Lineare Algebra I

Fassung vom 24. Januar 2022

Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Universität Tübingen

Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Text entstand aus einer einführenden Vorlesung “Lineare Algebra” im Rahmen des Mathematikstudiums. Ich habe mich um knappe Darstellung und einen möglichst geradlinigen Zugang zu den aus meiner Sicht wichtigsten Themen bemüht, ohne dabei auf vollständige Beweise und Beispiele zu verzichten. Jeder Textabschnitt lässt sich in einer Vorlesungsdoppelstunde (90 min.) behandeln. Unumgängliche Unannehmlichkeiten, wie etwa der Nachweis der Vektorraumaxiome für $\mathbb{R}^n$, sind m.E. weder dazu geeignet, sie dem Leser als Übung zu empfehlen, noch sie in der Vorlesung vollständig vorzuführen; ich habe sie im Text aufgeführt, allerdings in kleingedruckter Form.

Tübingen im Februar 2007 Jürgen Hausen

Vorwort zur zweiten Auflage

Es sind einige Tippfehler korrigiert und die eine oder andere Unstimmigkeit ist beseitigt — all denen, die mir dabei geholfen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt!

Tübingen im September 2009 Jürgen Hausen

Vorwort zur dritten Auflage

Weitere Tippfehler wurden beseitigt und neben kleineren Ergänzungen kam ein Abschnitt mit Beispielen zur Diagonalisierbarkeit dazu. Mein herzlicher Dank gilt allen, die geholfen haben!

Tübingen im März 2017 Jürgen Hausen

Vorwort zur geplanten vierten Auflage

Beim vorliegenden Text handelt es sich um die Vorabversion einer vierten Auflage des Skriptums “Lineare Algebra I”. Für Korrekturen, Hinweise und Anregungen, insbesondere in der Entstehungsphase dieses Textes, bin ich sehr dankbar.

Tübingen im Sommer 2021 Jürgen Hausen

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

1.1. **Logik und Beweisen.**

Bemerkung 1.1.1. In der Logik arbeitet man mit Aussagen; eine Aussage ist entweder wahr (kurz: w) oder sie ist falsch (kurz: f). Einige Beispiele:

(i) Hans schläft.
(ii) Hans schläft nicht.
(iii) Hans schläft und Hans hat die Augen geschlossen.
(iv) Hans schläft oder Hans hat die Augen geschlossen.
(v) Wenn Hans schläft, dann hat Hans die Augen geschlossen.
(vi) Hans schläft genau dann, wenn Hans die Augen geschlossen hat.

Bemerkung 1.1.2. Die obigen Beispiele zeigen, dass man aus gegebenen Aussagen neue gewinnen kann, und zwar nach folgenden Prinzipien:

(i) Die Negation einer Aussage A zu der Aussage "nicht A",
(ii) Verknüpfung zweier Aussagen A, B zu einer Aussage "A und B",
(iii) Verknüpfung zweier Aussagen A, B zu der Aussage "A oder B",
(iv) Verknüpfung zweier Aussagen A, B zu der Aussage "wenn A dann B" (kurz: "$A \implies B$"),
(v) Verknüpfung zweier Aussagen A, B zu der Aussage "A genau dann wenn B" (kurz: "$A \iff B$").

Da wir exakt arbeiten wollen, müssen wir genau festlegen, was eine Aussage wie "A und B" bedeuten soll, d.h., wir müssen *definieren*, welchen Wahrheitswert sie in Abhängigkeit von A, B besitzen soll; dies geschieht über eine Tabelle:

A	nicht A
w	f
f	w

A	B	A und B	A oder B	$A \implies B$	$A \iff B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.1.3. Gilt "$A \iff B$" für zwei Aussagen A, B so nennt man A, B auch *äquivalent*. Wenn man kompliziertere Aussagen auf Äquivalenz prüfen möchte, sind die folgenden Beobachtungen hilfreich: Es gilt immer

$$A \text{ oder } B \iff B \text{ oder } A, \tag{1.1.3.1}$$
$$A \text{ oder } (B \text{ oder } C) \iff (A \text{ oder } B) \text{ oder } C. \tag{1.1.3.2}$$

$$A \text{ und } B \iff B \text{ und } A, \tag{1.1.3.3}$$
$$A \text{ und } (B \text{ und } C) \iff (A \text{ und } B) \text{ und } C. \tag{1.1.3.4}$$

$$A \text{ und } (B \text{ oder } C) \iff (A \text{ und } B) \text{ oder } (A \text{ und } C), \tag{1.1.3.5}$$
$$A \text{ oder } (B \text{ und } C) \iff (A \text{ oder } B) \text{ und } (A \text{ oder } C). \tag{1.1.3.6}$$

$$\text{nicht}(A \text{ oder } B) \iff (\text{nicht } A) \text{ und } (\text{nicht } B), \tag{1.1.3.7}$$
$$\text{nicht}(A \text{ und } B) \iff (\text{nicht } A) \text{ oder } (\text{nicht } B). \tag{1.1.3.8}$$

Diese Regeln kann man mit Hilfe von Wahrheitstafeln leicht verifizieren; wir führen dies exemplarisch für Regel 1.1.3.8 durch.

A	B	A und B	nicht(A und B)	nicht A	nicht B	(nicht A) oder (nicht B)
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Wir sehen also, dass "(nicht(A und B)) $\iff$ ((nicht A) oder (nicht B))" für jede mögliche Kombination der Wahrheitswerte von A bzw. B gilt.

Bemerkung 1.1.4. Mathematische Aussagen der ganz einfachen Form wie "$2 > 1$" sind langweilig. Interessanter wird es, wenn sogenannnte "All-" oder "Existenz-" Aussagen getroffen werden. Hier zwei Beispiele:

(1): Für alle Teiler x von 12 gilt: x ist eine Primzahl.

(2): Es gibt eine natürliche Zahl x, sodass $(x + x^2 < 4)$ gilt.

Die in der Klammer stehenden Aussagen können auch aus mehreren Aussagen zusammengesetzt sein (und ihrerseits wieder All- und Existenzaussagen enthalten). Im mathematischen Alltag ist es häufig wichtig, Aussagen dieses Typs zu negieren.

Eine Allaussage "für alle x gilt A" wird durch Negation zu der Existenzaussage "es gibt ein x, sodass (nicht A) gilt". Im obigen Beispiel läuft das wie folgt:

nicht(1): Es gibt einen Teiler x von 12, sodass x keine Primzahl ist.

Eine Existenzaussage "es gibt ein x, sodass A gilt" wird durch Negation zu der Allaussage "für alle x gilt (nicht A)" Im obigen Beispiel läuft das wie folgt:

nicht(2): Für jede natürliche Zahl x gilt: $x + x^2 \geq 4$.

In der Mathematik arbeitet man mit Begriffen, die exakt definiert sind; hier ein aus der Schule bekanntes Beispiel einer solchen Definition:

Definition 1.1.5. Sind a, n zwei ganze Zahlen, so nennt man a einen *Teiler* von n, in Zeichen $a|n$, falls es eine ganze Zahl b gibt mit $ab = n$.

