Erinnerung G Gruppe. *Konjugationsklasse* eines Elements $g \in G$:

$$\{hgh^{-1};\ h \in G\} \subseteq G.$$

Sei $C(G)$ Menge aller Konj.klassen von G. Haben surjektive Abb.:

$$\pi : G \to C(G), \quad g \mapsto \{hgh^{-1};\ h \in G\}.$$

Definition G Gruppe. *Klassenfunktion* auf G: Abb. $f: G \to \mathbb{C}$ mit

$$f(hgh^{-1}) = f(g) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Setzen

$$CF(G) := \{f: G \to \mathbb{C};\ f \text{ klassenfkt. auf } G\}.$$

Bemerkung G endl. Gruppe, V endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, $\varrho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ Darst. Haben Klassenfkt.:

$$\chi_\varrho : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Spur}(\varrho(g)).$$

Bemerkung G Gruppe. Haben $\mathbb{C}$-VR:

$$\mathrm{Abb}(C(G), \mathbb{C}), \quad CF(G) \leq_{\mathbb{C}} \mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$$

mit punktweiser Addition und Skalarmult.

Mit $\pi: G \to C(G)$ erhält man VR-Iso:

$$\mathrm{Abb}(C(G), \mathbb{C}) \to CF(G), \quad \tilde{f} \mapsto \tilde{f} \circ \pi.$$

Damit:

$$\dim(CF(G)) = \dim(\mathrm{Abb}(C(G), \mathbb{C})) = |C(G)|.$$

Konstruktion G endl. Gruppe. Erhalten hermitesches Skalarprodukt auf $CF(G)$ durch

$$\langle f', f \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g)\, \overline{f(g)}.$$

Beweis Antilinearität in der zweiten Komp.:

$$\langle f', af_1 + bf_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g)\, \overline{(af_1 + bf_2)(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g)\, \overline{(af_1(g) + bf_2(g))}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g) \left(\bar{a}\overline{f_1(g)} + \bar{b}\, \overline{f_2(g)}\right)$$

$$= \frac{\bar{a}}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g)\, \overline{f_1(g)} + \frac{\bar{b}}{|G|} \sum_{g \in G} f'(g)\, \overline{f_2(g)}$$

$$= \bar{a} \langle f', f_1 \rangle + \bar{b} \langle f', f_2 \rangle. \qquad \square$$

Satz G endl. Gruppe, V, W endl. dim. $\mathbb{C}$-VR, $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\sigma: G \to \mathrm{Aut}(W)$ irreduzible Darstellungen. Dann:

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \sigma \sim \rho, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma G endl. Gruppe, V endl. dimens. komplexer G-Modul. Haben lineare Abb.

$$P: V \to V, \quad v \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v$$

mit $P(V) = V^G$, $P_{|V^G} = \mathrm{id}_{V^G}$, $V = V^G \oplus \ker(P)$.

Beweis klar: P linear, $P_{|V^G} = \mathrm{id}_{V^G}$.

Zeigen $P(V) \subseteq V^G$: Haben

$$h \cdot P(v) = h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg \cdot v$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v = P(v). \qquad \square$$

Beweis Satz Haben

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\sigma(g) \overline{\chi_\rho(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\tau(g),$$

mit $\chi_\tau(g) = \overline{\chi_\rho(g)}\, \chi_\sigma(g)$ Char. zu $G \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}(\mathrm{Hom}(V,W))$.

Damit:

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\tau(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Spur}(\tau(g))$$

$$= \mathrm{Spur}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g) \right)$$

$$= \dim(\mathrm{Hom}(V,W)^G)$$

mit Lemma für den G-Modul $\mathrm{Hom}(V,W)$, d.h.

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(g).$$

Wissen:

$$\mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W).$$

Folglich

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\rho \rangle = \dim(\mathrm{Hom}_G(V,W)) = \begin{cases} 1, & \sigma \sim \rho, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn, mit Lemma von Schur:

$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{0\}$ falls $\sigma \not\sim \rho$. $\qquad \mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathbb{C} \cdot \varphi$ falls $\varphi: V \to W$ Iso. $\qquad \square$

Definition G endl. Gruppe.

(i) $\Omega(G) :=$ Menge der Äquiv.klassen irreduz. endl. dim. komplexen Darst. von G.

(ii) Für jedes $\omega \in \Omega(G)$ fixiere eine Darst. $\varrho_\omega : G \to \mathrm{Aut}(V_\omega)$ aus ω.

(iii) Schreibe χ_ω für den Charakter von ϱ_ω. Nenne χ_ω auch irreduziblen Charakter.

Beispiel Betrachte $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$.

