Definition G Gruppe.

(i) Ein G-Modul V heißt *einfach*, falls $\{0_V\}$ und V einzige G-Untermoduln von V.

(ii) Eine Darstellung $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ heißt *irreduzibel*, falls der zugeh. G-Modul V einfach ist.

Beispiel Jeder eindimensionale G-Modul ist einfach.

Beispiel Mit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wird $\mathbb{R}^2$ G-Modul durch

$$\bar{1} \cdot (x_1, x_2) := (x_2, x_1).$$

Dabei $\mathbb{R}^2$ nicht einfach: Haben G-Untermoduln

$$\mathbb{R} \cdot (1,1), \qquad \mathbb{R} \cdot (-1,1).$$

Lemma von Schur V, W einfache G-Moduln und $\varphi: V \to W$ G-Modulhom.

(i) Haben $\varphi = 0$ oder φ Iso.

(ii) Falls $V = W$ endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, so gilt $\varphi = \lambda \cdot id_V$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis Zu (i). Wegen φ G-Modulhom. hat man G-Untermoduln

$$\mathrm{kern}(\varphi) \leq_{\mathbb{Z}} V, \qquad \mathrm{Bild}(\varphi) \leq_{\mathbb{Z}} W.$$

Wegen V, W einfach, nur möglich

$$\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}, V, \qquad \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0_W\}, W.$$

Falls $\mathrm{kern}(\varphi) = V$: $\varphi = 0$. ✓

Falls $\mathrm{kern}(\varphi) = \{0_V\}$: Zwei Fälle

1) $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{0_W\}$. Dann $\varphi = 0$. ✓

2) $\mathrm{Bild}(\varphi) = W$. Dann φ inj. und surj., somit φ Iso. ✓

Zu (ii). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von φ. Haben G-Untermodul

$$\{0_V\} \neq \mathrm{kern}(\varphi - \lambda \cdot id_V) \leq_{\mathbb{C}} V$$

Wegen V einfach: $\mathrm{kern}(\varphi - \lambda \cdot id_V) = V$.

Folglich: $\varphi = \lambda \cdot id_V$. $\square$

Definition G Gruppe.

(i) Ein G-Modul V heißt *halbeinfach*, falls

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

mit einfachen G-Untermod $V_1, \dots, V_r \subseteq V$.

(ii) Eine Darstellung $G \to \mathrm{Aut}(V)$ heißt *vollständig reduzibel*, falls der zugeh. G-Modul V halbeinfach ist.

Satz G Gruppe, V endlichdim. G-Modul. Dann äquivalent:

(i) V ist halbeinfach.

(ii) Zu jedem G-Untermodul $U \subseteq V$ gibt es G-Untermodul $U' \subseteq V$ mit $V = U \oplus U'$.

Beweis Zu "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Induktion über

$$d := \dim(V) - \dim(U).$$

Falls $d = 0$: ✓ Sei $d > 0$. Haben nach (i):

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

mit einfachen G-Untermoduln $V_i \subseteq V$.

OE: $V_1 \nsubseteq U$. Dann: $U \cap V_1 = \{0_V\}$ und

$$W := U + V_1 = U \oplus V_1 \subseteq V$$

G-Untermodul. IV: Haben G-Untermod. W' mit

$$V = W \oplus W'.$$

Jetzt: $U' := V_1 \oplus W'$ tut's.

Zu "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Sei $U \subseteq V$ G-Untermodul max. Dimension, sodass U halbeinfach. Dann:

$$V = U \oplus U'$$

mit G-Untermodul $U' \subseteq V$. Zeigen: $U' = \{0_V\}$. Andernfalls wähle G-Untermodul

$$\{0_V\} \neq U'' \subseteq U', \quad \dim(U'') \text{ minimal}.$$

Dann: U'' einfacher G-Modul. Damit

- $U + U'' = U \oplus U''$ halbeinfach,
- $\dim(U + U'') > \dim(U)$.

Widerspruch zur Wahl von U. $\square$

__Satz von Maschke__ G endliche Gruppe, $\mathbb{k}$ Körper, $\mathrm{Char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$, V endlichdim. $\mathbb{k}$-VR. Dann ist jede Darst. $G \to \mathrm{Aut}(V)$ vollständig reduzibel.