Dann geht es darum, mathematische Sätze über die definierten Begriffe zu gewinnen. In einem solchen Satz werden zunächst die Voraussetzungen genannt und dann wird die Aussage formuliert; zum Beispiel:

Satz 1.1.6. *Es seien a, n, n' ganze Zahlen, sodass a ein Teiler von n und ein Teiler von n' ist (das sind die Voraussetzungen). Dann ist a ein Teiler von $n + n'$ (das ist die Aussage).*

Nun muss man den Satz beweisen, d.h., man muss zeigen, dass die getroffene Aussage, nennen wir sie A, unter den genannten Voraussetzungen, nennen wir sie V, richtig ist. Dabei darf man nur auf die Definitionen und bereits Bewiesenes zurückgreifen

In der Sprache der Logik bedeutet dies, dass man Wahrheit der Aussage "$V \implies A$" nachweisen muss und dazu nur bereits verifizierte Aussagen verwenden darf.

Beweis von Satz 1.1.6. Die Voraussetzung "(a Teiler von n) und (a ist Teiler von n')" bedeutet nach Definition, dass es eine ganze Zahlen b und b' gibt mit

$$ab = n \quad \text{und} \quad ab' = n'.$$

Addieren zweier Gleichungen liefert wieder eine Gleichung (das stammt aus unserem Vorrat an bewiesenen Aussagen). Damit folgt

$$ab + ab' = n + n'.$$

Durch Ausklammern von a (ein weiterer Trick aus unserer Vorratskiste) erhalten wir

$$a(b + b') = n + n'.$$

Mit der ganzen Zahl $c := b + b'$ gilt daher $ac = n + n'$, d.h., a ist ein Teiler von $n + n'$. □

Wir diskutieren anhand konkreter Beispiele zwei wichtige mathematische Beweisprinzipien, die *vollständige Induktion* und den *indirekten Beweis*.

Definition 1.1.7. Eine ganze Zahl n heißt *Primzahl*, falls $n \geq 2$ gilt und $1, n$ die einzigen positiven Teiler von n sind.

Satz 1.1.8. *Jede ganze Zahl $n \geq 2$ besitzt eine Darstellung $n = p_1 \cdots p_r$ mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Zum "Induktionsanfang". Für $n = 2$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Zum "Induktionsschritt". Wir nehmen an, die Aussage sei für alle m mit $2 \leq m < n$ verifiziert, und zeigen, dass sie dann auch für n gilt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1. Die Zahl n ist eine Primzahl. In diesem Fall ist die Aussage des Satzes offensichtlich richtig.

Fall 2. Die Zahl n ist keine Primzahl. Dann ist n ein Produkt zweier Zahlen, $n = k \cdot l$ mit $1 < k, l < n$. Nach Induktionsannahme sind k und l Produkte von Primzahlen. Folglich ist auch n ein Produkt von Primzahlen. □

Satz 1.1.9 (Euklid)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Nehmen wir an, es existierten nur endlich viele Primzahlen, etwa $p_1, \ldots, p_r$. Diese Annahme führen wir zu einem Widerspruch. Dazu betrachten wir die Zahl

$$m := p_1 \cdots p_r + 1.$$

Nach Satz 1.1.8 ist m ein Produkt von Primzahlen, d.h, eine der Zahlen p_i ist ein Teiler von m. Nach Satz 1.1.6 ist p_i dann auch ein Teiler von $1 = m - p_1 \cdots p_r$. Widerspruch. □

Aufgaben zu Abschnitt 1.1.

Aufgabe 1.1.10. Verifiziere die Äquivalenzen 1.1.3.1 bis 1.1.3.4 mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

Aufgabe 1.1.11. Verifiziere die Äquivalenzen 1.1.3.5, 1.1.3.6 und 1.1.3.7 mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

Aufgabe 1.1.12. Es seien A, B Aussagen. Verifiziere mit Hilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (A \implies B) &\iff ((\text{nicht}\, A) \text{ oder } (A \text{ und } B)), \\ (A \iff B) &\iff ((A \implies B) \text{ und } (B \implies A)) \\ &\iff (A \text{ und } B) \text{ oder } ((\text{nicht}\, A) \text{ und } (\text{nicht}\, B)). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1.13. Formuliere gemäß Bemerkung 1.1.4 die Negation für folgende Aussagen:

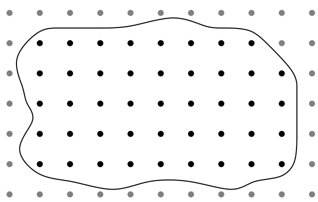
(i) Für jede ganze Zahl x gilt: $x < 1$ oder x teilt 15.
(ii) Es gibt eine ganze Zahl a, sodass $a|8$ und $a > 3$ gilt.
(iii) Für jede ganze Zahl a gibt es seine ganze Zahl b, sodass $a + b = 0$ gilt.
(iv) Es gibt eine ganze Zahl a, sodass für jede ganze Zahl b gilt $a + b = b$.
(v) Für je zwei ganze Zahlen a, b gilt genau dann $a \geq b$ und $b \geq a$, wenn $a = b$ gilt.

1.2. **Mengen.**

Beispiel 1.2.1. Einige (auch weiterhin wichtige) Mengen sind uns bereits aus der Schule bekannt:

(i) Die *Menge der natürlichen Zahlen*: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
(ii) Die *Menge der ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
(iii) Die *Menge der rationalen Zahlen*: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q};\ \text{wobei } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$.
(iv) Die *Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen*.

Vereinbarung 1.2.2 (Cantor)**.** Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung gewisser Objekte (z.B. gewisser Zahlen, gewisser Punkte in der Ebene, etc.).



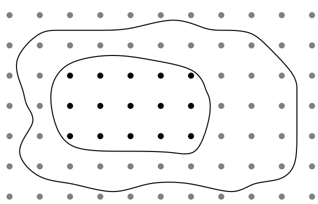
X

Die in einer Menge X zusammengefassten Objekte nennen wir ihre *Elemente*. Wir schreiben $x \in X$, falls das Objekt x ein Element der Menge X ist, bzw. $x \notin X$, falls das Objekt x kein Element von X ist.

Die *leere Menge* besitzt keine Elemente; sie wird mit $\emptyset$ oder auch $\{\ \}$ bezeichnet. Ist eine Menge X *endlich*, d.h., besitzt sie nur endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n$, so schreiben wir auch $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Wir nennen zwei Mengen X und Y *gleich*, in Zeichen $X = Y$, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten.

Definition 1.2.3. Es sei X eine Menge. Wir nennen eine Menge A eine *Teilmenge* von X, in Zeichen $A \subseteq X$ (auch $X \supseteq A$), falls jedes Element von A auch ein Element von X ist.



$A \subseteq X$

Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit $A \neq X$, so nennen wir A eine *echte Teilmenge* von X und schreiben auch $A \subset X$ (bzw. $X \supset A$) dafür.

Bemerkung 1.2.4. Für jede Menge X gilt $\emptyset \subseteq X$ und $X \subseteq X$. Weiter hat man die *Potenzmenge* von X, d.h., die Menge aller Teilmengen von X:

$$\mathfrak{P}(X) \quad := \quad \{A;\ A \subseteq X\}.$$

Beispiel 1.2.5. Es sei $X := \{1, 2, 3\}$. Dann ist die Potenzmenge von X gegeben durch

$$\mathfrak{P}(X) \quad := \quad \big\{\, \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\} \,\big\}.$$

Bemerkung 1.2.6. Es seien X und Y zwei Mengen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

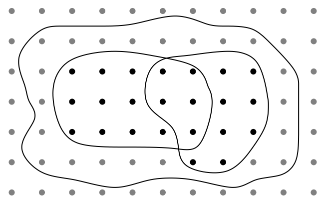
(i) Es gilt $X = Y$.
(ii) Es gilt $X \subseteq Y$ und $X \supseteq Y$.

