__Beispiel__ $\mathbb{K}$ Körper. Die Gruppe $GL(n;\mathbb{K})$ "operiert" auf der Menge $\mathbb{K}^n$:

$$GL(n;\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (A,x) \mapsto A\cdot x.$$

Dabei stets

$$E_n \cdot x = x, \qquad (AB)\cdot x = A\cdot(B\cdot x).$$

__Definition__ G Gruppe, X Menge. Operation von G auf X: Abbildung

$$\mu : G \times X \to X, \quad (g,x) \mapsto \mu(g,x) =: g\cdot x,$$

sodass stets

$$e_G \cdot x = x, \qquad (g_2 g_1)\cdot x = g_2\cdot(g_1\cdot x).$$

__Beispiel__ X Menge. Permutationsgruppe:

$$S(X) := \{\sigma : X \to X;\ \sigma \text{ bijektiv}\}$$

mit $\sigma_2\sigma_1 := \sigma_2 \circ \sigma_1$. Haben Operation:

$$S(X) \times X \to X, \quad \sigma\cdot x := \sigma(x).$$

__Bemerkung__ G operiere auf X. Dann: Jedes $g \in G$ liefert Bijektion:

$$T_g : X \to X, \quad x \mapsto g\cdot x,$$

Translation um g. Umkehrabbildung:

$$T_g^{-1} = T_{g^{-1}},$$

denn

$$T_{g^{-1}}(T_g(x)) = g^{-1}\cdot(g\cdot x) = (g^{-1}g)\cdot x = e_G\cdot x = x,$$

d.h. $T_{g^{-1}} \circ T_g = \mathrm{id}_X$. Ebenso $T_g \circ T_{g^{-1}} = \mathrm{id}_X$.

__Bemerkung__ Sei $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g\cdot x$ Gruppenoperation.

(i) Jedes $H \leq G$ operiert auf X:

$$H \times X \to X, \quad (h,x) \mapsto h\cdot x$$

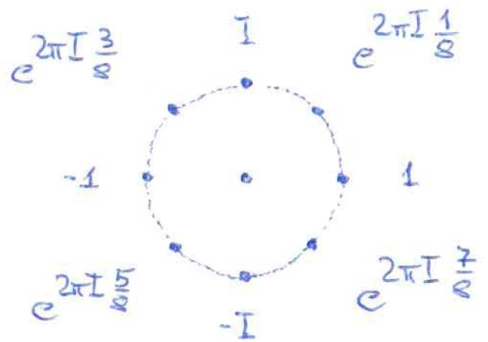
(ii) Ist $\varphi : G' \to G$ Grp.hom., so hat man Operation

$$G' \times X \to X, \quad g'\cdot x := \varphi(g')\cdot x.$$

Beispiel Gruppe der n-ten komplexen Einheitswurzeln:

$$EW_n := \{\zeta \in \mathbb{C}^*;\ \zeta^n = 1\}$$
$$= \{e^{2\pi I \frac{k}{n}};\ k = 0, \dots, n-1\} \leq \mathbb{C}^*.$$

z.B. für $n = 8$:



Haben Iso von Gruppen:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to EW_n, \quad \overline{k} \mapsto e^{2\pi I \frac{k}{n}}.$$

Somit Operation

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \overline{k} \cdot z := e^{2\pi I \frac{k}{n}} \cdot z.$$

Allgemeiner, für $\overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \overline{k} \cdot z := e^{2\pi I \frac{mk}{n}} \cdot z.$$

Definition Sei $G \times X \to X$ Gruppenoperation.

(i) Bahn von $x \in X$: $G \cdot x := \{g \cdot x;\ g \in G\}$.

(ii) Fixpunkt: $x \in X$ mit $G \cdot x = \{x\}$.

(iii) Fixpunktmenge: $X^G := \{x \in X;\ x \text{ ist FP}\}$.

(iv) Isotropiegruppe von $x \in X$: $G_x := \{g \in G;\ g \cdot x = x\}$.

Bemerkung Sei $G \times X \to X$ Gruppenoperation.

(i) Stets $G_x \leq G$.

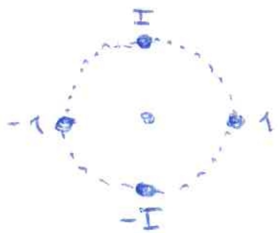
(ii) Stets x Fixpunkt $\iff G_x = G$.

Beispiel $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ operiert auf $\mathbb{C}$ durch

$$\overline{k} \cdot z := e^{2\pi I \frac{2k}{8}} \cdot z = e^{2\pi I \frac{k}{4}} \cdot z.$$

Dann: $0 \in \mathbb{C}$ einziger Fixpkt. Bahn von $1 \in \mathbb{C}$:

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cdot 1 = \{\overline{k} \cdot 1;\ k = 0, \dots, 7\}$$
$$= \{1, I, -1, -I\}$$



Isotropiegrp. von $0 \in \mathbb{C}$: $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Isotropiegrp. von $1 \in \mathbb{C}$: $\{\overline{0}, \overline{4}\} \leq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Erinnerung G Gruppe, $H \leq G$.

