Definition $G \times X \to X$ Gruppenoperation.

Bahnenraum:

$$X/G := \{G \cdot x;\ x \in X\}.$$

Beispiel G Gruppe, $H \leq G$. Operation:

$$H \times G \to G, \quad h \cdot g := g h^{-1}.$$

Bahnenraum: Homogener Raum zu H:

$$G/H = \{H \cdot g;\ g \in G\} = \{gH;\ g \in G\}.$$

Satz $G \times X \to X$ Gruppenoperation. Haben Äquivalenzrelation auf X:

$$x_1 \sim_G x_2 \ :\Longleftrightarrow\ x_2 = g \cdot x_1 \text{ mit } g \in G$$

Äquivalenzklasse von $x \in X$:

$$\{x' \in X;\ x' \sim_G x\} = G \cdot x.$$

Insbes. hat man Zerlegung

$$X = \bigsqcup_{G \cdot x \in X/G} G \cdot x = \bigsqcup_{i \in I} G \cdot x_i$$

wobei $\{x_i;\ i \in I\}$ Repr. Syst für "$\sim_G$".

Beweis Zeigen: "$\sim_G$" ist Äquivalenzrel.

Reflexivität: $x = e_G \cdot x \implies x \sim_G x$.

Symmetrie: Haben stets

$$x_1 \sim_G x_2 \implies x_2 = g \cdot x_1$$
$$\implies g^{-1} \cdot x_2 = x_1 \implies x_2 \sim_G x_1.$$

Transitivität: Seien $x_1 \sim_G x_2$, $x_2 \sim_G x_3$. Dann

$$x_2 = g \cdot x_1,\ x_3 = h \cdot x_2 \implies x_3 = hg \cdot x_1$$

Somit $x_1 \sim_G x_3$. □

Bahnengleichung $G \times X \to X$ Gruppenop. $\{x_i;\ i \in I\}$ Rep. Syst. für "$\sim_G$". Dann:

$$|X| = \sum_{i \in I} |G \cdot x_i| = \sum_{i \in I} [G : G_{x_i}].$$

Beweis Erstes "=": Voriger Satz.

Zweites "=": Haben bereits gezeigt:

$$|G \cdot x_i| = |G/G_{x_i}|$$
$$=: [G : G_{x_i}].$$ □

Bemerkung G Gruppe. Dann: G operiert auf sich selbst per *Konjugation*:

$$G \times G \to G, \quad g \cdot h := ghg^{-1}.$$

Für $h \in G$:

$$G \cdot h = \{ghg^{-1};\ g \in G\},$$

Konjugationsklasse von h in G.

Beispiel Betrachte $G = GL(2;\mathbb{C})$. Mögliche Konjugationsklassen:

$$\{S \cdot A \cdot S^{-1};\ S \in G\},$$

wobei A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Verwende dafür Jordansche NF.

Definition G Gruppe.

(i) *Zentralisator* von $h \in G$:

$$Z_h := \{g \in G;\ gh = hg\}$$

(ii) *Zentrum* von G:

$$Z_G := \{g \in G;\ gh = hg \text{ f. alle } h \in G\}$$

Bemerkung G Gruppe.

(i) Haben $Z_h \leq G$ für jedes $h \in G$.

(ii) Haben $Z_G \leq G$, Z_G abelsch und

$$Z_G = \bigcap_{h \in G} Z_h.$$

Klassengleichung G Gruppe. Betrachten Operation

$$G \times G \to G, \quad g \cdot h = ghg^{-1}.$$

Dann, für jedes $h \in G$:

$$G_h = Z_h, \qquad h \text{ Fixpkt} \iff h \in Z_G.$$

Weiter, falls $G = G \cdot h_1 \sqcup \ldots \sqcup G \cdot h_r$:

$$|G| = |Z_G| + \sum_{[G:Z_{h_i}] \geq 2} [G : Z_{h_i}].$$

Beweis Mit Bahnengleichung:

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} |G \cdot h_i| = \sum_{|G \cdot h_i| = 1} |G \cdot h_i| + \sum_{|G \cdot h_i| \geq 2} |G \cdot h_i|$$

$$= |Z_G| + \sum_{[G:G_{h_i}] \geq 2} [G : G_{h_i}]$$

□

Erinnerung Schreiben $X_n := \{1, \ldots, n\}$.