__Beweis__ Zu zeigen: Zu jedem G-Untermod. $U \subseteq V$ gibt es G-Untermod. $U' \subseteq V$ mit

$$V = U \oplus U'.$$

Wähle zunächst UVR $V' \leq_{\mathbb{k}} V$ mit

$$V = U \oplus V'.$$

Haben Projektion

$$P: V \to U, \quad (u, v') \mapsto u.$$

Betrachte die lineare Abb.

$$\overline{P}: V \to U, \quad v \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot v).$$

Dabei $\overline{P}(V) \subseteq U$ wegen $U \subseteq V$ G-Untermod.:

$$\overline{P}(V) \subseteq G \cdot P(V) \subseteq G \cdot U = U.$$

Zeigen $\overline{P}_{|U} = \mathrm{id}_U$. Haben für $u \in U$:

$$\overline{P}(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot u)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (g^{-1} \cdot u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u.$$

Folglich $\overline{P}(U) = U$ und $\overline{P}^2 = \overline{P}$. Also

$$V = \mathrm{Bild}(\overline{P}) \oplus \mathrm{kern}(\overline{P}) = U \oplus U'$$

mit $U' := \mathrm{kern}(\overline{P})$. Zeigen: $U' \subseteq V$ G-Untermod.

Reicht: $\overline{P}$ G-Modulhom. Haben stets:

$$\overline{P}(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot h \cdot v)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgh^{-1} \cdot P((hgh^{-1})^{-1} \cdot h \cdot v)$$

$$= h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gh^{-1} \cdot P(hg^{-1} \cdot v) \right)$$

$$= h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P(g^{-1} \cdot v) \right)$$

$$= h \cdot \overline{P}(v).$$

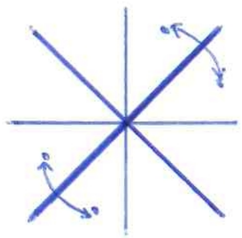
$\square$

Beispiel Sei $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann $\mathbb{R}^2$ G-Modul durch

$$\bar{1} \cdot (x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Dabei $\mathbb{R}^2$ halbeinfach. Zerlegung in einfache G-Untermoduln:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot (1,1) \oplus \mathbb{R} \cdot (-1,1)$$



Beispiel Seien $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann $\mathbb{K}^2$ G-Modul durch

$$\bar{1} \cdot (x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Dabei $\mathbb{K}^2$ nicht halbeinfach. Haben G-Untermodul

$$\mathbb{K} \cdot (\bar{1}, \bar{1}) \leq \mathbb{K}^2$$

Ansonsten nur ein-dim. UVR

$$\mathbb{K} \cdot (\bar{1}, \bar{0}) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^2, \quad \mathbb{K} \cdot (\bar{0}, \bar{1}) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^2.$$

Somit keine Zerlegung

$$\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \cdot (\bar{1}, \bar{1}) \oplus U, \quad U \leq \mathbb{K}^2 \text{ G-Untermod.}$$

Lemma G abelsche Gruppe, $V \neq \{0_V\}$ endl. dim. einfacher komplexer G-Modul. Dann $\dim(V) = 1$.

Beweis Wegen G abelsch: Jedes $T_g : V \to V$ G-Modulhom., denn

$$T_g(h \cdot v) = g \cdot h \cdot v = gh \cdot v = hg \cdot v = h \cdot g \cdot v = h \cdot T_g(v).$$

Lemma v. Schur: $T_g = \lambda(g) \cdot \mathrm{id}_V$ mit $\lambda(g) \in \mathbb{C}$.

Somit für $0_V \neq v \in V$: $\mathbb{C} \cdot v \leq V$ G-Untermod.

Wegen V einfach: $\mathbb{C} \cdot v = V$. $\square$

Satz G endl. ab. Gruppe, $V \neq \{0_V\}$ endl. dim. komplexer G-Modul. Dann

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r, \quad V_i \leq V \text{ 1-dim. G-Untermod.}$$

Beweis Satz v. Maschke: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit einfachen G-Untermod. V_i. Lemma: $\dim(V_i) = 1$. $\square$

Folgerung $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$. Dann: Jede Matrixdarst. von G äquivalent zu

$$G \to GL(m; \mathbb{C}), \quad (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_r) \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_{11}^{k_1} \cdots \zeta_{1r}^{k_r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_{m1}^{k_1} \cdots \zeta_{mr}^{k_r} \end{pmatrix}$$

mit $\zeta_{ji} \in EW_{n_i}$.