Dann: Jede irred. Darst von G eindim. und man hat Bijektion

$$EW_{n_1} \times \dots \times EW_{n_r} \to \Omega(G)$$

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_r) \mapsto [\varrho_{\zeta_1,\dots,\zeta_r} : (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_r) \mapsto (\zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_r^{k_r})].$$

Bemerkung G endl. Gruppe, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(G)$.

Haben

$$\omega_1 = \omega_2 \iff \varrho_{\omega_1} \sim \varrho_{\omega_2}.$$

Also

$$\langle \chi_{\omega_1}, \chi_{\omega_2} \rangle = \begin{cases} 1, & \omega_1 = \omega_2, \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases}$$

Insbes. $(\chi_\omega;\ \omega \in \Omega(G))$ linear unabh in $CF(G)$.

Somit:

$$|\Omega(G)| \leq \dim(CF(G)) = |C(G)|.$$

Satz G endl. Gruppe, V endl. dim. komplexer G-Modul, $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ zugeh. Darst. Dann:

$$V \underset{G\text{-Mod}}{\cong} \bigoplus_{\omega \in \Omega(G)} V_\omega^{\langle \chi_\omega, \chi_\varrho \rangle}.$$

Beweis Satz von Maschke:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r, \quad V_i \subseteq V \text{ einfache } G\text{-Untermod.}$$

Mit den zugeh. Darst. $\varrho_i : G \to \mathrm{Aut}(V_i)$:

$$\chi_\varrho = \chi_{\varrho_1} + \dots + \chi_{\varrho_r}.$$

Für $\omega \in \Omega(G)$: $V_i \cong V_\omega \iff \langle \chi_\omega, \chi_{\varrho_i} \rangle = 1$.

Anzahl der $V_i \in \omega$:

$$\langle \chi_\omega, \chi_{\varrho_1} \rangle + \dots + \langle \chi_\omega, \chi_{\varrho_r} \rangle = \langle \chi_\omega, \chi_\varrho \rangle. \square$$

Definition $V \cong \bigoplus V_\omega^{\langle \chi_\omega, \chi_\varrho \rangle}$ aus dem Satz heißt die *isotypische Zerlegung* von V.

Vielfachheit von V_ω in V: $\langle \chi_\omega, \chi_\varrho \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

__Folgerung__ G endl. Gruppe, $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ und $\rho': G \to \mathrm{Aut}(V')$ Darst. auf endl. dim. $\mathbb{C}$-VR. Dann:

$$\rho' \sim \rho \iff \chi_{\rho'} = \chi_\rho .$$

__Beweis__ Wissen bereits "$\Rightarrow$". Zu "$\Leftarrow$". Mit isotyp. Zerlegung:

$$V' \cong \bigoplus V_\omega^{\langle \chi_\omega, \chi_{\rho'} \rangle} = \bigoplus V_\omega^{\langle \chi_\omega, \chi_\rho \rangle} \cong V. \quad \square$$

__Erinnerung__ G endl. Gruppe, $V_G = \mathrm{Abb}(G, \mathbb{C})$. Dann: V_G G-Modul durch

$$(h \cdot f)(g) := f(h^{-1} g).$$

Zugeh. Darst. $\rho_G : G \to \mathrm{Aut}(V_G)$ heißt reguläre Darst. von G. Haben stets

$$h \cdot f_g(g') = f_g(h^{-1} g') = \delta(g, h^{-1} g')$$
$$= \delta(hg, g') = f_{hg}(g')$$

d.h., $h \cdot f_g = f_{hg}$ für die char. Fkt f_g zu $g \in G$.

Charakter von ρ_G:

$$\chi_G : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \begin{cases} |G|, & g = e_G, \\ 0, & g \neq e_G. \end{cases}$$

__Satz__ G endl. Gruppe, $\rho_G : G \to \mathrm{Aut}(V_G)$ zugeh. reguläre Darst.

(i) Sei $\rho: G \to \mathrm{Aut}(V)$ Darst. auf endl. dim. $\mathbb{C}$-VR. Dann:

$$\langle \chi_\rho, \chi_G \rangle = \dim(V).$$

(ii) Isotypische Zerlegung von V_G:

$$V_G \cong \bigoplus_{\omega \in \Omega(G)} V_\omega^{\dim(V_\omega)} .$$

(iii) Haben:

$$|G| = \chi_G(e_G) = \sum_{\omega \in \Omega(G)} \dim(V_\omega) \chi_\omega(e_G) = \sum_{\omega \in \Omega(G)} \dim(V_\omega)^2 .$$

