**Konstruktion** $G$ Gruppe, $V$ $G$-Modul, $V_0 \subseteq V$ $G$-Untermodul, d.h.

$$V_0 \leq_{\mathbb{R}} V, \quad G\cdot V_0 = V_0.$$

Dann: $V/V_0$ $G$-Modul durch

$$g\cdot(v+V_0) := g\cdot v + V_0.$$

**Beweis** Zu zeigen: "$\cdot$" wohldef. Seien $v, v' \in V$ mit

$$v + V_0 = v' + V_0.$$

Dann:

$$g\cdot v' + V_0 = g\cdot(v - v + v') + V_0$$
$$= (g\cdot v + g\cdot(v'-v)) + V_0 = g\cdot v + V_0.$$

$\square$

**Konstruktion** $G$ Gruppe, $V_1, \ldots, V_r$ $G$-Moduln.

Dann: $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ $G$-Modul durch

$$g\cdot(v_1, \ldots, v_r) := (g\cdot v_1, \ldots, g\cdot v_r).$$

**Beispiel** Betrachte $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Haben $G$-Moduln:

$$V_1 = \mathbb{R},\ \bar{1}\cdot x = x, \qquad V_2 = \mathbb{R},\ \bar{1}\cdot x = -x.$$

Weiterer $G$-Modul:

$$V = \mathbb{R}^2, \quad \bar{1}\cdot(x,y) = (y,x).$$

Haben Iso von $G$-Moduln:

$$V_1 \oplus V_2 \to V, \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y).$$

**Bemerkung** $G$ Gruppe, $\varrho_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i)$ Darstellungen, $i = 1, \ldots, r$. Schreiben

$$\varrho_1 \oplus \ldots \oplus \varrho_r : G \mapsto \mathrm{Aut}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_r)$$

für die zum $G$-Modul $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ gehörige Darstellung.

Bei Matrixdarst. $\varrho_i : G \to GL(n_i; \mathbb{R})$ setze $n := n_1 + \ldots + n_r$, schreibe

$$\varrho_1 \oplus \ldots \oplus \varrho_r : G \to GL(n; \mathbb{R}), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \varrho_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varrho_r(g) \end{pmatrix}.$$

**Konstruktion** $G$ Gruppe, $V_1, \dots, V_r$ $G$-Moduln.
Dann: $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ $G$-Modul durch

$$g \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_r := g \cdot v_1 \otimes \dots \otimes g \cdot v_r$$

**Beweis** Zu zeigen: "$\cdot$" wohldef. Haben

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_r \arrow[r, "(v_1,\dots,v_r) \mapsto (g\cdot v_1,\dots,g\cdot v_r)", "T_g \times \dots \times T_g"'] \arrow[d, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1 \times \dots \times V_r \arrow[d, "\Pi"] \\
V_1 \otimes \dots \otimes V_r \arrow[r, "v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mapsto g\cdot v_1 \otimes \dots \otimes g \cdot v_r", "T_g \otimes \dots \otimes T_g"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_r
\end{tikzcd}$$

mit eind. bestimmten linearen Abb.

$$T_g \otimes \dots \otimes T_g : V_1 \otimes \dots \otimes V_r \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_r. \qquad \square$$

**Beispiel** Betrachte $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\zeta, \eta \in EW_n$.
Haben $G$-Moduln

$$V_1 = \mathbb{C}, \ \bar{k} \cdot z = \zeta^k z, \qquad V_2 = \mathbb{C}, \ \bar{k} \cdot z = \eta^k z$$

Betrachten Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$. Haben für $g = \bar{k}$:

$$g \cdot z \otimes w = g \cdot z \otimes g \cdot w = \zeta^k z \otimes \eta^k w = \zeta^k \eta^k z \otimes w.$$

Wissen: $V_1 \otimes V_2 = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ hat Basis $(1 \otimes 1)$, d.h.
$\dim(V_1 \otimes V_2) = 1$. Somit Iso

$$\varphi : V_1 \otimes V_2 \to \mathbb{C}, \quad \sum z_i \otimes w_i \mapsto \sum z_i w_i.$$

Definiere $G$-Modulstruktur auf $V = \mathbb{C}$ durch

$$\bar{k} \cdot u := (\zeta\eta)^k u = \zeta^k \eta^k u.$$

Dann: $\varphi : V_1 \otimes V_2 \to V$ Iso. von $G$-Moduln.