Schreibweise 1.2.7. Häufig sind die Elemente einer Teilmenge durch eine gewisse Eigenschaft charakterisiert. Beispielsweise besteht die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ genau aus den nichtnegativen ganzen Zahlen; dies schreibt man in der Form

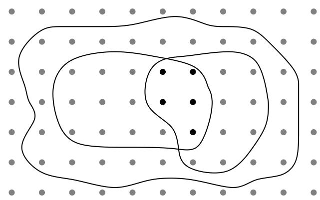
$$\mathbb{N} \quad = \quad \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\}.$$

Definition 1.2.8. Es sei X eine Menge, und es seien $A, B \subseteq X$ zwei Teilmengen.

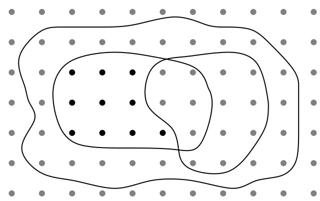
(i) Die *Vereinigung* von A und B ist $A \cup B \ := \ \{x \in X;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}$.



(ii) Der *Durchschnitt* von A und B ist $A \cap B \ := \ \{x \in X;\ x \in A \text{ und } x \in B\}$.



(iii) Das *Komplement* von B in A ist $A \setminus B \ := \ \{x \in X;\ x \in A \text{ und } x \notin B\}$.



Satz 1.2.9. *Es sei X eine Menge, und es seien $A, B, C \subseteq X$ Teilmengen. Dann gilt:*

$$A \cup B = B \cup A, \tag{1.2.9.1}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C. \tag{1.2.9.2}$$

$$A \cap B = B \cap A, \tag{1.2.9.3}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{1.2.9.4}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{1.2.9.5}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1.2.9.6}$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \tag{1.2.9.7}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \tag{1.2.9.8}$$

Beweis. Wir erhalten alle Gleichungen mehr oder weniger direkt mit Hilfe der Regeln aus Bemerkung 1.1.3.

Zu (1.2.9.1). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X;\ x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ &= \{x \in X;\ x \in B \text{ oder } x \in A\} \\ &= B \cup A. \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.2). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ oder } (x \in B \text{ oder } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ oder } x \in C\} \\ &= (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.3). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und } x \in B\} \\ &= \{x \in X;\ x \in B \text{ und } x \in A\} \\ &= B \cap A. \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.4). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und } (x \in B \text{ und } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ und } x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.5). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.6). Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ und } (x \in A \text{ oder } x \in C)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.7). Es gilt

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und nicht}(x \in B \text{ oder } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C)\} \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Zu (1.2.9.8). Es gilt

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und nicht}(x \in B \text{ und } x \in C)\} \\ &= \{x \in X;\ x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ oder } x \notin C)\} \\ &= \{x \in X;\ (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \notin C)\} \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

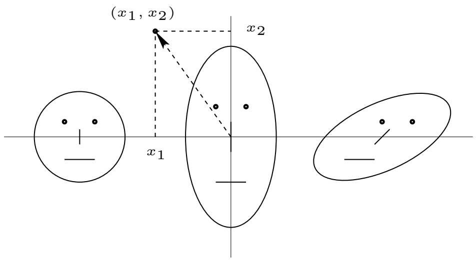
□

Definition 1.2.10. Es seien Mengen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben. Das *direkte (auch kartesische) Produkt* dieser Mengen ist definiert als

$$X_1 \times \ldots \times X_n \quad = \quad \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Die Elemente $(x_1, \ldots, x_n)$ von $X_1 \times \ldots \times X_n$ nennt man auch *n-Tupel*, und man nennt x_i die *i-te* Komponente von $(x_1, \ldots, x_n)$.

Beispiel 1.2.11. Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ ist ein direktes Produkt: Es gilt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ sind Zahlenpaare (x_1, x_2) mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.



Ein solches Zahlenpaar stellt die Koordinaten eines Punktes der Ebene dar. Die reelle Ebene ist berühmt für ihre Teilmengen, s.o..

Bemerkung 1.2.12. Häufig besteht die Notwendigkeit mathematische Objekte zu indizieren; zum Beispiel notiert man eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Das kann man auch allgemeiner machen: Man ersetzt $\mathbb{N}$ durch eine beliebige Menge I und nimmt anstelle der reellen Zahlen a_n Elemente x_i einer Menge X. Man nennt I dann die *Indexmenge*, die Elemente $i \in I$ die *Indizes* (Sg. Index) und $(x_i)_{i \in I}$ eine *Familie* in X.

Definition 1.2.13. Es seien X eine Menge, und es sei $(A_i)_{i \in I}$, eine Familie von Teilmengen von X.

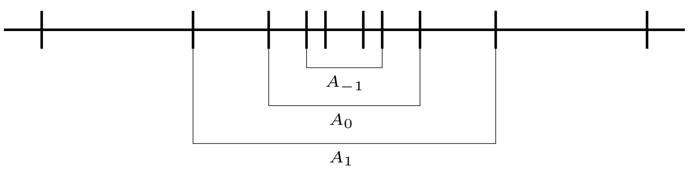
(i) Die *Vereinigung* der Teilmengen A_i ist

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad := \quad \{x \in X;\ \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}.$$

(ii) Der *Durchschnitt* der Teilmengen A_i ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i \quad := \quad \{x \in X;\ \text{ für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i\}.$$

Beispiel 1.2.14. Zu $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir das Intervall $A_n := [-(2^n), 2^n] \subset \mathbb{R}$.



Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \; = \; \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n \; = \; \{0\}.$$

Satz 1.2.15. *Es sei X eine Menge, und es seien $(A_i)_{i\in I}$ sowie $(B_j)_{j\in J}$ Familien von Teilmengen von X. Dann gilt*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \;\cap\; \bigcup_{j\in J} B_j \quad=\quad \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\cap B_j, \tag{1.2.15.1}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \;\cup\; \bigcap_{j\in J} B_j \quad=\quad \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i\cup B_j, \tag{1.2.15.2}$$

$$X\setminus \bigcup_{i\in I} A_i \quad=\quad \bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i), \tag{1.2.15.3}$$

$$X\setminus \bigcap_{i\in I} A_i \quad=\quad \bigcup_{i\in I}(X\setminus A_i). \tag{1.2.15.4}$$

Beweis. Zu 1.2.15.1. Es gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i \;\cap\; \bigcup_{j\in J} B_j &= \{x\in X;\ (x\in A_i \text{ für ein } i\in I) \text{ und } (x\in B_j \text{ für ein } j\in J)\}\\ &= \{x\in X;\ x\in A_i\cap B_j \text{ für ein } (i,j)\in I\times J\}\\ &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i\cap B_j.\end{aligned}$$

Zu 1.2.15.2. Es gilt

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} A_i \;\cup\; \bigcap_{j\in J} B_j &= \{x\in X;\ (x\in A_i \text{ für alle } i\in I) \text{ oder } (x\in B_j \text{ für alle } j\in J)\}\\ &= \{x\in X;\ x\in A_i\cup B_j \text{ für alle } (i,j)\in I\times J)\}\\ &= \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i\cup B_j.\end{aligned}$$

Dabei bedarf die Inklusion "$\supseteq$" der zweiten Gleichung einer kurzen Erläuterung. Ist $x\in X$ mit $x\in A_i\cup B_j$ für alle $(i,j)\in I\times J$ gegeben, so müssen wir zeigen, dass $x\in A_i$ für alle $i\in I$ oder $x\in B_j$ für alle $j\in J$ gilt.

