Definition V $\mathbb{K}$-VR. Nenne $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$ *symmetrisch*, falls stets

$$\beta(v,w) = \beta(w,v).$$

Beispiel V euklid. VR. Dann: Skalarprod. $\langle \, , \rangle$ auf V symmetrische Bilinearform.

Satz V $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$. Dann äquivalent:

(i) β symmetrisch.

(ii) $G_{\mathcal{B}}(\beta)$ symmetrisch.

Beweis Zu "(i) ⇒ (ii)". Haben

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = (\beta(v_i, v_j)) = (\beta(v_j, v_i)) = G_{\mathcal{B}}(\beta)^t.$$

Zu "(ii) ⇒ (i)". Setze $A := G_{\mathcal{B}}(\beta)$. Dann stets

$$\begin{aligned}\beta(v,w) &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A \cdot x_{\mathcal{B}}(w) \\ &= (x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A \cdot x_{\mathcal{B}}(w))^t \\ &= x_{\mathcal{B}}(w)^t \cdot A \cdot x_{\mathcal{B}}(v) = \beta(w,v). \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung Zwei äquivalente Aufgaben:

(i) V n-dim. $\mathbb{K}$-VR, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$.
Finde Basis $\mathcal{B}$ für V, sodass $G_{\mathcal{B}}(\beta)$ "möglichst einfach".

(ii) $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ symmetrisch.
Finde $S \in GL(n, \mathbb{K})$, sodass $S^t \cdot A \cdot S$ "möglichst einfach".

Definition R K1-Ring, $a \in R$. Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ setze

$$n \cdot a := \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}}$$

Charakteristik von R:

$$\mathrm{char}(R) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot 1_R \neq 0_R \text{ f. alle } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ \min(n \in \mathbb{Z}_{>0} ;\ n \cdot 1_R = 0_R) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel Haben
$\mathrm{char}(\mathbb{Z}) = \mathrm{char}(\mathbb{Q}) = \mathrm{char}(\mathbb{R}) = \mathrm{char}(\mathbb{C}) = 0$

Weiter
$\mathrm{char}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Satz $\mathbb{K}$ Körper, $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ symmetrisch. Dann gibt es El-Mat $S_1, \dots, S_k$ der Typen $E(\lambda;j,i)$, $E(i,j)$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ mit

$$S_k^t \cdots S_1^t \cdot A \cdot S_1 \cdots S_k = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweis Haben

$A \cdot E(\lambda;j,i) = SpOp(\lambda;i,j)(A)$, $\quad A \cdot E(i,j) = SpOp(i,j)(A)$

Weiter $E(\lambda;j,i)^t = E(\lambda;i,j)$ und $E(i,j)^t = E(i,j)$. D.h.:

$E(\lambda;j,i)^t \cdot A = ZOp(\lambda;i,j)(A)$, $\quad E(i,j)^t \cdot A = ZOp(i,j)(A)$.

Beachte: Für jedes $S \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ ist $S^t \cdot A \cdot S$ wieder symmetrisch, denn

$$(S^t \cdot A \cdot S)^t = S^t \cdot A^t \cdot (S^t)^t = S^t \cdot A \cdot S.$$

Iteratives Verfahren von paarweisen ZOp, $SpOp$ zu S^t, S.

Schritt 0 Falls A_{1*} keine Nullzeile: Schritt 1. Sonst STOP mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}.$$

Schritt 1 Falls $a_{11} \neq 0_{\mathbb{K}}$: Schritt 2. Sonst:

* Falls $a_{ii} \neq 0_{\mathbb{K}}$ für ein $i = 2, \dots, n$:

$$A \xrightarrow[SpOp(1,i)]{ZOp(1,i)} \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & * & \\ * & & & \end{pmatrix} =: A'$$

mit $a := a_{ii}$.

* Falls $a_{ii} = 0_{\mathbb{K}}$ für $i = 2, \dots, n$: Wähle i mit $a_{i1} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Dann

$$A \xrightarrow[SpOp(1_{\mathbb{K}};i,1)]{ZOp(1_{\mathbb{K}};i,1)} \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & * & \\ * & & & \end{pmatrix} =: A'$$

mit $a := a_{i1} + a_{1i} = 2 \cdot a_{i1} \neq 0_{\mathbb{K}}$

Schritt 2 Mit $ZOp(-\frac{a_{j1}}{a};1,j)$ und $SpOp(-\frac{a_{1j}}{a};1,j)$:

$$A' \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

Setzt mit $A'' \in \mathrm{Mat}(n-1, n-1; \mathbb{K})$ wieder bei Schritt 0 anfangen.

Nach n Durchläufen: fertig. $\square$

Folgerung $\mathbb{K}$ Körper, $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\beta \in \operatorname{BiLin}(V)$ symmetrisch. Dann gibt es Basis $\mathcal{B}$ für V, sodass $G_{\mathcal{B}}(\beta)$ Diagonalmatrix.

