Definition $\mathbb{K}$ Körper, G Gruppe. *Matrixdarstellung* von G: Gruppenhom.

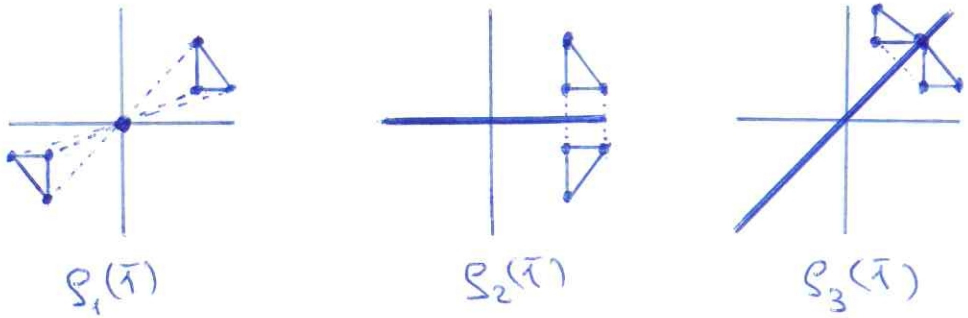
$$\rho : G \longrightarrow GL(n;\mathbb{K}).$$

Beispiel Betrachte $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Haben Matrixdarstellungen $\rho_i : G \to GL(2;\mathbb{R})$:

$$\rho_1: \quad \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2: \quad \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3: \quad \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Bemerkung Sei $\rho : G \to GL(n;\mathbb{K})$ Matrixdarst. Liefert Operation:

$$G \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (g,v) \mapsto g \cdot v := \rho(g) \cdot v.$$

Dabei: Jedes $T_g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto g \cdot v$ linear.

Beispiel Betrachte $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, Matrixdarst. $\rho_i : G \to GL(2;\mathbb{R})$. Zugehörige Operationen μ_i:

$$\mu_1: \bar{0} \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad \bar{1} \cdot (x_1, x_2) = (-x_1, -x_2),$$

$$\mu_2: \bar{0} \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad \bar{1} \cdot (x_1, x_2) = (x_1, -x_2),$$

$$\mu_3: \bar{0} \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad \bar{1} \cdot (x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Erinnerung V $\mathbb{K}$-VR. *Automorphismengruppe*:

$$\mathrm{Aut}(V) := \{\varphi : V \to V;\ \varphi \text{ VR-Iso.}\}$$

mit Komposition als Verknüpfung.

Definition V $\mathbb{K}$-VR, G Gruppe. *Darstellung* von G auf V: Gruppenhom.

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V).$$

Bemerkung V n-dim. $\mathbb{K}$-VR mit Basis $\mathcal{B}$. Haben Gruppeniso.:

$$\Psi_{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V) \to GL(n;\mathbb{K}), \quad \varphi \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi).$$

Damit Bijektion:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Darst. von} \\ G \text{ auf } V\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{Matrixdarst.} \\ G \to GL(n;\mathbb{K})\end{matrix}\right\}, \quad \rho \mapsto \Psi_{\mathcal{B}} \circ \rho.$$

__Definition__ G Gruppe.

(i) Eine Operation $G \times V \to V$ auf einem $\mathbb{k}$-VR V heißt *linear*, falls jedes

$$T_g : V \to V, \quad v \mapsto g \cdot v$$

eine lineare Abbildung ist.

(ii) *G-Modul*: $\mathbb{k}$-VR mit linearer Op. $G \times V \to V$.

