Definition V, W $\mathbb{k}$-VR. Eine multilineare Abb. $\varphi: V^r \to W$ heißt *alternierend*, falls

$$\varphi(v_1, \dots, v_r) = 0_W \quad \text{sobald } v_i = v_j \text{ für } i \neq j.$$

Beispiel Haben alternierende multilineare Abb.:

$$(\mathbb{k}^n)^n \to \mathbb{k}, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n).$$

Beispiel Das Kreuzprodukt liefert alt. multlin. Abb.:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Seien V und W $\mathbb{k}$-VR. Dann:

$$\mathrm{AltLin}(V^r, W) := \{\varphi: V^r \to W;\ \varphi \text{ alt. multilin.}\} \leq_{\mathbb{k}} \mathrm{MultLin}(V, \dots, V; W).$$

Ziel Zu geg. $\mathbb{k}$-VR V, r finde $\mathbb{k}$-VR U mit

$$\mathrm{AltLin}(V^r, W) \cong \mathrm{Hom}(U, W).$$

Konstruktion (Äußeres Produkt). Sei V $\mathbb{k}$-VR.

Schritt 1 Bilde frei erz. $\mathbb{k}$-VR über V^r:

$$F(V^r) := \bigoplus_{(v_1, \dots, v_r) \in V^r} \mathbb{k} \cdot (v_1, \dots, v_r).$$

$F(V^r)$ hat Basis $(1_{\mathbb{k}} (v_1, \dots, v_r);\ (v_1, \dots, v_r) \in V^r)$.

Schritt 2 Sei $R^a(V^r) \leq_{\mathbb{k}} F(V^r)$ der UVR erz. von

$$1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_r) - 1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) - 1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_i', \dots, v_r),$$

$$1_{\mathbb{k}} (v_1, \dots, a \cdot v_i, \dots, v_r) - a \cdot (v_1, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

$$1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_r).$$

$R^a(V^r)$ ist "UVR der alternierenden multilinearen Relationen".

Schritt 3 *r-faches äußeres Produkt*, auch *Dachprodukt*:

$$\Lambda^r V := \underbrace{V \wedge \dots \wedge V}_{r\text{-mal}} := F(V^r) / R^a(V).$$

Haben lineare Abbildung

$$\pi^a: F(V^r) \to \Lambda^r V$$

$$1_{\mathbb{k}} (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r := 1_{\mathbb{k}} (v_1, \dots, v_r) + R^a(V^r)$$

__Bemerkung__ V $\mathbb{k}$-VR. Betrachte

$$\Lambda^r V = F(V^r) / R^a(V^r)$$

und Elemente der Form

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r = 1_{\mathbb{k}} \cdot (v_1, \dots, v_r) + R^a(V^r).$$

__Rechenregeln:__

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i + v_i' \wedge \dots \wedge v_r \overset{①}{=} v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r + v_1 \wedge \dots \wedge v_i' \wedge \dots \wedge v_r,$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge a \cdot v_i \wedge \dots \wedge v_r \overset{②}{=} a \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r),$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v} \wedge \dots \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{v} \wedge \dots \wedge v_r \overset{③}{=} 0_{\Lambda^r V},$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_r \overset{④}{=} -(v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r).$$

Dabei: Erste drei Regeln klar nach Definition von $R^a(V^r) \leq_{\mathbb{k}} F(V^r)$.

Zur vierten Regel: Haben

$$\begin{aligned} 0_{\Lambda^r V} &\overset{③}{=} v_1 \wedge \dots \wedge v_i + v_j \wedge \dots \wedge v_i + v_j \wedge \dots \wedge v_r \\ &\overset{①}{=} v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r \leftarrow 0_{\Lambda^r V} \\ &\quad + v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_r \\ &\quad + v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_r \\ &\quad + v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_r \leftarrow 0_{\Lambda^r V}. \end{aligned}$$

__Bemerkung__ V $\mathbb{k}$-VR. Die Elemente der Form $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ in $\Lambda^r V$ heissen *zerlegbar*. Haben:

(i) Jedes Element von $\Lambda^r V$ ist Summe von zerlegbaren Elem.

