Erinnerung Spur von $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + \dots + a_{nn}.$$

Für jedes $S \in GL(n;\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Spur}(S \cdot A \cdot S^{-1}) = \mathrm{Spur}(A).$$

V endl. dim. $\mathbb{C}$-VR. Spur einer linearen Abb. $\varphi: V \to V$:

$$\mathrm{Spur}(\varphi) := \mathrm{Spur}(\mathcal{M}_B^B(\varphi)), \quad B \text{ Basis für } V.$$

Definition G endliche Gruppe.

(i) Charakter einer Matrixdarstellung $\rho: G \to GL(n;\mathbb{C})$:

$$\chi_\rho: G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Spur}(\rho(g)).$$

(ii) V endl. dim. $\mathbb{C}$-VR. Charakter einer Darst. $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$:

$$\chi_\rho: G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Spur}(\rho(g)).$$

Beispiel $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat Matrixdarst. $\rho_1, \rho_2, \rho_3: G \to GL(2,\mathbb{C})$:

$$\rho_1: \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2: \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3: \bar{0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zugehörige Charaktere:

$$\chi_{\rho_1}(\bar{0}) = 2, \quad \chi_{\rho_1}(\bar{1}) = -2,$$

$$\chi_{\rho_2}(\bar{0}) = 2, \quad \chi_{\rho_2}(\bar{1}) = 0,$$

$$\chi_{\rho_3}(\bar{0}) = 2, \quad \chi_{\rho_3}(\bar{1}) = 0.$$

Satz G endl. Gruppe, V, W endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\sigma: G \to \mathrm{Aut}(W)$ Darst. Dann:

$$\rho \sim \sigma \implies \chi_\rho = \chi_\sigma$$

Beweis Falls $\rho \sim \sigma$: Iso $\varphi: V \to W$ mit

$$\sigma(g) = \varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1}.$$

Damit:

$$\chi_\sigma(g) = \mathrm{Spur}(\sigma(g)) = \mathrm{Spur}(\varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Spur}(\rho(g)) = \chi_\rho(g). \quad \square$$

__Satz__ G endl. Gruppe, V endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ Darst. Dann, f. alle $g, h \in G$:

* $\chi_\rho(e_G) = \dim(V)$,
* $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$,
* $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

__Lemma__ G endl. Gruppe, V n-dim. $\mathbb{C}$-VR $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ Darst. Dann: Zu jedem $g \in G$ gibt es Basis $\mathcal{B}$ von V und $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in EW_m$, $m := \mathrm{ord}(g)$, mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho(g)) = \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix}.$$

__Beweis__ Betrachte $H := \langle g \rangle \leq G$. Dann: $H \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Wissen:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

mit eindim. H-Untermoduln $V_i \leq V$. Auf V_i:

$$g \cdot v_i = \zeta_i v_i \quad \text{mit } \zeta_i \in EW_m. \quad \square$$

__Beweis Satz__ Zeigen $\chi_\rho(e_G) = \dim(V)$. Haben mit $n = \dim(V)$:

$$\chi_\rho(e_G) = \mathrm{Spur}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Spur}(E_n) = n.$$

Zeigen $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$. Wähle Basis $\mathcal{B}$ von V wie im Lemma. Dann:

$$\begin{aligned} \chi_\rho(g^{-1}) &= \mathrm{Spur}(\rho(g^{-1})) \\ &= \mathrm{Spur}(\rho(g)^{-1}) \\ &= \zeta_1^{-1} + \ldots + \zeta_n^{-1} \\ &= \overline{\zeta_1} + \ldots + \overline{\zeta_n} \\ &= \overline{\mathrm{Spur}(\rho(g))} = \overline{\chi_\rho(g)}. \end{aligned}$$

Zeigen $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$. Haben:

$$\begin{aligned} \chi_\rho(hgh^{-1}) &= \mathrm{Spur}(\rho(hgh^{-1})) \\ &= \mathrm{Spur}(\rho(h) \circ \rho(g) \circ \rho(h)^{-1}) \\ &= \mathrm{Spur}(\rho(g)) = \chi_\rho(g). \end{aligned}$$

$\square$

__Satz__ G endl. Gruppe, V, W endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\sigma: G \to \mathrm{Aut}(W)$ Darstellungen.

