

Definition V_1, \dots, V_r und W \mathbb{K} -VR. Nenne eine Abbildung

$$\varphi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$$

multilinear, falls φ linear in jeder Komponente, d.h., stets

$$\varphi(v_1, \dots, \alpha \cdot v_i + \alpha' \cdot v_i', \dots, v_n) = \alpha \cdot \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \alpha' \cdot \varphi(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n).$$

Beispiel Haben multilineare Abbildung

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n.$$

Beispiel V_1, \dots, V_r \mathbb{K} -VR, $V_i^* = \text{Hom}(V_i, \mathbb{K})$

Zugeh. Dualräume, $u_i \in V_i^*$, $i=1, \dots, r$.

Dann:

$$V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(v_1, \dots, v_r) \mapsto u_1(v_1) \cdot \dots \cdot u_r(v_r)$$

multilineare Abbildung.

Beispiel Haben multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$$

↑
Matrix mit Spalten v_i .

Konstruktion V_1, \dots, V_r und W \mathbb{K} -VR. Dann:

$$\text{MultLin}(V_1, \dots, V_r; W) := \{ \varphi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W; \varphi \text{ multilin.} \}$$

\mathbb{K} -Vektorraum bez. der punktweisen Verknüpfungen:

$$(\varphi + \psi)(v_1, \dots, v_r) = \varphi(v_1, \dots, v_r) + \psi(v_1, \dots, v_r)$$

$$(\alpha \cdot \varphi)(v_1, \dots, v_r) = \alpha \cdot \varphi(v_1, \dots, v_r).$$

Ziel $\text{MultLin}(V_1, \dots, V_r; W)$ mit linearer Algebra untersuchen.

Dafür: Zu V_1, \dots, V_r konstruiere \mathbb{K} -VR U mit

$$\text{MultLin}(V_1, \dots, V_r; W) \cong \text{Hom}(U, W).$$

Konstruktion (Tensorprodukt) Seien \mathbb{K} Körper, V_1, \dots, V_r \mathbb{K} -Vektorräume.

Schritt 1 Bilde frei erz. \mathbb{K} -VR über $V_1 \times \dots \times V_r :=$

$$F(V_1, \dots, V_r) := \bigoplus_{(v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r} \mathbb{K} \cdot (v_1, \dots, v_r)$$

$(v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r$

haben Basis für $F(V_1, \dots, V_r) :=$

$$\left(1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r); (v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r \right)$$

Schritt 2 Sei $R(V_1, \dots, V_r) \leq_{\mathbb{K}} F(V_1, \dots, V_r)$

der UVR erzeugt von

$$\begin{aligned} & 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r) - 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) \\ & - 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v'_i, \dots, v_r), \end{aligned}$$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

$R(V_1, \dots, V_r)$ ist "UVR der multilinearen Relationen".

Schritt 3 Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_r :=$

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r := F(V_1, \dots, V_r) / R(V_1, \dots, V_r)$$

Jedes $(v_1, \dots, v_r) \in V_1 \times \dots \times V_r$ liefert

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r := 1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r) + R(V_1, \dots, V_r) \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r.$$

haben lineare Abbildung

$$\pi := F(V_1, \dots, V_r) \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r.$$

Rechenregeln In $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ gilt stets

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \dots \otimes (v_i + v'_i) \otimes \dots \otimes v_r &= v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r \\ &+ v_1 \otimes \dots \otimes v'_i \otimes \dots \otimes v_r, \end{aligned}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes a \cdot v_i \otimes \dots \otimes v_r = a \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_r.$$

Bemerkung V_1, \dots, V_r \mathbb{K} -VR, Elemente der Form $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ mit $v_i \in V_i$ heißen zerlegbar.

(i) Jedes Element von $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ ist eine

Summe von zerlegbaren Elementen.

(ii) Es gibt auch nicht zerlegbare Elemente, beispielsweise

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2.$$

Satz V_1, \dots, V_r k -VR. Haben multilin. Abb.

$$\Pi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

$$(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$$

Weiter: Zu jeder multilinearen Abbildung

$$\Phi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$$

gibt es eine einkl. bestimmte lineare Abb.

$$\Psi: V_1 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow W$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_r & \xrightarrow{\Phi} & W \\ \Pi \swarrow \text{multilin.} & & \nearrow \text{lin.} \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_r & \xrightarrow{\Psi} & W \end{array}$$

Beweis Haben Abbildung von Mengen

$$\iota: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow F(V_1, \dots, V_r), \quad (v_1, \dots, v_r) \mapsto \iota_{\mathbb{1}_2}(v_1, \dots, v_r).$$

Damit $\Pi = \Pi \circ \iota$, wobei

$$\Pi: F(V_1, \dots, V_r) \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

$$\iota_{\mathbb{1}_2}(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r = \iota_{\mathbb{1}_2}(v_1, \dots, v_r) + R(v_1, \dots, v_r).$$