__Satz__ G Gruppe, V $\mathbb{k}$-VR. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Darstellungen}\\ \rho: G \to \mathrm{Aut}(V)\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Lineare Operat.}\\ \mu: G \times V \to V\end{matrix}\right\}$$

$$\rho \mapsto \mu_\rho : g \cdot v := \rho(g)(v)$$

$$\rho_\mu : g \mapsto [T_g : v \mapsto g \cdot v] \leftarrow\!\shortmid \mu$$

__Beweis__ Zeigen: μ_ρ ist lineare Operation.

Haben

$$e_G \cdot v = \rho(e_G)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v.$$

Weiter

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = \rho(g_1)(\rho(g_2)(v)) = (\rho(g_1) \circ \rho(g_2))(v)$$
$$= \rho(g_1 g_2)(v) = (g_1 g_2) \cdot v.$$

Somit μ_ρ Operation. Klar: $T_g = \rho(g)$ linear.

Zeigen: $\rho_\mu : G \to \mathrm{Aut}(V)$ ist Homomorphismus.

Haben für jedes $v \in V$:

$$\rho_\mu(g_1 g_2)(v) = T_{g_1 g_2}(v) = (g_1 g_2) \cdot v$$
$$= g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = T_{g_1}(T_{g_2}(v))$$
$$= (T_{g_1} \circ T_{g_2})(v) = (\rho_\mu(g_1) \circ \rho_\mu(g_2))(v).$$

Zeigen: $\rho \mapsto \mu_\rho$ und $\mu \mapsto \rho_\mu$ invers zueinander.

Haben stets

$$\mu_{\rho_\mu}(g, v) = \rho_\mu(g)(v) = T_g(v) = \mu(g, v),$$

$$\rho_{\mu_\rho}(g)(v) = T_g(v) = \mu_\rho(g, v) = \rho(g)(v). \quad \square$$

__Definition__ Seien $G \times V \to V$ und $G \times V' \to V'$ lineare Operationen.

(i) Eine lin. Abb. $\varphi : V \to V'$ heißt *äquivariant*, falls stets $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_G(V, V') := \{\varphi : V \to V';\ \varphi \text{ lin., äquivar.}\}$.

(iii) *G-Modulhomomorphismus*: Äquivariante lin. Abb. von G-Moduln.

Definition Sei G Gruppe.

(i) Nenne zwei Darstellungen $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\varrho': G \to \mathrm{Aut}(V')$ *äquivalent* ($\varrho \sim \varrho'$), falls es VR-Iso. $\varphi: V \to V'$ gibt mit

$$\varrho'(g) = \varphi \circ \varrho(g) \circ \varphi^{-1} \text{ f. alle } g \in G.$$

(ii) Nenne zwei Matrixdarst. $\varrho, \varrho': G \to GL(n; \mathbb{k})$ *äquivalent* ($\varrho \sim \varrho'$), falls es $S \in GL(n; \mathbb{k})$ gibt mit

$$\varrho'(g) = S \cdot \varrho(g) \cdot S^{-1} \text{ f. alle } g \in G.$$

Bemerkung Betrachte eindim. $\mathbb{k}$-VR V.

Dann:

$$\mathrm{Aut}(V) \cong GL(1; \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^*$$

Somit, für je zwei Darst. $\varrho, \varrho': G \to \mathrm{Aut}(V)$:

$$\varrho \sim \varrho' \iff \varrho = \varrho'.$$

Beispiel Betr. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die Matrixdarst. $\varrho_i: G \to GL(2, \mathbb{R})$ mit

$$\varrho_1(\bar{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varrho_2(\bar{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3(\bar{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Frage: Wann $\varrho_i \sim \varrho_j$? Haben hier:

$$\varrho_i \sim \varrho_j \iff \varrho_j(\bar{1}) = S \varrho_i(\bar{1}) S^{-1} \text{ mit } S \in GL(2; \mathbb{R}).$$

Betrachte Eigenwerte von $\varrho_i(\bar{1})$:

* $\varrho_1(\bar{1})$ hat EW $-1, -1$,
* $\varrho_2(\bar{1}), \varrho_3(\bar{1})$ haben EW $1, -1$.

Somit $\varrho_1 \not\sim \varrho_2$, $\varrho_1 \not\sim \varrho_3$, $\varrho_2 \sim \varrho_3$.