Gilt bereits $x\in A_i$ für alle $i\in I$, so ist nichts weiter zu zeigen. Gibt es hingegen ein $i\in I$ mit $x\notin A_i$, so haben wir immer noch $x\in A_i\cup B_j$ für alle $j\in J$. Das bedeutet, dass für jedes $j\in J$ gilt: $x\in A_i$ oder $x\in B_j$. Wegen $x\notin A_i$ erhalten wir $x\in B_j$ für jedes $j\in J$.

Zu 1.2.15.3. Es gilt

$$\begin{aligned}X\setminus\bigcup_{i\in I} A_i &= \left\{x\in X;\ \text{nicht}\left(x\in\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right\}\\ &= \{x\in X;\ \text{nicht(es gibt ein } i\in I \text{ mit } x\in A_i)\}\\ &= \{x\in X;\ \text{für alle } i\in I \text{ gilt } x\notin A_i)\}\\ &= \{x\in X;\ \text{für alle } i\in I \text{ gilt } x\in X\setminus A_i)\}\\ &= \bigcap_{i\in I}(X\setminus A_i).\end{aligned}$$

Zu 1.2.15.4. Es gilt

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i &= \left\{ x \in X;\ \text{nicht} \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right) \right\} \\ &= \{ x \in X;\ \text{nicht(für alle } i \in I \text{ gilt } x \in A_i) \} \\ &= \{ x \in X;\ \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \notin A_i) \} \\ &= \{ x \in X;\ \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in X \setminus A_i) \} \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i). \end{aligned}$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 1.2.

Aufgabe 1.2.16. Betrachte die Menge $X := \{1, \dots, n\}$. Zeige: X besitzt genau 2^n Teilmengen.

Aufgabe 1.2.17. Finde ein Beispiel für eine Menge X und Teilmengen $A, B, C \subseteq X$, sodass Folgendes gilt:

$$A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C \neq \emptyset, \qquad B \cap C \neq \emptyset, \qquad A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Aufgabe 1.2.18. Es sei X eine Menge, und es seien Teilmengen $A, B \subseteq X$ gegeben. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) Es gilt $A = B$.
(ii) Es gilt $A \cup B = A \cap B$.

Aufgabe 1.2.19. Es sei X eine Menge, und es seien Teilmengen $A, B, C \subseteq X$ gegeben. Zeige:

$$\begin{aligned} X \setminus (X \setminus A) &= A, \\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= (A \cup B) \setminus (A \cap B), \\ A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2.20. Skizziere die folgenden Teilmengen A, B, C der reellen Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}, \\ B &:= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = 1\right\}, \\ C &:= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1\right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2.21. Es seien X_1 und X_2 Mengen, und es seien Teilmengen $A_1, B_1 \subseteq X_1$ sowie $A_2, B_2 \subseteq X_2$ gegeben. Zeige:

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) &\subseteq (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2), \\ (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2). \end{aligned}$$

Zeige durch Angabe eines expliziten Beispiels, dass in der ersten Aussage auch eine echte Teilmenge vorliegen kann.

1.3. **Abbildungen.**

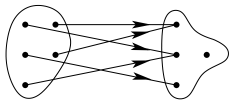
Beispiel 1.3.1. Ein aus der Schule bekanntes Beispiel für eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}, \qquad x \ \mapsto \ x^2.$$

Definition 1.3.2. Es seien X und Y zwei Mengen. Eine *Abbildung* von X nach Y ist eine Vorschrift φ, die jedem $x \in X$ (genau) ein $\varphi(x) \in Y$ zuordnet, in Zeichen:

$$\varphi\colon X \ \to \ Y, \qquad x \ \mapsto \ \varphi(x).$$

Das Element $\varphi(x) \in Y$ nennt man auch den *Wert* des Elementes $x \in X$ unter der Abbildung $\varphi\colon X \to Y$.



Wir nennen zwei Abbildungen $\varphi, \psi\colon X \to Y$ *gleich*, in Zeichen $\varphi = \psi$, falls $\varphi(x) = \psi(x)$ für jedes $x \in X$ gilt.

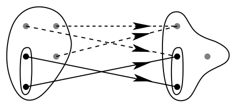
Beispiel 1.3.3. Es sei X eine Menge. Die *identische Abbildung*, oder auch die *Identität* auf X ist

$$\mathrm{id}_X\colon X \ \to \ X, \qquad x \ \mapsto \ x.$$

Definition 1.3.4. Es seien X sowie Y Mengen, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.

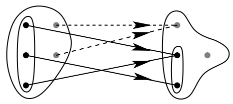
(i) Das *Bild* einer Teilmenge $A \subseteq X$ unter der Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist die Teilmenge

$$\varphi(A) \ := \ \{\varphi(x);\ x \in A\} \ \subseteq \ Y.$$



(ii) Das *Urbild* einer Teilmenge $B \subseteq Y$ unter der Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist die Teilmenge

$$\varphi^{-1}(B) \ := \ \{x \in X;\ \varphi(x) \in B\} \ \subseteq \ X.$$



Die *Faser* eines Elements $y \in Y$ unter der Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist die Teilmenge $\varphi^{-1}(y) := \varphi^{-1}(\{y\})$.

Beispiel 1.3.5. Für die bereits diskutierte Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ erhält man beispielsweise

$$f([-1,1]) \ = \ [0,1], \qquad f^{-1}([1,4]) \ = \ [-2,-1] \cup [1,2].$$

Weiter ist die Faser eines Punktes $y \in \mathbb{R}$ unter f gegeben durch

$$f^{-1}(y) \quad = \quad \begin{cases} \emptyset & y < 0, \\ \{0\} & y = 0, \\ \pm\sqrt{y} & y > 0. \end{cases}$$

Satz 1.3.6. *Es seien X sowie Y Mengen, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.*

(i) *Es seien $A, A' \subseteq X$ Teilmengen und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \varphi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &= \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i), \\ \varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\subseteq \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i), \\ \varphi(A \setminus A') &\supseteq \varphi(A) \setminus \varphi(A'). \end{aligned}$$

(ii) *Es seien $B, B' \subseteq Y$ Teilmengen und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) &= \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i), \\ \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &= \bigcap_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i), \\ \varphi^{-1}(B \setminus B') &= \varphi^{-1}(B) \setminus \varphi^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Beweis. Zu (i). Zur ersten Gleichung. Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in \varphi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\iff \text{es gibt ein } x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ mit } \varphi(x) = y \\ &\iff \text{es gibt ein } i \in I \text{ und ein } x \in A_i \text{ mit } \varphi(x) = y \\ &\iff \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } y \in \varphi(A_i) \\ &\iff y \in \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i). \end{aligned}$$

Zur zweiten Gleichung. Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in \varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\iff \text{es gibt ein } x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ mit } \varphi(x) = y \\ &\iff \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } x \in A_i \text{ für jedes } i \in I \\ &\qquad \text{und } \varphi(x) = y \\ &\implies \text{es gilt } y \in \varphi(A_i) \text{ für jedes } i \in I \\ &\iff y \in \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i). \end{aligned}$$

Zur dritten Gleichung. Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A) \setminus \varphi(A') &\iff \text{es gilt } y \in \varphi(A) \text{ und } y \notin \varphi(A') \\ &\iff \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } \varphi(x) = y \text{ und } \varphi(x) \notin \varphi(A') \\ &\implies \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } \varphi(x) = y \text{ und } x \notin A' \\ &\iff y \in \varphi(A \setminus A'). \end{aligned}$$