Beweis Sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ Basis für V.
Wissen: $G_{\mathcal{C}}(\beta)$ symmetrisch. Voriger Satz:

$$S^t \cdot G_{\mathcal{C}}(\beta) \cdot S = D$$

mit $S \in GL(n; \mathbb{K})$ und D Diagonalmatrix.
Früherer Satz: V besitzt Basis $\mathcal{B}$ sodass

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = D. \qquad \square$$

Bemerkung $\mathbb{K}$ Körper, $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, $A \in \operatorname{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ symmetrisch. Zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3,3;\mathbb{Q}).$$

Verfahren zur Bestimmung von Matrizen $S \in GL(n;\mathbb{K})$ und $D \in \operatorname{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ diagonal mit

$$S^t \cdot A \cdot S = D.$$

Paarweises Anwenden entsprechender ZOp und SpOp:

$$\begin{array}{ccc} & A & \begin{array}{c}\text{Notizblock}\\ \text{SpOp} \rightsquigarrow S\end{array} \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \right. & \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(-2;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \right. & \left. \shortparallel \right) \\ \xrightarrow{SpOp(-2;1,2)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \right. & \left.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ \xrightarrow{ZOp(-1;1,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left. \shortparallel \right) \\ \xrightarrow{SpOp(-1;1,3)} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. & \left.\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & D & S \end{array}$$

Bemerkung Im Allgemeinen ist $D' = S^t \cdot D \cdot S$ mit Diagonalmatrizen $D' \neq D$ möglich, etwa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{S^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{S}$$

Insbesondere ist D in einer Darst $S^t \cdot A \cdot S = D$ im Allg. nicht eindeutig.

Definition V $\mathbb{R}$-VR, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$ symmetrisch.

(i) β *positiv definit*, falls $\beta(v,v) > 0$ für alle $0_V \neq v \in V$,

(ii) β *negativ definit*, falls $\beta(v,v) < 0$ für alle $0_V \neq v \in V$,

(iii) *Ausartungsraum* von β:

$$V^0 := \{v \in V;\ \beta(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\} \leq_{\mathbb{R}} V.$$

Trägheitsgesetz von Sylvester V n-dim. $\mathbb{R}$-VR und $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$ symmetrisch. Weiter

$$V = V_1^+ \oplus V_1^- \oplus V^0 = V_2^+ \oplus V_2^- \oplus V^0$$

sodass β pos. def auf V_i^+ und β neg. def. auf V_i^-. Dann:

$$\dim(V_1^+) = \dim(V_2^+), \quad \dim(V_1^-) = \dim(V_2^-).$$

Beweis Satz

$n_i^+ := \dim(V_i^+)$, $n_i^- := \dim(V_i^-)$, $n_0 := \dim(V^0)$

Zeigen: $\beta(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V_i^- \oplus V^0$.

Schreibe

$$v = v^- + v^0, \quad v^- \in V_i^-, \quad v^0 \in V^0.$$

Dann:

$$\begin{aligned} \beta(v,v) &= \beta(v^- + v^0, v^- + v^0) \\ &= \beta(v^-, v^-) + 2\underbrace{\beta(v^0, v^-)}_{0} + \beta(v^0, v^0) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Folglich

$$V_1^+ \cap (V_2^- \oplus V^0) = \{0_V\}$$

Mit Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} n_1^+ + n_2^- + n_0 &= \dim(V_1^+ + (V_2^- \oplus V^0)) \\ &\leq \dim(V) \\ &= n_2^+ + n_2^- + n_0 \end{aligned}$$

Somit $n_1^+ \leq n_2^+$. Analog: $n_2^+ \leq n_1^+$. Damit $n_1^+ = n_2^+$ und

$$n_1^- = n - n_1^+ - n_0 = n - n_2^+ - n_0 = n_2^-. \quad \square$$

Satz Haben für $\mathbb{k} = \mathbb{R}$:

(i) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gibt es $S \in GL(n;\mathbb{R})$ mit

$$S^t \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} E_{n^+} & & 0 \\ & -E_{n^-} & \\ 0 & & 0_{n_0} \end{pmatrix}.$$

Dabei n^+, n^-, $n_0 = n - \mathrm{Rang}(A)$ eindeutig bestimmt.

(ii) Sei V endl. dim. $\mathbb{R}$-VR, $\beta \in \mathrm{BiLin}(V)$ symmetrisch. Dann hat V Basis $\mathcal{B}$ mit

$$G_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} E_{n^+} & & 0 \\ & -E_{n^-} & \\ 0 & & 0_{n_0} \end{pmatrix}.$$

Insbes. $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ mit β pos. def. auf V^+, β neg. def auf V^- und

$n^+ = \dim(V^+)$, $n^- = \dim(V^-)$, $n_0 = \dim(V^0)$

eindeutig bestimmt.

Beweis Wissen: Zu A aus (i) gibt es $S_0 \in GL(n,\mathbb{R})$ mit

$$S_0^t \cdot A \cdot S_0 = D, \quad D \text{ Diagonalmatrix}.$$

Mittels $ZOp(i,j)$ und $SpOp(i,j)$ erreichen wir dabei

$$d_{ii} > 0,\ i = 1,\dots,n^+, \quad d_{ii} < 0,\ i = 1,\dots,n^-.$$

Setze $m := n^+ + n^-$ und

$$S := S_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|d_{11}|}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{|d_{mm}|}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann: $S^t \cdot A \cdot S$ wie in (i). Damit: Basis $\mathcal{B}$ für (ii).

Sylvester: Eind. von n^+, n^-, n_0. $\square$

Bemerkung Für $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R})$ symmetrisch ist sogar möglich:

$$S^t \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } S \text{ orthogonal, d.h. } S^t = S^{-1}.$$

Dann: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW von A und

$n^+ =$ Anz. pos. EW, $n^- =$ Anz. negat. EW.