Definition $V_1, \ldots, V_r$ und W $\mathbb{k}$-VR. Nenne eine Abbildung

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W$$

multilinear, falls φ linear in jeder Komponente, d.h., stets

$$\varphi(v_1, \ldots, a \cdot v_i + a' \cdot v_i', \ldots, v_n) = a \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + a' \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n).$$

Beispiel Haben multilineare Abbildung

$$\mathbb{k}^n = \mathbb{k} \times \ldots \times \mathbb{k} \to \mathbb{k}$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n.$$

Beispiel $V_1, \ldots, V_r$ $\mathbb{k}$-VR, $V_i^* = \mathrm{Hom}(V_i, \mathbb{k})$ zugeh. Dualräume, $u_i \in V_i^*$, $i = 1, \ldots, r$. Dann:

$$V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow \mathbb{k}$$
$$(v_1, \ldots, v_r) \mapsto u_1(v_1) \cdots u_r(v_r)$$

multilineare Abbildung.

Beispiel Haben multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathbb{k}^n \times \ldots \times \mathbb{k}^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$$

Matrix mit Spalten v_i.

Konstruktion $V_1, \ldots, V_r$ und W $\mathbb{k}$-VR. Dann:

$$\mathrm{MultLin}(V_1, \ldots, V_r; W) := \{\varphi : V_1 \times \ldots \times V_r \to W;\ \varphi \text{ multilin.}\}$$

$\mathbb{k}$-Vektorraum bez. der punktweisen Verknüpfungen:

$$(\varphi + \psi)(v_1, \ldots, v_r) = \varphi(v_1, \ldots, v_r) + \psi(v_1, \ldots, v_r)$$
$$(a \cdot \varphi)(v_1, \ldots, v_r) = a \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_r).$$

Ziel $\mathrm{MultLin}(V_1, \ldots, V_r; W)$ mit linearer Algebra untersuchen.

Dafür: Zu $V_1, \ldots, V_r$ konstruiere $\mathbb{k}$-VR U mit

$$\mathrm{MultLin}(V_1, \ldots, V_r; W) \cong \mathrm{Hom}(U, W).$$

Konstruktion (Tensorprodukt) Seien $\mathbb{K}$ Körper, $V_1, \dots, V_r$ $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Schritt 1 Bilde frei erz. $\mathbb{K}$-VR über $V_1 \times \dots \times V_r$:

$$F(V_1, \dots, V_r) := \bigoplus_{(v_1,\dots,v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r} \mathbb{K} \cdot (v_1, \dots, v_r)$$

Haben Basis für $F(V_1, \dots, V_r)$:

$$\left(1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r) ; \; (v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r \right).$$

Schritt 2 Sei $R(V_1, \dots, V_r) \leq_{\mathbb{K}} F(V_1, \dots, V_r)$ der UVR erzeugt von

$$1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_r) - 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) - 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i', \dots, v_r),$$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

$R(V_1, \dots, V_r)$ ist "UVR der multilin Relationen".

Schritt 3 Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_r$:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r := F(V_1, \dots, V_r) / R(V_1, \dots, V_r)$$

Jedes $(v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r$ liefert

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r := 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r) + R(V_1, \dots, V_r) \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r.$$

Haben lineare Abbildung

$$\pi : F(V_1, \dots, V_r) \to V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$
$$1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r.$$

Rechenregeln In $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ gilt stets

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_i + v_i' \otimes \dots \otimes v_r = v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r + v_1 \otimes \dots \otimes v_i' \otimes \dots \otimes v_r,$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes a \cdot v_i \otimes \dots \otimes v_r = a \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r.$$

Bemerkung $V_1, \dots, V_r$ $\mathbb{K}$-VR. Elemente der Form $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ mit $v_i \in V_i$ heissen *zerlegbar*.

(i) Jedes Element von $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ ist eine Summe von zerlegbaren Elementen.