(i) *Nebenklasse* von $g \in G$: $gH = \{gh;\ h \in H\}$.

(ii) *Homogener Raum*: $G/H = \{gH;\ g \in G\}$.

(iii) *Index* von H in G: $[G:H] = |G/H|$.

(iv) Satz von Lagrange: $|G| = [G:H] \cdot |H|$.

Satz Sei $G \times X \to X$ Gruppenoperation.

(i) Stets $G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1}$.

(ii) Für jedes $x \in X$ Bijektion

$$\beta_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x, \quad gG_x \mapsto g \cdot x$$

(iii) Haben stets

$$|G \cdot x| = [G : G_x], \qquad |G| = |G \cdot x| \cdot |G_x|.$$

Beweis Zu (i). Für jedes $h \in G$ gilt

$$
\begin{aligned}
h \in G_{g \cdot x} &\iff h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \\
&\iff g^{-1}hg \cdot x = x \\
&\iff g^{-1}hg \in G_x \iff h \in g G_x g^{-1}.
\end{aligned}
$$

Zu (ii). Klar: β_x wohldef. und surjektiv.

Zeigen: β_x injektiv. Haben

$$
\begin{aligned}
\beta_x(gG_x) = \beta_x(hG_x) &\implies g \cdot x = h \cdot x \\
&\implies h^{-1}g \in G_x \\
&\implies gG_x = hG_x.
\end{aligned}
$$

Zu (iii): klar mit (ii) und Lagrange. $\square$

Definition $G \times X \to X$ Gruppenoperation.

(i) *Translat* von $Y \subseteq X$ um $g \in G$:

$$g \cdot Y = \{g \cdot y;\ y \in Y\} \subseteq X$$

(ii) $Y \subseteq X$ heisst *G-invariant*, falls

$$g \cdot Y = Y \quad \text{für alle } g \in G$$

(iii) *Stabilisator* von $Y \subseteq X$:

$$G_Y := \{g \in G;\ g \cdot Y = Y\} \subseteq G$$

Bemerkung $G \times X \to X$ Gruppenop., $Y \subseteq X$.

(i) Haben $G_Y \leq G$ und Operation

$$G_Y \times Y \longrightarrow Y, \quad (g, y) \mapsto g \cdot y$$

(ii) Y ist G-invariant $\iff G_Y = G$.

Erinnerung Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n .$$

Damit: $\mathbb{R}^n$ euklidischer VR. Orthogonale Matrix: $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R})$ mit

$$A^{-1} = A^t$$

Für $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(i) A orthogonal.

(ii) μ_A Isometrie, d.h. stets $\langle A\cdot x, A\cdot y\rangle = \langle x, y\rangle$.

(iii) Spalten von A bilden ONB für $\mathbb{R}^n$.

(iv) Zeilen von A bilden ONB für $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung Haben Untergruppe in $GL(n;\mathbb{R})$:

$$O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R});\ A \text{ orthogonal}\}.$$

Klar: $O(n) \subseteq GL(n;\mathbb{R})$ und $E_n \in O(n)$. Weiter, für $A \in O(n)$:

$$A^{-1} = A^t \in O(n).$$

Für $A, B \in O(n)$: $A\cdot B \in O(n)$ mit

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A\cdot B)^t.$$

Nenne $O(n)$ orthogonale Gruppe.

Beispiel Haben

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix};\ 0 \le \alpha < 2\pi \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix};\ 0 \le \alpha < 2\pi \right\}.$$

Definition Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$:

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, x\rangle = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Satz $GL(n;\mathbb{R})$ operiere auf $\mathbb{R}^n$ durch $(A,x) \mapsto A\cdot x$. Dann:

$$O(n) = GL(n;\mathbb{R})_{S^{n-1}}.$$

Beweis Zeigen "$\subseteq$". Für $A \in O(n)$ und $x \in S^{n-1}$:

$$\langle A\cdot x, A\cdot x\rangle = \langle x, x\rangle = 1.$$

Zeigen "$\supseteq$". Sei $A \in GL(n;\mathbb{R})_{S^{n-1}}$. Für $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle A\cdot v, A\cdot v\rangle = \|v\|^2 \cdot \left\langle A\cdot \tfrac{1}{\|v\|}\cdot v,\ A\cdot \tfrac{1}{\|v\|}\cdot v \right\rangle$$
$$= \|v\|^2 = \langle v, v\rangle.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle A\cdot x, A\cdot y\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle A\cdot(x+y), A\cdot(x+y)\rangle - \langle A\cdot x, A\cdot x\rangle - \langle A\cdot y, A\cdot y\rangle\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle\right)$$
$$= \langle x, y\rangle.$$

$\square$