Zu (ii). Zur ersten Gleichung. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \ \in \ \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) &\iff \varphi(x) \ \in \ \bigcup_{i\in I} B_i \\ &\iff \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } \varphi(x) \in B_i \\ &\iff \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in \varphi^{-1}(B_i) \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

Zur zweiten Gleichung. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \ \in \ \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &\iff \varphi(x) \ \in \ \bigcap_{i\in I} B_i \\ &\iff \text{für jedes } i \in I \text{ gilt } \varphi(x) \in B_i \\ &\iff \text{für jedes } i \in I \text{ gilt } x \in \varphi^{-1}(B_i) \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

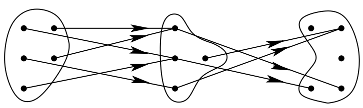
Zur dritten Gleichung. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \ \in \ \varphi^{-1}(B \setminus B') &\iff \varphi(x) \ \in \ B \setminus B' \\ &\iff \text{es gilt } \varphi(x) \in B \text{ und } \varphi(x) \notin B' \\ &\iff \text{es gilt } x \in \varphi^{-1}(B) \text{ und } x \notin \varphi^{-1}(B') \\ &\iff x \ \in \ \varphi^{-1}(B) \setminus \varphi^{-1}(B'). \end{aligned}$$

□

Definition 1.3.7. Es seien $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die *Komposition* (auch *Hintereinanderausführung*) "ψ nach φ" ist die Abbildung

$$\psi \circ \varphi\colon X \ \to \ Z, \qquad x \ \mapsto \ \psi(\varphi(x)).$$



Satz 1.3.8. *Das Komponieren von Abbildungen ist assoziativ, d.h., für je drei Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ und $\kappa\colon Z \to W$ gilt*

$$(\kappa \circ \psi) \circ \varphi \quad = \quad \kappa \circ (\psi \circ \varphi).$$

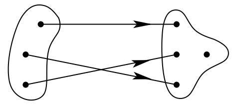
Beweis. Wir weisen die Gleichheit von $(\kappa \circ \psi) \circ \varphi$ und $\kappa \circ (\psi \circ \varphi)$ nach, indem wir die beiden Abbildungen in jedem $x \in X$ vergleichen. Es gilt

$$\begin{aligned} ((\kappa \circ \psi) \circ \varphi)(x) &= (\kappa \circ \psi)(\varphi(x)) \\ &= \kappa(\psi((\varphi(x)))) \\ &= \kappa((\psi \circ \varphi)(x)) \\ &= (\kappa \circ (\psi \circ \varphi))(x). \end{aligned}$$

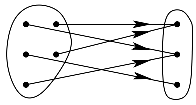
□

Definition 1.3.9. Es seien X und Y Mengen. Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ heißt

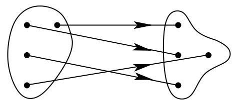
(i) *injektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$ gibt,



(ii) *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$ gibt,



(iii) *bijektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$ gibt.



Bemerkung 1.3.10. Es seien X sowie Y Mengen, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) $\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn $\varphi(X) = Y$ gilt.
(ii) $\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Satz 1.3.11. *Es seien X sowie Y nichtleere Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.*

(i) *$\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ gibt.*
(ii) *$\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ gibt.*

Beweis. Zu (i). Es sei zunächst $\varphi\colon X \to Y$ injektiv. Zu jedem $y \in \varphi(X)$ gibt es ein Element $x_y \in X$ mit $\varphi(x_y) = y$. Wir wählen weiter ein beliebiges Element $a \in X$ und definieren eine Abbildung

$$\psi\colon Y \to X, \qquad y \mapsto \begin{cases} x_y, & \text{falls } y \in \varphi(X), \\ a, & \text{falls } y \notin \varphi(X). \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, dass $\psi(\varphi(x)) = x$ für jedes $x \in X$ gilt. Ist ein Element $x \in X$ gegeben, so setzen wir $y := \varphi(x)$. Damit gilt

$$\varphi(\psi(\varphi(x))) \;=\; \varphi(\psi(y)) \;=\; \varphi(x_y) \;=\; y \;=\; \varphi(x).$$

Also werden x sowie $\psi(\varphi(x))$ unter φ auf y abgebildet. Da φ injektiv ist, folgt $\psi(\varphi(x)) = x$.

Es sei nun eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass jedes $y \in Y$ höchstens ein Urbild unter φ besitzt. Dazu betrachten wir $x, x' \in X$ mit $\varphi(x) = y = \varphi(x')$. Dann erhalten wir

$$x \;=\; \psi(\varphi(x)) \;=\; \psi(y) \;=\; \psi(\varphi(x')) \;=\; x'.$$

Zu (ii). Es sei zunächst $\varphi\colon X \to Y$ surjektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $x_y \in X$ mit $\varphi(x_y) = y$. Die gesuchte Abbildung $\psi\colon Y \to X$ erhalten wir also durch

$$\psi\colon Y \to X, \qquad y \mapsto x_y.$$

Es sei nun eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass jedes $y \in Y$ ein Urbild unter φ besitzt. Zu gegebenem $y \in Y$ setzen wir $x_y := \psi(y)$ und erhalten $\varphi(x_y) = \varphi(\psi(y)) = y$. $\square$

Definition 1.3.12. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen. Eine *Umkehrabbildung* zu $\varphi\colon X \to Y$ ist eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$ mit

$$\psi \circ \varphi \;=\; \mathrm{id}_X, \qquad \varphi \circ \psi \;=\; \mathrm{id}_Y.$$

Satz 1.3.13. *Es seien X sowie Y nichtleere Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist bijektiv.*
(ii) *Die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ besitzt eine Umkehrabbildung.*

Gilt eine der beiden Aussagen, so ist die Umkehrabbildung von $\varphi\colon X \to Y$ eindeutig bestimmt.

Lemma 1.3.14. *Es seien X, Y Mengen, und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sind $\psi, \psi'\colon Y \to X$ Abbildungen mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ und $\varphi \circ \psi' = \mathrm{id}_Y$, so gilt $\psi = \psi'$.*

Beweis. Für jedes Element $y \in Y$ gilt $\psi(y) = \psi(\varphi(\psi'(y))) = \psi'(y)$. □

Beweis von Satz 1.3.13. Zu "(i)⇒(ii)". Als bijektive Abbildung ist $\varphi\colon X \to Y$ injektiv und surjektiv. Satz 1.3.11 liefert daher Abbildungen $\psi, \psi'\colon Y \to X$ mit

$$\psi \circ \varphi \;=\; \mathrm{id}_X, \qquad \varphi \circ \psi' \;=\; \mathrm{id}_Y.$$

Nach Lemma 1.3.14 gilt $\psi = \psi'$. Folglich ist $\psi\colon Y \to X$ eine Umkehrabbildung zu $\varphi\colon X \to Y$.

Zu "(ii)⇒(i)". Es sei $\psi\colon Y \to X$ eine Umkehrabbildung zu $\varphi\colon X \to Y$. Dann liefert Satz 1.3.11 sofort, dass φ injektiv und surjektiv ist. Folglich ist φ bijektiv.