(ii) Es gibt auch nicht zerlegbare Elemente, beispielsweise

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2.$$

Satz $V_1, \dots, V_r$ $\mathbb{k}$-VR. Haben multilin. Abb.

$$\Pi : V_1 \times \dots \times V_r \to V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$
$$(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$$

Weiter: Zu jeder multilinearen Abbildung

$$\Phi : V_1 \times \dots \times V_r \to W$$

gibt es eine eind. bestimmte lineare Abb.

$$\Psi : V_1 \otimes \dots \otimes V_r \to W$$

sodass

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[rr, "\Phi", "\text{multilinear}"'] \arrow[dr, "\text{multilin.}", "\Pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "G"] & & W \\ & V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[ur, "\text{lin.}", "\Psi : v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis Haben Abbildung von Mengen

$\iota : V_1 \times \dots \times V_r \to F(V_1, \dots, V_r)$, $(v_1, \dots, v_r) \mapsto 1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_r)$.

Damit $\Pi = \pi \circ \iota$, wobei

$\pi : F(V_1, \dots, V_r) \to V_1 \otimes \dots \otimes V_r$

$$1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r = 1_{\mathbb{k}}(v_1, \dots, v_r) + R(V_1, \dots, V_r).$$

Betrachten

$$A := \iota(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_r) - \iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) - \iota(v_1, \dots, v_i', \dots, v_r)$$

und

$$B = \iota(v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot \iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Dann $A, B \in R(V_1, \dots, V_r) = \ker(\pi)$. Damit Π multilin., etwa

$$\begin{aligned} \Pi(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots v_r) &= \pi(\iota(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots v_r)) - \pi(A) \\ &\overset{\pi \text{ linear}}{=} \pi(\iota(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_r) - A) \\ &= \pi(\iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \iota(v_1, \dots, v_i', \dots, v_r)) \\ &\overset{\pi \text{ linear}}{=} \pi(\iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)) + \pi(\iota(v_1, \dots, v_i', \dots, v_r)) \\ &= \Pi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \Pi(v_1, \dots, v_i', \dots, v_r). \end{aligned}$$

Sei $\Phi : V_1 \times \dots \times V_r \to W$ multilinear. Haben lineare Abb.

$$\Phi' : F(V_1, \dots, V_r) \to W, \quad 1_{\mathbb{k}}(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r).$$

Dabei $R(V_1, \dots, V_r) \subseteq \ker(\Phi')$. Etwa

$$\Phi'(1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r))$$
$$= \Phi(v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot \Phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) = 0_W.$$

HomSatz:

$$\begin{tikzcd} F(V_1, \dots, V_r) \arrow[rr, "\Phi'"] \arrow[dr, bend right=60, "\pi"'] & & W \\ & V_1 \times \dots \times V_r \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[d, "\Pi"] & \\ & V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[uur, bend right=40, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ψ eind. wegen $\Psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = \Phi(v_1, \dots, v_r)$ $\square$

__Folgerung__ $V_1, \dots, V_r, W$ $\mathbb{k}$-VR. Dann hat man zueinander inverse Isos von $\mathbb{k}$-VR:

$$\mathrm{MultLin}(V_1, \dots, V_r, W) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r, W)$$
$$\Phi \mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)]$$
$$[(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)] \mapsfrom \Psi$$

__Beweis__ Zu "$\mapsto$". Voriger Satz liefert kommut. Diagramme:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[rr, "\Phi", "\text{multilinear}"'] \arrow[dr, "\text{multilin.}"', "(v_1,\dots,v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r"' near start] & & W \\ & V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[ur, "\text{linear}", "v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)"'] & \end{tikzcd}$$

Somit "$\mapsto$" wohldef. Linearität von "$\mapsto$": Haben jeweils punktw. Verknüpfungen. Also

$$[v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto (a\Phi + a'\Phi')(v_1, \dots, v_r)]$$
$$= [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto a\Phi(v_1, \dots, v_r) + a'\Phi'(v_1, \dots, v_r)]$$
$$= [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto a\Phi(v_1, \dots, v_r)] + [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto a'\Phi'(v_1, \dots, v_r)].$$

Zu "$\mapsfrom$". Wegen $(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ multilinear und Ψ linear: $(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)$ multilinear.