(ii) Es gibt auch __nicht__ zerlegbare Elemente, beispielsweise

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4.$$

Satz V $\mathbb{k}$-VR. Haben alternierende multilin. Abb.

$$\pi^a : V^r \to \Lambda^r V, \quad (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r .$$

Weiter: Zu jeder alt. multilin. Abb. $\Phi : V^r \to W$ gibt es eind. best. lineare Abb.

$$\overline{\Psi} : \Lambda^r V \longrightarrow W$$

sodass

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[rr, "\Phi", "\text{alternierend multilinear}"'] \arrow[dr, "\pi^a"', "\text{altern. multilin}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & W \\
& \Lambda^r V \arrow[ur, "\text{linear}", "{\overline{\Psi} : v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis Zeige π^a alt., multilin. Wie bei $\otimes$.

Sei $\Phi : V^r \to W$ alt. multilin. Dann:

$$\begin{tikzcd}
F(V^r) \arrow[rr, "{\Phi' : 1_{\mathbb{k}}(v_1, \dots, v_r) \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)}", "\text{linear}"'] \arrow[ddr, bend right, "\pi^a"', "\text{linear}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & W \\
& V^r \arrow[ul, "\iota"'] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[d, "\pi^a"] & \\
& \Lambda^r V \arrow[uur, bend right, "\overline{\Psi}"', "\text{linear}"] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\iota(v_1, \dots, v_r) = 1_{\mathbb{k}}(v_1, \dots, v_r)$, $R^a(V^r) \subseteq \ker(\Phi')$. $\square$

Folgerung V $\mathbb{k}$-VR. Dann hat man kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[rr, "\pi^a"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Lambda^r V \\
& \bigoplus^r V \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

mit ψ linear, $\psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = v_1 \wedge \dots \wedge v_r$.

Folgerung V, W $\mathbb{k}$-VR. Dann hat man zueinander inverse VR-Isomorphismen:

$$\mathrm{AltLin}(V^r, W) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^r V, W)$$

$$\Phi \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_r)]$$

$$[(v_1, \dots, v_r) \mapsto \psi(v_1 \wedge \dots \wedge v_r)] \leftarrow\!\shortmid \overline{\Psi}$$

Folgerung Sei $\varphi : V \to W$ lineare Abb. von $\mathbb{k}$-VR.

Dann:

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "{(v_1, \dots, v_r) \mapsto (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r))}", "\varphi \times \dots \times \varphi"'] \arrow[d, "\pi^a_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W^r \arrow[d, "\pi^a_W"] \\
\Lambda^r V \arrow[r, "\varphi \wedge \dots \wedge \varphi", "{v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mapsto \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_r)}"'] & \Lambda^r W
\end{tikzcd}$$

mit eind. best. lin. Abb. $\varphi \wedge \dots \wedge \varphi$.

__Lemma__ V $\mathbb{K}$-VR, $(v_1, \dots, v_n)$ Basis für V, $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis, $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$.

Dann:

$$\beta_{i_1, \dots, i_r} : V^r \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(w_1, \dots, w_r) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sg}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}}^*(w_1) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(w_r)$$

alternierend und multilinear. Weiter, für alle $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$:

$$\beta_{i_1, \dots, i_r}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & (i_1, \dots, i_r) = (j_1, \dots, j_r), \\ 0_{\mathbb{K}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

__Beweis__ klar: $\beta_{i_1, \dots, i_r}$ ist multilinear.

Weiter:

$$\beta_{i_1, \dots, i_r}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) = v_{i_1}^*(v_{j_1}) \cdots v_{i_r}^*(v_{j_r}) + \sum_{\mathrm{id} \neq \sigma \in S_r} \mathrm{sg}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}}^*(v_{j_1}) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(v_{j_r}).$$

Für $\sigma \neq \mathrm{id}$: $i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}$ nicht mehr streng aufsteigend, d.h. $(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}) \neq (j_1, \dots, j_r)$.