Satz Seien $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\varrho': G \to \mathrm{Aut}(V')$ Darst.

Dann:

$$\varrho \sim \varrho' \iff \text{Es gibt Iso } \varphi: V \to V' \text{ von } G\text{-Moduln.}$$

Beweis Sei $\varrho \sim \varrho'$. Dann ex. Iso $\varphi: V \to V'$ mit

$$\varrho'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \varrho(g) \text{ f. alle } g \in G.$$

Damit

$$\varphi(g \cdot v) = \varphi(\varrho(g)(v)) = \varrho'(g)(\varphi(v)) = g \cdot \varphi(v).$$

Sei $\varphi: V \to V'$ Iso. von G-Moduln. Dann stets

$$\varrho'(g)(\varphi(v)) = g \cdot \varphi(v) = \varphi(g \cdot v) = \varphi(\varrho(g)(v)).$$

Somit

$$\varrho'(g) \circ \varphi = \varphi \circ \varrho(g) \text{ f. alle } g \in G. \quad \square$$

Satz Seien $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ und $\rho: G \to \mathbb{C}^*$ Darstellung. Dann gibt es

$$\zeta_i \in EW_{n_i} = \{\zeta \in \mathbb{C}^*;\ \zeta^{n_i} = 1\}$$

sodass stets

$$\rho(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) = \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r}.$$

Insbes.: Zugehörige lineare Op. auf $\mathbb{C}$:

$$(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) \cdot z = \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r} z.$$

Lemma Sei $\rho: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ Gruppenhom. Dann gibt es $\zeta \in EW_n$ mit

$$\rho(\bar{k}) = \zeta^k \quad \text{für alle } \bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Beweis Setze $\zeta := \rho(\bar{1})$. Dann:

$$\zeta^n = \rho(n \cdot \bar{1}) = \rho(\bar{0}) = 1, \quad \rho(\bar{k}) = \rho(k \cdot \bar{1}) = \zeta^k. \quad \square$$

Beweis Satz Für $1 \le i \le r$ betrachte injektiven Gruppenhom.:

$$\varphi_i: \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \to G, \quad \bar{k}_i \mapsto (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{k}_i, \bar{0}, \dots, \bar{0}).$$

Lemma: Es gibt $\zeta_i \in EW_{n_i}$ sodass

$$\rho \circ \varphi_i: \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \quad \bar{k}_i \mapsto \zeta_i^{k_i}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}\rho(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) &= \rho(\varphi_1(\bar{k}_1) + \dots + \varphi_r(\bar{k}_r)) \\ &= \rho(\varphi_1(\bar{k}_1)) \cdots \rho(\varphi_r(\bar{k}_r)) \\ &= \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r}. \quad \square\end{aligned}$$

Satz Seien $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ und $\rho, \sigma: G \to \mathbb{C}^*$ Darstellungen,

$$\rho(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) = \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r}, \quad \sigma(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) = \eta_1^{k_1} \cdots \eta_r^{k_r}$$

mit $\zeta_i, \eta_i \in EW_{n_i}$ wie im vorigen Satz. Dann:

$$\rho \sim \sigma \iff \zeta_1 = \eta_1, \dots, \zeta_r = \eta_r$$

Beweis "$\Leftarrow$": klar. Zu "$\Rightarrow$": Sei $a \in \mathbb{C}^*$ mit

$$\rho(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) = a\,\sigma(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r)a^{-1}.$$

Dann: $\zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r} = \eta_1^{k_1} \cdots \eta_r^{k_r} \Rightarrow \zeta_i = \eta_i$ f. $i = 1, \dots, r$. $\square$

Folgerung G endl. abelsche Grp. Dann hat G genau $|G|$ nichtäquivalente Darst $G \to \mathbb{C}^*$.

Beweis $G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$, vorige Sätze. $\square$