mathcal{B}}(\beta), \quad C := G_{\mathcal{C}}(\beta), \quad M := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V).$$

Damit kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[dr, "(x,y)\mapsto x^t\cdot C\cdot y"] & \\
V \times V \arrow[u, "\cong"', "(x_{\mathcal{C}}(v),\, x_{\mathcal{C}}(w)) \mapsfrom (v,w)"] \arrow[d, "\cong", "(v,w) \mapsto (x_{\mathcal{B}}(v),\, x_{\mathcal{B}}(w))"'] \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[ur, "(x,y)\mapsto x^t\cdot B\cdot y"'] \arrow[uu, bend left=80, "(M\cdot x,\, M\cdot y) \mapsfrom (x,y)"]
\end{tikzcd}$$

Für $x = x_{\mathcal{B}}(v)$ und $y = x_{\mathcal{B}}(w)$:

$$\begin{aligned}
\beta(v,w) &= x^t \cdot B \cdot y \\
&= (M\cdot x)^t \cdot C \cdot (M\cdot y) = x^t \cdot (M^t \cdot C \cdot M)\cdot y.
\end{aligned}$$

Somit $B = M^t \cdot C \cdot M$. $\square$

Folgerung V $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$, $A := G_{\mathcal{B}}(\beta)$, $B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$.

Dann äquivalent:

(i) Es gibt Basis $\mathcal{C}$ für V mit
$$B = G_{\mathcal{C}}(\beta).$$

(ii) Es gibt $S \in GL(n;\mathbb{K})$ mit
$$A = S^t \cdot B \cdot S.$$

Beweis "(i) $\Rightarrow$ (ii)" klar mit vorigem Satz.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Betr. $\varphi_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$, $v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)$ und

$$w_j := \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(S^{-1} \cdot e_j) = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(S^{-1}_{*j}).$$

Dann $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basis für V und

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}} : w_j \mapsto S^{-1}_{*j}"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & V \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}} : w_j \mapsto e_j"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto S\cdot x"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Somit $S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$. Mit vorigem Satz:

$$S^t \cdot B \cdot S = A = G_{\mathcal{B}}(\beta) = S^t \cdot G_{\mathcal{C}}(\beta) S.$$

S invertierbar $\Rightarrow B = G_{\mathcal{C}}(\beta)$. $\square$