(i) Charakter von $\varrho \oplus \sigma : G \to \mathrm{Aut}(V \oplus W)$:

$$\chi_{\varrho\oplus\sigma}(g) = \chi_\varrho(g) + \chi_\sigma(g).$$

(ii) Charakter von $\varrho \otimes \sigma : G \to \mathrm{Aut}(V \otimes W)$:

$$\chi_{\varrho\otimes g} = \chi_\varrho(g) \otimes \chi_\sigma(g).$$

(iii) Charakter von $\varrho^* : G \to \mathrm{Aut}(V^*)$:

$$\chi_{\varrho^*}(g) = \overline{\chi_\varrho(g)}.$$

(iv) Charakter von $\tau : G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Hom}(V,W))$:

$$\chi_\tau(g) = \overline{\chi_\varrho(g)}\, \chi_\sigma(g).$$

__Beweis__ Wissen: Zu jedem $g \in G$ gibt es Basen $(v_1, \dots, v_n)$ für V und $(w_1, \dots, w_m)$ für W, sodass

$$g \cdot v_i = \zeta_i v_i, \qquad g \cdot w_j = \eta_j w_j$$

mit Einheitswurzeln $\zeta_i, \eta_j \in EW_m$, $m = \mathrm{ord}(g)$.

Zu (i). Für $V \oplus W$ betrachte die Basis

$$((v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m))$$

Dann $g \cdot (v_i, 0_W) = \zeta_i \cdot (v_i, 0_W)$ und $g \cdot (0_V, w_j) = \eta_j \cdot (0_V, w_j)$.

Damit

$$\chi_{\varrho\oplus\sigma}(g) = \zeta_1 + \dots + \zeta_n + \eta_1 + \dots + \eta_m = \chi_\varrho(g) + \chi_\sigma(g).$$

Zu (ii). Für $V \otimes W$ betrachte die Basis

$$(v_i \otimes w_j ;\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$$

Dann $g \cdot v_i \otimes w = g v_i \otimes g w_j = \zeta_i \eta_j\, v_i \otimes w_j$.

Damit:

$$\chi_{\varrho\otimes\sigma}(g) = \sum_{i,j} \zeta_i \eta_j$$

$$= \Big(\sum_i \zeta_i\Big)\Big(\sum_j \eta_j\Big) = \chi_\varrho(g)\,\chi_\sigma(g).$$

Zu (iii). Mit $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$:

$$\chi_{\varrho^*}(g) = \mathrm{Spur}\big(\mathcal{M}^{B^*}_{B^*}(\varrho^*(g))\big)$$

$$= \mathrm{Spur}\Big(\big(\overline{\mathcal{M}^B_B(\varrho(g))}\big)^t\Big) = \overline{\chi_\varrho(g)}.$$

Zu (iv). Haben $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$. $\square$

Erinnerung X endl. Menge. Haben $\mathbb{C}$-VR:

$$V_X := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{C})$$

mit punktweiser Addition und Skalarmult. Betrachte charakteristische Funktionen:

$$f_x : X \to \mathbb{C}, \quad x' \mapsto \delta_{x,x'} := \begin{cases} 1, & x = x', \\ 0, & x \neq x'. \end{cases}$$

Dann: $(f_x;\ x \in X)$ Basis für V_X. Insbes.:

$$\dim(V_X) = |X|.$$

Konstruktion X endl. Menge, G endl. Gruppe, $G \times X \to X$ Operation. Dann: V_X G-Modul durch

$$G \times V_X \to V_X, \quad (g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x)$$

Die zugehörige Darstellung $\varrho_X : G \to \mathrm{Aut}(X)$ heisst Permutationsdarstellung zu $G \times X \to X$.

Satz G endl. Gruppe, X endl. Menge und $G \times X \to X$ Operation. Charakter der zugeh. Permutationsdarst. $\varrho_X : G \to \mathrm{Aut}(V_X)$:

$$\chi_{\varrho_X} : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto |\{x \in X;\ g \cdot x = x\}|.$$

Beweis Sei $g \in G$. Gesucht: Darst. Matrix von $\varrho_X(g)$ bez. $(f_x;\ x \in X)$. Haben stets

$$\begin{aligned} g \cdot f_x(x') = f_x(g^{-1} \cdot x') &= \delta(x, g^{-1} \cdot x') \\ &= \delta(g \cdot x, x') = f_{g \cdot x}(x'). \end{aligned}$$

Schreibe jetzt

$$X = \{x_1, \ldots, x_r\} \sqcup \{y_1, \ldots, y_s\} \qquad \begin{array}{l} g \cdot x_i = x_i, \\ g \cdot y_j \neq y_j. \end{array}$$

Darst. Matrix bez. $\mathcal{B} = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_r}, f_{y_1}, \ldots, f_{y_s})$:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varrho_X(g)) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad a_{11} = \ldots = a_{ss} = 0.$$

Folglich $\chi_{\varrho_X}(g) = r = |\{x \in X;\ g \cdot x = x\}|$. $\square$

Definition G endl. Gruppe. Reguläre Darst.: Permutationsdarst. $\varrho_G : G \to \mathrm{Aut}(V_G)$ zu $G \times G \to G$, $h \cdot g := hg$.

Satz Charakter der regulären Darstellung einer endl. Gruppe G:

$$\chi_G : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \begin{cases} |G|, & g = e_G, \\ 0, & g \neq e_G. \end{cases}$$