**Bemerkung** $G$ Gruppe, $\varrho_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i)$ Darstellungen, $i = 1, \dots, r$. Schreiben

$$\varrho_1 \otimes \dots \otimes \varrho_r : G \to \mathrm{Aut}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r)$$

für die zum $G$-Modul $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ gehörige Darstellung.

Für Matrixdarst. $\varrho_i : G \to GL(n_i; \mathbb{K})$, $i = 1, 2$:
Matrixdarst zum $G$-Modul $\mathbb{K}^{n_1} \otimes \mathbb{K}^{n_2}$:

$$\varrho_1 \otimes \varrho_2 : G \mapsto GL(n_1 n_2; \mathbb{K}), \quad g \mapsto \varrho_1(g) \otimes \varrho_2(g)$$

mit dem Kronecker-Produkt von Matrizen

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & \dots & a_{1n_1} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_1 1} B & \dots & a_{n_1 n_1} B \end{pmatrix}, \quad A = \varrho_1(g), \quad B = \varrho_2(g).$$

**Konstruktion** $G$ Gruppe, $V, W$ $G$-Moduln. Dann: $\mathrm{Hom}(V,W)$ $G$-Modul durch

$$(g\cdot\varphi)(v) := g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v).$$

**Beweis** Zeigen "$\cdot$" ist Operation. Haben stets

$$(e_G\cdot\varphi)(v) = e_G\cdot\varphi(e_G^{-1}\cdot v) = \varphi(v).$$

Somit $e_G\cdot\varphi = \varphi$. Weiter, für $g_1, g_2 \in G$:

$$\begin{aligned}(g_1g_2\cdot\varphi)(v) &= g_1g_2\cdot\varphi((g_1g_2)^{-1}\cdot v)\\ &= g_1\cdot(g_2\cdot\varphi(g_2^{-1}\cdot(g_1^{-1}\cdot v)))\\ &= g_1\cdot(g_2\cdot\varphi)(g_1^{-1}\cdot v)\\ &= (g_1\cdot(g_2\cdot\varphi))(v).\end{aligned}$$

Somit $g_1g_2\cdot\varphi = g_1\cdot(g_2\cdot\varphi)$. Linearität der Operation:

$$\begin{aligned}(g\cdot(a\varphi+b\psi))(v) &= g\cdot(a\varphi+b\psi)(g^{-1}\cdot v)\\ &= g\cdot(a\varphi(g^{-1}\cdot v)+b\psi(g^{-1}\cdot v))\\ &= a\,g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v)+b\,g\cdot\psi(g^{-1}\cdot v)\\ &= a(g\cdot\varphi)(v)+b(g\cdot\psi)(v)\\ &= (a\,g\cdot\varphi+b\,g\cdot\psi)(v).\end{aligned}$$

$\square$

**Satz** $G$ Gruppe, $V, W$ $G$-Moduln. Dann, in $\mathrm{Hom}(V,W)$:

$$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)^G.$$

**Beweis** Zu "$\subseteq$". Sei $\varphi: V\to W$ $G$-Modulhom. Dann stets

$$(g\cdot\varphi)(v) = g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v) = g\cdot(g^{-1}\cdot\varphi(v)) = \varphi(v).$$

Zu "$\supseteq$". Sei $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)^G$. Dann stets

$$\varphi(g\cdot v) = (g\cdot\varphi)(g\cdot v) = g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot(g\cdot v)) = g\cdot\varphi(v).$$