Also, für $\sigma \neq \mathrm{id}$:

$$v_{i_{\sigma(1)}}^*(v_{j_1}) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(v_{j_r}) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Folglich

$$\beta_{i_1, \dots, i_r}(v_{j_1}, \dots, v_{j_r}) = v_{i_1}^*(v_{j_1}) \cdots v_{i_r}^*(v_{j_r}) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & (i_1, \dots, i_r) = (j_1, \dots, j_r), \\ 0_{\mathbb{K}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen: $\beta_{i_1, \dots, i_r}$ alternierend. Sei $(w_1, \dots, w_r) \in V^r$ mit $w_i = w_j$ für $i \neq j$. Zu zeigen

$$\beta_{i_1, \dots, i_r}(w_1, \dots, w_r) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Betrachte Transposition $\tau := (i, j) \in S_r$. Haben

$$S_r = A_r \sqcup A_r \circ \tau$$

mit $A_r := \mathrm{kern}(\mathrm{sg}) \leq S_r$. Setzt:

$$\beta_{i_1, \dots, i_r}(w_1, \dots, w_r) = \sum_{\sigma \in A_r} \underbrace{\mathrm{sg}(\sigma)}_{1} v_{i_{\sigma(1)}}^*(w_1) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(w_r)$$

$$+ \sum_{\sigma \in A_r \circ \tau} \underbrace{\mathrm{sg}(\sigma)}_{-1} v_{i_{\sigma(1)}}^*(w_1) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(w_r)$$

$$= 0_{\mathbb{K}}. \qquad \square$$

<u>Satz</u> V $\mathbb{k}$-VR mit Basis $(v_1,\dots,v_n)$. Dann:

$$\mathcal{E} := (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} ;\ 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$$

Basis für $\Lambda^r V$. Insbesondere hat man

$$\dim(\Lambda^r V) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} .$$

<u>Beweis</u> Zu "$\mathcal{E}$ erzeugend". Reicht zu zeigen: Jedes $w_1 \wedge \dots \wedge w_r$ ist Linearkomb. über $\mathcal{E}$.

Haben
$$w_i = a_1^i \cdot v_1 + \dots + a_n^i v_n$$

Rechnen in $\Lambda^r V$:

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \dots \wedge w_r &= \left(\sum a_j^1 \cdot v_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum a_j^r \cdot v_j\right) \\ &= \sum_{(j_1,\dots,j_r)} (a_{j_1}^1 \cdots a_{j_r}^r) \cdot v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_r} \\ &= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_r) \\ i_1 < \dots < i_r}} a_{i_1,\dots,i_r} \cdot v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r} , \end{aligned}$$

wobei $a_{i_1,\dots,i_r}$ Summe von $\pm a_{j_1}^1 \cdots a_{j_r}^r$ mit $\{i_1,\dots,i_r\} = \{j_1,\dots,j_r\}$.

Zu "$\mathcal{E}$ linear unabhängig". Sei $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ duale Basis zu $(v_1,\dots,v_n)$. Lemma:

$$\beta_{i_1,\dots,i_r} : V^r \to \mathbb{k}$$
$$(w_1,\dots,w_r) \mapsto \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sg}(\sigma)\, v_{i_{\sigma(1)}}^*(w_1) \cdots v_{i_{\sigma(r)}}^*(w_r)$$

alternierend, multilinear und

$$\beta_{i_1,\dots,i_r}(v_{j_1},\dots,v_{j_r}) = \begin{cases} 1_{\mathbb{k}}, & (i_1,\dots,i_r) = (j_1,\dots,j_r), \\ 0_{\mathbb{k}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Liefert lineare Abb.:

$$\varphi_{i_1,\dots,i_r} : \Lambda^r V \to \mathbb{k}$$
$$w_1 \wedge \dots \wedge w_r \mapsto \beta_{i_1,\dots,i_r}(w_1,\dots,w_r)$$

Sei
$$0_{\Lambda^r V} = \sum_{k_1 < \dots < k_r} a_{k_1,\dots,k_r} \cdot v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_r}$$

Dann:
$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{k}} &= \varphi_{i_1,\dots,i_r}\left(\sum a_{k_1,\dots,k_r} \cdot v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_r}\right) \\ &= \sum a_{k_1,\dots,k_r} \cdot \varphi_{i_1,\dots,i_r}(v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_r}) \\ &= \sum a_{k_1,\dots,k_r} \cdot \beta_{i_1,\dots,i_r}(v_{k_1},\dots,v_{k_r}) \\ &= a_{i_1,\dots,i_r} . \end{aligned}$$

$\square$