__Beweis__ Zeigen (i). Haben

$$\langle \chi_\rho, \chi_G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_G(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_\rho(e_G) \overline{\chi_G(e_G)}$$
$$= \frac{1}{|G|} \mathrm{Spur}(\mathrm{id}_V) |G| = \dim(V).$$

Jetzt (ii) klar mit $\langle \chi_\omega, \chi_G \rangle = \dim(V_\omega)$ und (iii) klar mit

$$\chi_G = \sum_{\omega \in \Omega(G)} \dim(V_\omega) \chi_\omega, \quad \chi_\omega(e_G) = \dim(V_\omega). \quad \square$$

Satz G endl. Gruppe. Dann: $(\chi_\omega;\ \omega\in\Omega(G))$ Orthonormalbasis für $CF(G)$.

Lemma G endl. Gruppe, V endl. dim. komplexer G-Modul, $\varrho: G\to \mathrm{Aut}(V)$ zug. Darst., $\alpha\in CF(G)$.
Dann:
$$\varphi_{\varrho,\alpha}: V\to V,\quad v\mapsto \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\, g\cdot v$$
G-Modulhom. und
$$\mathrm{Spur}(\varphi_{\varrho,\alpha}) = |G|\,\langle \chi_\varrho,\alpha\rangle.$$

Beweis Klar: $\varphi_{\varrho,\alpha}$ linear. Für $v\in V$ und $h\in G$:
$$\varphi_{\varrho,\alpha}(h\cdot v) = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\, g\cdot h\cdot v = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(hgh^{-1})}\, hgh^{-1}\cdot h\cdot v$$
$$= \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\, h\cdot g\cdot v = h\cdot \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\, g\cdot v = h\cdot\varphi_{\varrho,\alpha}(v)$$
Spurberechnung:
$$\mathrm{Spur}(\varphi_{\varrho,\alpha}) = \mathrm{Spur}\Big(\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,\varrho(g)\Big) = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,\mathrm{Spur}(\varrho(g))$$
$$= \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,\chi_\varrho(g) = \langle\chi_\varrho,\alpha\rangle. \qquad \square$$

Beweis Satz Wissen: $B:=(\chi_\omega;\ \omega\in\Omega(G))$ ONB für
$$U:=\mathrm{Lin}(B)\leq_{\mathbb{C}} CF(G).$$
Wegen $CF(G)=U\oplus U^\perp$: Reicht z.z.: $U^\perp=\{0\}$.

Sei $\alpha\in U^\perp$. Dann: $\langle\chi_\omega,\alpha\rangle=0$ f. alle $\omega\in\Omega(G)$.

Betrachte irred. Darst. $\varrho\in\omega\in\Omega(G)$ und den G-Modulhom.
$$\varphi_{\varrho,\alpha}: V\to V.$$
Lemma von Schur: $\varphi_{\varrho,\alpha}=\lambda\cdot \mathrm{id}_V$ mit $\lambda\in\mathbb{C}$. Mit vorigem Lemma:
$$\lambda\dim(V) = \mathrm{Spur}(\varphi_{\varrho,\alpha}) = |G|\langle\chi_\varrho,\alpha\rangle = |G|\langle\chi_\omega,\alpha\rangle = 0.$$
Also $\lambda=0$, d.h. $\varphi_{\varrho,\alpha}=0$. Jetzt betrachte Darstellung
$$\varrho=\varrho_1\oplus\dots\oplus\varrho_r,\qquad \varrho_i\in\omega_i\in\Omega(G).$$
Dann, für $v=v_1+\dots+v_r$ im zug. G-Mod. $V=V_1\oplus\dots\oplus V_r$:
$$\varphi_{\varrho,\alpha}(v) = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,g\cdot v = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,g\cdot v_1+\dots+\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,g\cdot v_r$$
$$= \varphi_{\varrho_1,\alpha}(v_1)+\dots+\varphi_{\varrho_r,\alpha}(v_r) = 0_V.$$
Folglich $\varphi_{\varrho,\alpha}=0$. Insbes. $\varphi_{\varrho_G,\alpha}=0$ für die reguläre Darst.
$$\varrho_G: G\to\mathrm{Aut}(V_G),\quad V_G=\mathrm{Abb}(G,\mathbb{C}).$$
Für charakteristische Funktion $f_{e_G}\in V_G$:
$$0=\varphi_{\varrho_G,\alpha}(f_{e_G}) = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,g\cdot f_{e_G} = \sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\,f_g.$$
Jetzt:
$(f_g;\ g\in G)$ Basis für V_G $\Rightarrow$ stets $\overline{\alpha(g)}=0$ $\Rightarrow$ $\alpha=0$. $\square$