$\square$

**Konstruktion** $G$ Gruppe, $V$ $G$-Modul. *Dualer $G$-Modul* $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{k})$ mit

$$(g\cdot u)(v) := u(g^{-1}\cdot v).$$

**Bemerkung** Sei $\varrho: G\to GL(n;\mathbb{k})$ Matrixdarst. *Duale Matrixdarst.:*

$$\varrho^*: G\to GL(n;\mathbb{k}),\quad g\mapsto(\varrho(g)^{-1})^t.$$

Haben Iso

$$\underbrace{\mathbb{k}^n}_{G\text{-Mod. zu }\varrho^*} \to \underbrace{(\mathbb{k}^n)^*}_{\substack{\text{Dual des}\\ G\text{-Mod. zu }\varrho}},\quad e_i\mapsto e_i^*.$$

**Satz** $V, W$ endlichdim. $\mathbb{k}$-VR. Haben Iso. von $\mathbb{k}$-VR:

$$\Phi : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W),$$
$$\sum u_i \otimes w_i \mapsto \left[ v \mapsto \sum u_i(v) w_i \right].$$

Sind dabei $V, W$ $G$-Moduln, so ist $\Phi$ Iso der $G$-Moduln $V^* \otimes W$ und $\mathrm{Hom}(V,W)$.

**Beweis** Zeigen: $\Phi$ wohldef., linear. Haben bilineare Abb.:

$$\beta : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V,W),$$
$$(u,w) \mapsto [v \mapsto u(v) w].$$

Univ. Eigenschaft des Tensorproduktes:

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "(u{,}w) \mapsto u\otimes w"'] \arrow[rr, phantom, "G", shift right=4ex] & & \mathrm{Hom}(V,W) \\ & V^* \otimes W \arrow[ur, "\Phi : u\otimes w \mapsto \beta(u{,}w)"'] & \end{tikzcd}$$

mit $\Phi$ eind. bestimmt, linear.

Seien $(b_1, \dots, b_n)$ Basis für $V$ und $(b_1^*, \dots, b_n^*)$ duale Basis. Betrachte

$$\Psi : \mathrm{Hom}(V,W) \to V^* \otimes W, \quad \varphi \mapsto \sum b_i^* \otimes \varphi(b_i).$$

Klar: $\Psi$ ist linear. Zeigen: $\Psi$ ist Umkehrabb. zu $\Phi$.

Zu $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Betrachte $u \otimes w \in V^* \otimes W$, setze

$$\varphi := \Phi(u \otimes w) : V \to W, \quad v \mapsto u(v) w.$$

Haben $u = \sum u(b_i) b_i^*$. Damit:

$$\Psi(\varphi) = \sum b_i^* \otimes \varphi(b_i) = \sum b_i^* \otimes u(b_i) w$$
$$= \left( \sum u(b_i) b_i^* \right) \otimes w = u \otimes w.$$

Also, stets $\Psi(\Phi(u \otimes w)) = u \otimes w$. Somit $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

Zu $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Sei $\varphi : V \to W$ linear. Dann:

$$\Phi(\Psi(\varphi)) : V \to W, \quad v \mapsto \sum b_i^*(v) \varphi(b_i).$$

Insbes. $\Phi(\Psi(\varphi))(b_j) = \varphi(b_j)$. Also $\Phi(\Psi(\varphi)) = \varphi$.

Falls $V, W$ $G$-Moduln: Stets

$$\Phi(g \cdot u \otimes w)(v) = \Phi(g \cdot u \otimes g \cdot w)(v) = (g \cdot u)(v)\, g \cdot w$$
$$= u(g^{-1} \cdot v)\, g \cdot w = g \cdot (u(g^{-1} \cdot v) w)$$
$$= g \cdot \left( \Phi(u \otimes w)(g^{-1} \cdot v) \right)$$
$$= (g \cdot \Phi(u \otimes w))(v). \qquad \square$$