Symmetrische Gruppe:

$$S_n := \{\sigma : X_n \to X_n \,;\, \sigma \text{ bijektiv}\}$$

mit Verknüpfung $\sigma_1 \sigma_2 := \sigma_1 \circ \sigma_2$. Haben $|S_n| = n!$.

Definition Nenne $\vartheta \in S_n$ einen *k-Zykel*, falls pw. versch. $i_1, \ldots, i_k \in X_n$ ex. mit

* $\vartheta(i_1) = i_2, \ldots, \vartheta(i_{k-1}) = i_k, \vartheta(i_k) = i_1$,
* $\vartheta(j) = j$ für alle $j \in X_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Schreiben dann $\vartheta = (i_1, \ldots, i_k)$.

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[r, "\vartheta"] & i_2 \arrow[r, "\vartheta"] & \cdots \arrow[r, "\vartheta"] & i_{k-1} \arrow[r, "\vartheta"] & i_k \arrow[llll, bend left, "\vartheta"] \end{tikzcd}$$

Beispiel In S_3 ist jedes El. ein Zykel:

$id_{X_3} = (1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.

In S_4 ist nicht jedes El. ein Zykel; z.B.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (1,2)(3,4).$$

Bemerkung Betrachte $\vartheta = (i_1, \ldots, i_k) \in S_n$. Haben:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (\vartheta^0(i_1), \vartheta^1(i_1), \ldots, \vartheta^{k-1}(i_1)).$$

Somit $\operatorname{ord}(\vartheta) = k$ und man hat Iso

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \langle \vartheta \rangle, \quad \bar{a} \mapsto \vartheta^a(i_1).$$

Bemerkung Darstellung $(i_1, \ldots, i_k)$ für Zykel ist nicht eindeutig, z.B.:

$$(1,2) = (2,1)$$

Eindeutigkeit durch $i_1 < i_j$ für $j = 2, \ldots, k$.

Definition Nenne $(i_1, \ldots, i_k), (j_1, \ldots, j_l) \in S_n$ *elementfremd*, falls

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset.$$

Bemerkung Seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \in S_n$ elementfremd. Dann: $\vartheta_1 \vartheta_2 = \vartheta_2 \vartheta_1$.

__Satz__ Jedes $\sigma \in S_n$ besitzt Darstellung
$$\sigma = \vartheta_1 \cdots \vartheta_s$$
mit elementfremden Zykeln ϑ_j. Dabei
$$\sigma(i) = i \implies \vartheta_j(i) = i \text{ für } j = 1, \dots, s.$$

__Beweis__ Verwenden Induktion über
$$m := \text{Anzahl der } i \in X_n \text{ mit } \sigma(i) \neq i.$$
Falls $m = 0$: $\sigma = id_{X_n}$ ✓

Sei $m > 0$. Wähle i_1 mit $\sigma(i_1) \neq i_1$. Dann:
$$X_n \text{ endl.} \implies \sigma^{l_1}(i_1) = \sigma^{l_2}(i_1) \text{ mit } l_1 > l_2 \geq 1.$$
Insbes. $\sigma^{l_1 - l_2}(i_1) = i_1$. Sei $k \geq 1$ min. mit $\sigma^k(i_1) = i_1$. Liefert Zykel:
$$\vartheta_1 := (i_1, \dots, i_k) := (\sigma^0(i_1), \dots, \sigma^{k-1}(i_1)).$$
Dann, für $\sigma' := \vartheta_1^{-1} \sigma$:
$$\sigma'(i) = \vartheta_1^{-1}(\sigma(i)) = \begin{cases} i, & i \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \sigma(i), & i \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$
IV: $\sigma' = \vartheta_2 \cdots \vartheta_s$ mit el. fremden ϑ_j.