Zur Eindeutigkeit der Umkehrabbildung. Sind $\psi, \psi'\colon Y \to X$ Umkehrabbildungen zu $\varphi\colon X \to Y$, so besagt Lemma 1.3.14, dass $\psi' = \psi$ gilt. □

Schreibweise 1.3.15. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung nichtleerer Mengen. Dann bezeichnet man die zugehörige Umkehrabbildung mit $\varphi^{-1}\colon Y \to X$.

Aufgaben zu Abschnitt 1.3.

Aufgabe 1.3.16 (Beispiele zu Satz 1.3.6)**.**

(i) Gib ein Beispiel für eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ mit
$$\varphi(A \cap A') \;\neq\; \varphi(A) \cap \varphi(A').$$
(ii) Gib ein Beispiel für eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ mit
$$\varphi(A \setminus A') \;\neq\; \varphi(A) \setminus \varphi(A').$$

Aufgabe 1.3.17. Es seien X sowie Y Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(i) Sind $A, A' \subseteq X$ Teilmengen mit $A \subseteq A'$, so gilt $\varphi(A) \subseteq \varphi(A')$.
(ii) Sind $B, B' \subseteq Y$ Teilmengen mit $B \subseteq B'$, so gilt $\varphi^{-1}(B) \subseteq \varphi^{-1}(B')$.

Aufgabe 1.3.18. Es seien X sowie Y Mengen, $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige:
$$A \;\subseteq\; \varphi^{-1}(\varphi(A)), \qquad\qquad \varphi(\varphi^{-1}(B)) \;\subseteq\; B.$$
Zeige anhand von Beispielen, dass man bei keiner der beiden Aussagen Gleichheit erwarten darf. Zeige weiter
$$\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \;=\; \varphi(A).$$

Aufgabe 1.3.19. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
(ii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
(iii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$.
(iv) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$.

Aufgabe 1.3.20. Betrachte die folgende Teilmenge der reellen Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
$$A \quad := \quad \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\; x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}.$$
Zeige:

(i) Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ ist bijektiv, und es gilt
$$\varphi(A) \quad = \quad A.$$
(ii) Die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$ ist bijektiv, und es gilt
$$\psi(A) \quad = \quad \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\; x_1^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = 1\right\}.$$
(iii) Die Abbildung $\kappa\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$ ist bijektiv, und es gilt
$$\kappa(A) \quad = \quad \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\; x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 1.3.21. Es seien X sowie Y Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(i) Die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist genau injektiv, wenn für je zwei Abbildungen $\psi_1, \psi_2\colon W \to X$ gilt
$$\psi_1 = \psi_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2.$$
(ii) Die Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn für je zwei Abbildungen $\psi_1, \psi_2\colon Y \to Z$ gilt
$$\psi_1 = \psi_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi.$$

Aufgabe 1.3.22. Es seien X sowie Y Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige: Es gibt eine Menge Z, eine surjektive Abbildung $\pi\colon X \to Z$ und eine injektive Abbildung $\imath\colon Z \to Y$ mit $\varphi = \imath \circ \pi$.

1.4. **Ergänzungen zu 1.2 und 1.3.**

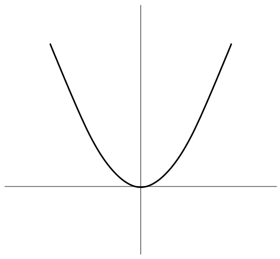
Bemerkung 1.4.1. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Mengen. Für jedes $1 \le i \le n$ hat man eine *Projektion*:

$$\pi_i\colon X_1 \times \ldots \times X_n \ \to\ X_i, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \ \mapsto\ x_i.$$

Definition 1.4.2. Es seien X und Y Mengen. Der *Graph* einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ ist die Teilmenge

$$\Gamma_\varphi \ :=\ \{(x,y) \in X \times Y;\ y = \varphi(x)\} \ \subseteq\ X \times Y.$$

Beispiel 1.4.3. Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist die aus der Schule bekannte Normalparabel.



Bemerkung 1.4.4. Es seien X sowie Y Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann hat man eine injektive Abbildung

$$\imath\colon X \ \to\ X \times Y, \qquad x \ \mapsto\ (x, \varphi(x)).$$

Für das Bild gilt $\imath(X) = \Gamma_\varphi$. Weiter hat man die beiden Projektionen von $X \times Y$ auf X bzw. Y:

$$\pi_X\colon X \times Y \to X, \quad (x,y) \mapsto x, \qquad\qquad \pi_Y\colon X \times Y \to Y, \quad (x,y) \mapsto y.$$

Man kann φ als Komposition einer injektiven Abbildung und der zweiten Projektion schreiben: Es gilt

$$\varphi \ =\ \pi_Y \circ \imath.$$

Satz 1.4.5. *Es seien X sowie Y Mengen und $\Gamma \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Γ ist der Graph einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$.*
(ii) *Es gilt $\pi_X(\Gamma) = X$ und für alle $(x,y), (x',y') \in \Gamma$ gilt $x' = x \implies y' = y$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Es sei $\Gamma = \Gamma_\varphi$ mit einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$. Nach Bemerkung 1.4.4 gilt $\pi_X(\Gamma) = X$. Sind weiter Elemente $(x,y), (x',y') \in \Gamma$ mit $x = x'$ gegeben, so erhalten wir

$$y' \ =\ \varphi(x') \ =\ \varphi(x) \ =\ y.$$

Zu "(ii)⇒(i)". Wegen $\pi_X(\Gamma) = X$ gibt es zu jedem $x \in X$ ein $y_x \in Y$ mit $(x, y_x) \in \Gamma$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi\colon X \ \to\ Y, \qquad x \ \mapsto\ y_x.$$

Nach Konstruktion gilt $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma$. Zum Nachweis von $\Gamma \subseteq \Gamma_\varphi$ sei $(x,y) \in \Gamma$ gegeben. Wegen $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$ und (ii) muss $y_x = \varphi(x)$ gelten. Das beweist $\Gamma \subseteq \Gamma_\varphi$. $\square$

Satz 1.4.6. *Es seien n eine natürliche Zahl, X, Y zwei Mengen mit jeweils n Elementen, und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\varphi\colon X \to Y$ ist injektiv.*
(ii) *$\varphi\colon X \to Y$ ist surjektiv.*

(iii) $\varphi\colon X \to Y$ *ist bijektiv.*

Beweis. Wir schreiben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist das Bild von X unter φ gegeben durch $\varphi(X) = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$.

Zu "(i)⇒(ii)". Da φ injektiv ist, sind die Bilder $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ paarweise verschieden. Also besitzt $\varphi(X)$ genau n Elemente. Da auch Y genau n Elemente besitzt folgt $\varphi(X) = Y$. Somit ist φ surjektiv.

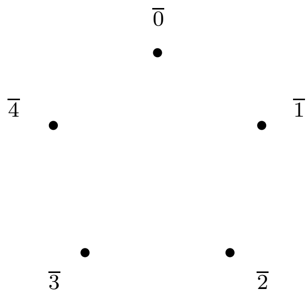
Zu "(ii)⇒(iii)". Es ist zu zeigen, dass φ injektiv ist. Andernfalls hätte man $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$ für zwei Indizes $i \neq j$. Dann besitzt $\varphi(X)$ höchstens $n-1$ Punkte. Das widerspricht $\varphi(X) = Y$.