Somit: "$\mapsfrom$" wohldef. Klar: "$\mapsto$" und "$\mapsfrom$" sind invers zueinander. Somit Isos. $\square$

__Folgerung__ $V_1, \dots, V_r$ und $V_1', \dots, V_r'$ $\mathbb{k}$-VR. Weiter $\varphi_i : V_i \to V_i'$ lineare Abb., $i = 1, \dots, r$. Dann hat man kommut. Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[r, "(v_1,\dots,v_r) \mapsto (\varphi_1(v_1), \dots, \varphi_r(v_r))", "\varphi_1 \times \dots \times \varphi_r"'] \arrow[d, "\pi"'] & V_1' \times \dots \times V_r' \arrow[d, "\pi'"] \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[r, "v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \varphi_1(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi_r(v_r)", "\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_r"'] & V_1' \otimes \dots \otimes V_r' \end{tikzcd}$$

mit einer eind. bestimmten linearen Abb.

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_r : V_1 \otimes \dots \otimes V_r \longrightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_r'$$

__Beweis__ Haben multilineare Abbildung

$$\pi' \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_r) : V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_r'.$$

Somit kommut Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_r \arrow[rr, "\pi' \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_r)"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V_1' \otimes \dots \otimes V_r' \\ & V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[ur, "v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \varphi_1(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi_r(v_r)"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer eind. best. linearen Abb.

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r \to V_1' \otimes \dots \otimes V_r', \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \varphi(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi(v_r).$$

$\square$

Satz $V_1, \dots, V_r$ $\mathbb{k}$-VR mit Basen $\mathcal{B}_i = (v_1^i, \dots, v_{n_i}^i)$.

Dann:

$$\mathcal{B} := (v_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{j_r}^r ;\ 1 \le j_i \le n_i)$$

Basis für $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$. Insbesondere gilt

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_r) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_r).$$

Beweis Zeigen: $\mathcal{B}$ erzeugend. Reicht: Jedes

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

ist Linearkomb. über $\mathcal{B}$. Schreibe

$$v_i = \sum a_{ij} v_j^i .$$

Dann:

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r = \left(\sum a_{1j} v_j^1\right) \otimes \dots \otimes \left(\sum a_{rj} v_j^r\right)$$

$$= \sum_{(j_1, \dots, j_r)} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} v_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{j_r}^r$$

Somit: $\mathcal{B}$ erzeugt $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$.

Zu $\mathcal{B}$ linear unabh.. Betrachte V_i^* und duale Basen

$$\mathcal{B}_i^* = (u_1^i, \dots, u_{n_i}^i).$$

Liefern multilin Abb.:

$$\beta_{j_1, \dots, j_r} : V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$(v_1, \dots, v_r) \mapsto \prod_{i=1}^{r} u_{j_i}^i(v_i)$$

Leisten:

$$\beta_{j_1, \dots, j_r}(v_{k_1}^1, \dots, v_{k_r}^r) = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & (j_1, \dots, j_r) = (k_1, \dots, k_r), \\ 0_{\mathbb{k}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wissen: Es gibt lineare Abb.

$$\varphi_{j_1, \dots, j_r} : V_1 \otimes \dots \otimes V_r \to \mathbb{k},\ v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \beta_{j_1, \dots, j_r}(v_1, \dots, v_k).$$

Betrachte Linkomb.

$$\sum a_{k_1, \dots, k_r} v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r = 0_{V_1 \otimes \dots \otimes V_r}$$

Dann:

$$0 = \varphi_{j_1, \dots, j_r}\left(\sum a_{k_1, \dots, k_r} v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r\right)$$

$$= \sum a_{k_1, \dots, k_r} \varphi_{j_1, \dots, j_r}(v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r) = a_{j_1, \dots, j_r}$$

$\square$