Betrachten

$$\begin{aligned} A \iota &= \iota(v_1, \dots, v_1 + v'_1, \dots, v_r) - \iota(v_1, \dots, v_1, \dots, v_r) \\ &\quad - \iota(v_1, \dots, v_1, \dots, v'_1, \dots, v_r) \end{aligned}$$

und

$$B = \iota(v_1, \dots, \alpha v_1, \dots, v_r) - \alpha \cdot \iota(v_1, \dots, v_1, \dots, v_r).$$

Dann $A, B \in R(V_1, \dots, V_r) = \ker(\Pi)$. Damit Π multilin., etwa

$$\Pi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r) = \Pi(\iota(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r)) - \Pi(A)$$

$$\stackrel{\Pi \text{ linear}}{=} \Pi(\iota(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r) - A)$$

$$= \Pi(\iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \iota(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r))$$

$$\stackrel{\Pi \text{ linear}}{=} \Pi(\iota(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r)) + \Pi(\iota(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r))$$

$$= \Pi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \Pi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r).$$

Sei $\Phi: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ multilinear. Haben lineare

Abb.

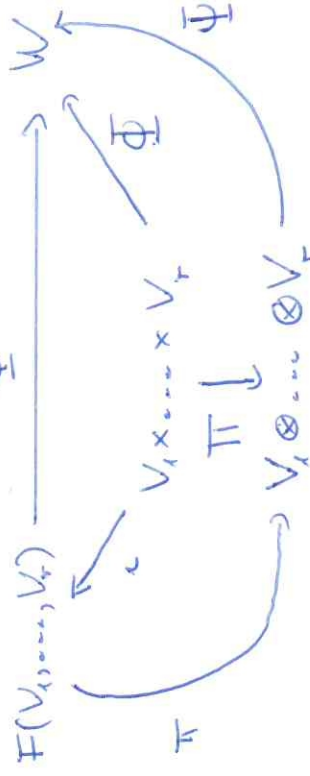
$$\Phi': F(V_1, \dots, V_r) \rightarrow W, \quad \iota_{\mathbb{1}_2}(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r).$$

Dabei $R(V_1, \dots, V_r) \in \ker(\Phi')$. Etwa

$$\Phi'(\iota_{\mathbb{1}_2}(v_1, \dots, \alpha v_1, \dots, v_r) - \alpha \cdot \iota(v_1, \dots, v_1, \dots, v_r))$$

$$= \Phi(v_1, \dots, \alpha v_1, \dots, v_r) - \alpha \cdot \Phi(v_1, \dots, v_1, \dots, v_r) = 0_W.$$

HomSatz:



kommutativ. Ψ einkl. wegen $\Psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = \Phi(v_1, \dots, v_r)$ \square

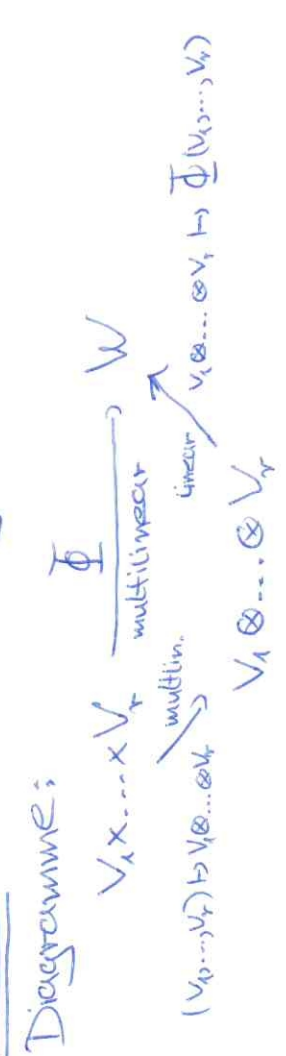
Folgerung V_1, \dots, V_r, W k -VR. Dann hat man zueinander inverse Isos von k -VR:

$$\text{MultLin}(V_1, \dots, V_r, W) \leftrightarrow \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r, W)$$

$$\Phi \mapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)]$$

$$[(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)] \leftarrow \Psi$$

Beweis Zu "": Voriger Satz liefert homom.