Die Implikation "(iii)⇒(i)" ist offensichtlich. $\square$

2. Etwas Algebra

2.1. Gruppen.

Beispiel 2.1.1. Wir betrachten eine Menge C_5 mit fünf Elementen, welche wir mit $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{4}$ bezeichnen und uns wie folgt im Uhrzeigersinn angeordnet vorstellen:

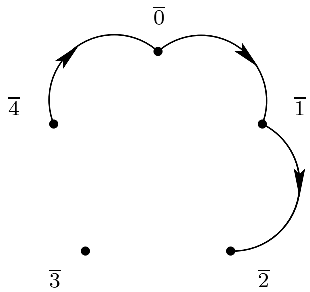


Wir erklären nun eine "Verknüpfung" auf der Menge C_5: Für zwei gegebene Elemente $\overline{a}, \overline{b} \in C_5$ definieren wir deren "Summe" durch

$$\overline{a} + \overline{b} \quad := \quad \overline{c},$$

wobei $\overline{c} \in C_5$ dasjenige Element ist, auf das man stößt, wenn man in obiger Skizze bei $\overline{b}$ startend im Uhrzeigersinn um a Plätze weitergeht; beispielsweise

$$\overline{3} + \overline{4} \ = \ \overline{2}$$



Nach diesem Schema kann man leicht weitere "Rechnungen" in C_5 durchführen, etwa

$$\overline{0} + \overline{2} \ = \ \overline{2} \ = \ \overline{2} + \overline{0}, \qquad \overline{2} + \overline{3} \ = \ \overline{0} \ = \ \overline{3} + \overline{2},$$

$$\overline{1} + (\overline{2} + \overline{3}) \ = \ \overline{1} + \overline{0} \ = \ \overline{1}, \qquad (\overline{1} + \overline{2}) + \overline{3} \ = \ \overline{3} + \overline{3} \ = \ \overline{1}.$$

Wir wollen nun einige unmittelbar einsichtige Eigenschaften der Verknüpfung "+" auf C_5 notieren. Es gilt

(G1) Die Verknüpfung "+" auf C_5 ist assoziativ, d.h., für je drei $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in C_5$ hat man

$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) \quad = \quad (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

(G2) Die Verknüpfung "+" auf C_5 besitzt mit $\overline{0}$ ein neutrales Element, d.h., für jedes $\overline{a} \in C_5$ hat man

$$\overline{0} + \overline{a} \ = \ \overline{a} \ = \ \overline{a} + \overline{0}.$$

(G3) Jedes $\overline{a} \in C_5$ besitzt ein inverses Element bezüglich "+": Mit $\overline{b} := \overline{5 - a}$ gilt für $\overline{a} = \overline{1}, \ldots, \overline{4}$:

$$\overline{b} + \overline{a} \ = \ \overline{0} \ = \ \overline{a} + \overline{b}.$$

(Ab) Die Verknüpfung "+" auf C_5 ist kommutativ, d.h., für $\overline{a}, \overline{b} \in C_5$ hat man stets

$$\overline{a} + \overline{b} \;=\; \overline{b} + \overline{a}.$$

Erinnerung 2.1.2 (Division mit Rest)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann besitzt jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Darstellung

$$a \;=\; k{\cdot}n \;+\; r, \qquad \text{wobei} \quad k := \max(l \in \mathbb{Z};\; l{\cdot}n \leq a), \quad r := a - k{\cdot}n.$$

Dabei gilt $0 \leq r < n$. Wir nennen r den *Rest von a modulo n* und schreiben auch $r(a;n)$ für r sowie $k(a;n)$ für k.

Beispiel 2.1.3. Wir bestimmen die Reste modulo 5 der ganzen Zahlen $4, 7$ und -3:

$$\begin{aligned} 4 &= 0{\cdot}5 + 4, & \text{also } r(4;5) &= 4, \\ 7 &= 1{\cdot}5 + 2, & \text{also } r(7;5) &= 2, \\ -3 &= (-1){\cdot}5 + 2, & \text{also } r(-3;5) &= 2. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.4. Das Rechnen in C_5 kann man auch mit Hilfe von Division mit Rest formulieren: Für $\overline{a}, \overline{b} \in C_5$ gilt

$$\overline{a} \;+\; \overline{b} \;=\; \overline{r(a+b;5)}.$$

Definition 2.1.5. Es sei X eine Menge. Eine *innere Verknüpfung* auf X ist eine Abbildung

$$\kappa\colon X \times X \;\to\; X, \qquad (x_1, x_2) \;\mapsto\; \kappa(x_1, x_2).$$

Für eine innere Verknüpfung $\kappa\colon X \times X \to X$ auf einer Menge X verwendet man je nach Situation auch gerne eine der folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &:= \kappa(x_1, x_2), & \\ x_1 + x_2 &:= \kappa(x_1, x_2) & \text{“additiv”}, \\ x_1 x_2 &:= \kappa(x_1, x_2) & \text{“multiplikativ”}. \end{aligned}$$

Definition 2.1.6. Eine *Gruppe* ist eine nichtleere Menge G zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$G \times G \;\to\; G, \qquad (g_1, g_2) \;\mapsto\; g_1 * g_2,$$

sodass Folgendes gilt

(G1) Die Verknüpfung "$*$" auf G ist *assoziativ*, d.h., für je drei $g_1, g_2, g_3 \in G$ hat man

$$g_1 * (g_2 * g_3) \;=\; (g_1 * g_2) * g_3.$$

(G2) Die Verknüpfung "$*$" auf G besitzt ein *neutrales Element*, d.h., es gibt ein Element $e \in G$, sodass für jedes $g \in G$ gilt

$$e * g \;=\; g \;=\; g * e.$$

(G3) Jedes $g \in G$ besitzt ein *inverses Element* bezüglich "$*$", d.h., zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$ mit

$$g' * g \;=\; e \;=\; g * g'.$$

Eine Gruppe G mit Verknüpfung "$*$" heißt *abelsch*, auch *kommutativ*, falls sie zusätzlich zu (G1), (G2) und (G3) die folgende Eigenschaft besitzt.

(Ab) Die Verknüpfung "$*$" auf G ist *kommutativ*, d.h., für je zwei $g_1, g_2 \in G$ hat man

$$g_1 * g_2 \;=\; g_2 * g_1.$$

Schreibweise 2.1.7. Will man die Verknüpfung einer Gruppe G näher bezeichnen, so schreibt man auch $(G, *)$, bzw. $(G, +)$ etc., anstatt G.

Bemerkung 2.1.8. Wir kennen bereits eine ganze Reihe abelscher Gruppen, beispielsweise

$$(C_5, +), \qquad (\mathbb{Z}, +), \qquad (\mathbb{Q}, +), \qquad (\mathbb{R}, +), \qquad (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \qquad (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Es gibt aber auch nichtabelsche Gruppen; explizite Beispiele werden uns später begegnen.

Satz 2.1.9. *Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *G besitzt genau ein neutrales Element.*
(ii) *Zu jedem Element $g \in G$ gibt es genau ein Inverses.*

Beweis. Zu (i). Wegen (G2) besitzt G ein neutrales Element $e \in G$. Es sei $e' \in G$ ein weiteres neutrales Element. Dann erhalten wir

$$e' \;=\; e * e' \;=\; e.$$

Zu (ii). Es sei $g \in G$, und es seien zwei inverse Elemente $g', g'' \in G$ zu g gegeben. Dann erhalten wir:

$$g' \;=\; g' * (g * g'') \;=\; (g' * g) * g'' \;=\; g''.$$

□

Schreibweise 2.1.10. Es sei G eine Gruppe. Das neutrale Element von G bezeichnet man oft mit e_G und das Inverse zu $g \in G$ mit g^{-1}. Weiter sind folgende Schreibweisen üblich:

- Falls die Verknüpfung von G mit "$\cdot$" bezeichnet wird, schreibt man 1_G für das neutrale Element und g^{-1} für das Inverse zu $g \in G$.
- Falls die Verknüpfung von G mit "$+$" bezeichnet wird, schreibt man 0_G für das neutrale Element und $-g$ für das Inverse zu $g \in G$.