Somit $\sigma = \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_s$ tut's. □

__Satz__ Sei $\sigma = \vartheta_1 \cdots \vartheta_s \in S_n$ mit elementfremden Zykeln $\vartheta_l = (i_{l1}, \dots, i_{lk_l})$. Setze
$$X_n^\sigma := \{j \in X_n;\ \sigma(j) = j\}.$$
Dann:
$$m := \operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}(k_1, \dots, k_s).$$
Insbes. $\langle \sigma \rangle = \{e_G, \sigma, \dots, \sigma^{m-1}\}$. Weiter
$$X_n = \bigsqcup_{j \in X_n^\sigma} \{j\} \sqcup \bigsqcup_{l=1}^{s} \{i_{l1}, \dots, i_{lk_l}\},$$
wobei $B_l := \{i_{l1}, \dots, i_{lk_l}\}$ die nicht-trivialen Bahnen von $\langle \sigma \rangle$ auf X_n und $|B_l| = k_l$.

__Beweis__ Wegen $\vartheta_i \vartheta_j = \vartheta_j \vartheta_i$:
$$\sigma^k = \vartheta_1^k \cdots \vartheta_s^k.$$
Damit: $m = \operatorname{kgV}(k_1, \dots, k_s)$. Weiter
$$\sigma^k \cdot i = \vartheta_1^k \cdots \vartheta_s^k \cdot i.$$
Damit: B_l die nicht-triv. Bahnen von $\langle \sigma \rangle$. □

Definition Typ von $\sigma \in S_n$: $(k_1, \dots, k_s)$ mit

$$k_1 \leq \dots \leq k_s, \qquad k_i := |B_i|,$$

wobei $B_1, \dots, B_s \subseteq X_n$ die nicht-triv. $\langle\sigma\rangle$-Bahnen.

Satz Seien $\tau, \tau' \in S_n$. Dann äquivalent:

(i) $\tau' = \sigma \tau \sigma^{-1}$ mit $\sigma \in S_n$

(ii) τ, τ' haben denselben Typ.

Lemma Betrachte k-Zykel $(i_1, \dots, i_k) \in S_n$. Dann, für jedes $\sigma \in S_n$:

$$\sigma\,(i_1, \dots, i_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)).$$

Beweis Haben für jedes $a \in X_n$:

$$\sigma(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1}(a) = \begin{cases} \sigma(\sigma^{-1}(a)), & \sigma^{-1}(a) \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \\ \sigma(i_{j+1}), & \sigma^{-1}(a) = i_j,\ 1 \leq j < k, \\ \sigma(i_1), & \sigma^{-1}(a) = i_k. \end{cases}$$

Weiter:

$$(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))(a) = \begin{cases} a, & a \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}, \\ \sigma(i_{j+1}), & a = \sigma(i_j),\ 1 \leq j < k, \\ \sigma(i_1), & a = \sigma(i_k). \end{cases}$$

□

Beweis Satz "(i) ⟹ (ii)". Wähle Darstellung

$$\tau = (i_{11}, \dots, i_{1k_1}) \cdots (i_{s1}, \dots, i_{sk_s})$$

als Produkt el.-fremder Zykeln. Dann:

$$\tau' = \sigma\,(i_{11}, \dots, i_{1k_1}) \cdots (i_{s1}, \dots, i_{sk_s})\,\sigma^{-1}$$

$$= \sigma(i_{11}, \dots, i_{1k_1})\sigma^{-1} \cdots \sigma(i_{s1}, \dots, i_{sk_s})\sigma^{-1}$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} (\sigma(i_{11}), \dots, \sigma(i_{1k_1})) \cdots (\sigma(i_{s1}), \dots, \sigma(i_{sk_s})).$$

Somit τ und $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ vom gleichen Typ.

"(ii) ⟹ (i)". Haben Darst. als Produkte el.-fremder Zykel:

$$\tau = (i_{11}, \dots, i_{1k_1}) \cdots (i_{s1}, \dots, i_{sk_s}),$$

$$\tau' = (i'_{11}, \dots, i'_{1k_1}) \cdots (i'_{s1}, \dots, i'_{sk_s}).$$

Wähle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(i_{lj}) = i'_{lj}$. Lemma: $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$. □

Folgerung Die Konjugationsklassen in S_n sind:

$$C_{k_1, \dots, k_s} := \{\sigma \in S_n;\ \sigma \text{ vom Typ } (k_1, \dots, k_s)\}$$

Beispiel Konjugationsklassen im S_4: $C_1 = \{\mathrm{id}_{X_4}\}$, Klassen C_2, C_3, C_4 der 2-, 3-, 4-Zykel und

$$C_{2,2} = \{(1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}.$$