Somit " " wechlel. Linearität von " " : Haben jeweils punktw. Verknüpfungen. Also

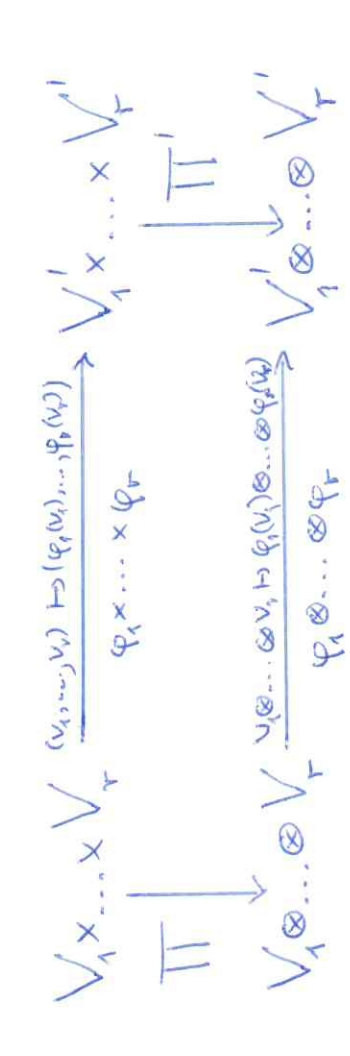
$$\begin{aligned}
 & [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto (\alpha\Phi + \beta\Phi')(v_1, \dots, v_r)] \\
 &= [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \alpha\Phi(v_1, \dots, v_r) + \beta\Phi'(v_1, \dots, v_r)] \\
 &= [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \alpha\Phi(v_1, \dots, v_r)] + [v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \beta\Phi'(v_1, \dots, v_r)].
 \end{aligned}$$

Zu " " : Wegen $(v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ multilinear und Φ linear: $(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)$ multilinear.

Somit: " " wechlel. klar: " " und " " sind invers zueinander. somit Isos. \square

Folgerung V_1, \dots, V_r und V_1', \dots, V_r' k -VR. Weiter $\varphi_i: V_i \rightarrow V_i'$ lineare Abb., $i=1, \dots, r$.

Dann hat man kommut. Diagramm



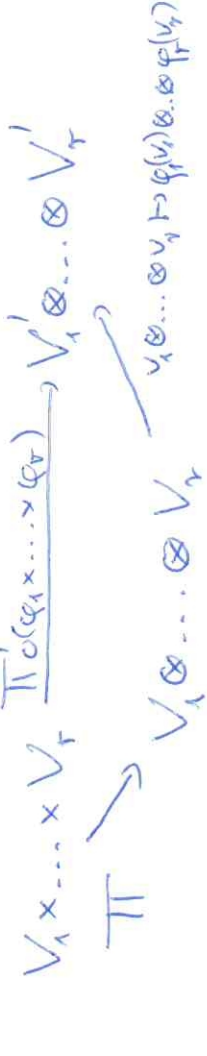
mit einer eind. bestimmten linearen Abb.

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_r: V_1 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_r'$$

Beweis Haben multilineare Abbildung

$$\Pi' \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_r): V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_r'$$

Somit kommut. Diagramm



mit einer eind. best. linearen Abb.

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_r', \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \varphi_1(v_1) \otimes \dots \otimes \varphi_r(v_r).$$

\square

Satz V_1, \dots, V_r \mathbb{K} -VR mit Basen $B_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$.

Dann:

$$B := (v_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{j_r}^r; 1 \leq j_i \leq n_i)$$

Basis für $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$. Insbesondere gilt

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_r) = \dim(V_1) \dots \dim(V_r).$$

Beweis zeigen: B erzeugend. Recht:

Jedes $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in V_1 \otimes \dots \otimes V_r$

ist Linearkomb. über B . Schreibe

$$v_i = \sum a_{ij} v_j^i.$$

Dann:

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \dots \otimes v_r &= (\sum a_{1j_1} v_{j_1}^1) \otimes \dots \otimes (\sum a_{rj_r} v_{j_r}^r) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_r)} a_{1j_1} \dots a_{rj_r} v_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{j_r}^r \end{aligned}$$

Somit: B erzeugt $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$.

Zu B linear unabh. Betrachte V_i^* und duale Basen

$$B_i^* = (u_{i,1}^1, \dots, u_{i,n_i}^1).$$

Liefern multilin. Abb.:

$$\beta_{j_1, \dots, j_r}: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_r) \mapsto \prod_{i=1}^r u_{j_i}^i(v_i)$$

Leisten:

$$\beta_{j_1, \dots, j_r}(v_{k_1}^1, \dots, v_{k_r}^r) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & (j_1, \dots, j_r) = (k_1, \dots, k_r), \\ 0_{\mathbb{K}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wissen: Es gibt lineare Abb.

$\varphi_{j_1, \dots, j_r}: V_1 \otimes \dots \otimes V_r \rightarrow \mathbb{K}, v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto \beta_{j_1, \dots, j_r}(v_1, \dots, v_r)$.
Betrachte Lin.komb.

$$\sum a_{k_1, \dots, k_r} v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r = 0_{V_1 \otimes \dots \otimes V_r}$$

Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{j_1, \dots, j_r} \left(\sum a_{k_1, \dots, k_r} v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r \right) \\ &= \sum a_{k_1, \dots, k_r} \varphi_{j_1, \dots, j_r}(v_{k_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{k_r}^r) = a_{j_1, \dots, j_r} \end{aligned} \quad \square$$