Satz 2.1.11. *Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und es sei $g \in G$.*

(i) *Ist $g' \in G$ mit $g' * g = e_G$, so gilt bereits $g' = g^{-1}$.*
(ii) *Ist $g' \in G$ mit $g * g' = e_G$, so gilt bereits $g' = g^{-1}$.*

Beweis. Es gilt

$$g' \;=\; g' * (g * g^{-1}) \;=\; (g' * g) * g^{-1} \;=\; g^{-1},$$
$$g^{-1} \;=\; g^{-1} * (g * g') \;=\; (g^{-1} * g) * g' \;=\; g'.$$

□

Definition 2.1.12. Es seien $(G, *)$ und $(H, \star)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, falls für je zwei $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$\varphi(g_1 * g_2) \;=\; \varphi(g_1) \star \varphi(g_2).$$

Beispiel 2.1.13. Für jede Gruppe G ist die Identität $\mathrm{id}_G\colon G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 2.1.14. *Es seien $(G, *)$ und $(H, \star)$ Gruppen, und es sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt*

$$\varphi(e_G) \;=\; e_H, \qquad\qquad \varphi(g^{-1}) \;=\; \varphi(g)^{-1} \text{ für jedes } g \in G.$$

Beweis. Um die erste Gleichung zu erhalten, vermerken wir zunächst für das Bild des neutralen Elements von G:

$$\varphi(e_G) \;=\; \varphi(e_G * e_G) \;=\; \varphi(e_G) \star \varphi(e_G).$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi(e_G)^{-1}$ ergibt $e_H = \varphi(e_G)$. Damit erhalten wir weiter

$$\varphi(g^{-1}) \star \varphi(g) \;=\; \varphi(g^{-1}g) \;=\; \varphi(e_G) \;=\; e_H$$

für jedes Element $g \in G$. Nach Satz 2.1.11 (i) gilt dann bereits $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. □

Konstruktion 2.1.15. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Auf der Menge $C_n := \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$ definieren wir eine innere Verknüpfung "+" durch

$$\overline{a} \;+\; \overline{b} \quad := \quad \overline{r(a+b;n)}.$$

Satz 2.1.16. *$(C_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\overline{0}$, und das Inverse zu $\overline{a} \in C_n$ mit $\overline{a} \neq \overline{0}$ ist gegeben durch $\overline{n-a}$. Weiter ist die Abbildung*

$$\pi \colon \mathbb{Z} \;\to\; C_n, \qquad a \;\mapsto\; \overline{r(a;n)}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und für je zwei ganze Zahlen a und b gilt

$$\pi(a) \;=\; \pi(b) \quad \iff \quad n \text{ teilt } a-b.$$

Lemma 2.1.17. *Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, und es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $r(a;n) = r(b;n)$*
(ii) *n teilt $a-b$.*

Beweis. Wir setzen abkürzend $k_a := k(a;n)$ und $r_a := r(a;n)$ sowie $k_b := k(b;n)$ und $r_b := r(b;n)$. Dann haben wir $a = k_a n + r_a$ beziehungsweise $b = k_b n + r_b$.

Zu "(i)⇒(ii)". Mit $r_a = r_b$ erhalten wir sofort, dass $a-b$ ein Vielfaches von n ist, denn es gilt

$$a-b \;=\; (k_a n + r_a) - (k_b n + r_b) \;=\; k_a n - k_b n \;=\; (k_a - k_b)n.$$

Zu "(ii)⇒(i)". Ist n ein Teiler der Differenz $a-b$, so ist n auch ein Teiler der ganzen Zahl

$$(a-b) + (k_b - k_a)n \;=\; (a - k_a n) - (b - k_b n) \;=\; r_a - r_b.$$

Wegen $-n < r_a - r_b < n$ muss deshalb $r_a - r_b = 0$ gelten. Das bedeutet jedoch $r_a = r_b$. □

Beweis von Satz 2.1.16. Die Abbildung $\pi \colon \mathbb{Z} \to C_n$ ist offensichtlich surjektiv, denn man hat

$$\pi(a) \;=\; \overline{r(a;n)} \;= \overline{a}$$

für $0 \leq a \leq n-1$. Weiter erhalten wir mit Lemma 2.1.17 für je zwei ganze Zahlen a und b:

$$\pi(a) = \pi(b) \quad\iff\quad \overline{r(a;n)} = \overline{r(b;n)} \quad\iff\quad r(a;n) = r(b;n) \quad\iff\quad n \text{ teilt } a-b.$$

Wir zeigen nun, dass $\pi\colon \mathbb{Z} \to C_n$ mit den Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}$ bzw. C_n verträglich ist. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ setzen wir $k_a := k(a;n)$ und $r_a := r(a;n)$ sowie $k_b := k(b;n)$ und $r_b := r(b;n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi(a+b) &= \pi(k_a n + r_a + k_b n + r_b) \\
&= \pi((k_a + k_b)n + r_a + r_b) \\
&= \pi(r_a + r_b) \\
&= \overline{r(r_a + r_b; n)} \\
&= \overline{r_a} + \overline{r_b} \\
&= \pi(a) + \pi(b).
\end{aligned}$$

Das können wir nutzen, um die Assoziativität der Verknüpfung auf C_n ganz bequem nachzuweisen. Für je drei Elemente $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in C_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) &= \pi(a) + (\pi(b) + \pi(c)) \\
&= \pi(a) + \pi(b + c) \\
&= \pi(a + (b + c)) \\
&= \pi((a + b) + c) \\
&= \pi(a + b) + \pi(c) \\
&= (\pi(a) + \pi(b)) + \pi(c) \\
&= (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Kommutativität. Für je zwei Elemente $\overline{a}, \overline{b} \in C_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{b} &= \pi(a) + \pi(b) \\
&= \pi(a + b) \\
&= \pi(b + a) \\
&= \pi(b) + \pi(a) \\
&= \overline{b} + \overline{a}.
\end{aligned}$$

Die Tatsachen, dass $\overline{0} \in C_n$ neutrales Element ist, und dass das Inverse zu $\overline{a} \in C_n$ durch $\overline{n-a}$ gegeben ist, sind dann offensichtlich. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 2.1.

Aufgabe 2.1.18. Bestimme folgende Reste modulo 7:

$$r(28;7), \qquad r(29;7), \qquad r(30;7) \qquad r(31;7), \qquad r(365;7), \qquad r(366;7).$$

Aufgabe 2.1.19. Hans (z.Z. wach) hat am 11. November Geburtstag; das ist im Jahr 2006 ein Samstag. An was für Wochentagen hatte/hat Hans in den Jahren 1825, 1960, 2000, 2150 Geburtstag? Was haben diese Fragen mit Gruppentheorie zu tun?

Aufgabe 2.1.20. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Berechne folgenden Ausdruck in der Gruppe $(C_n, +)$:

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \ldots + \overline{n-2} + \overline{n-1}.$$

Aufgabe 2.1.21. Eine Gruppe $G = \{e_G, g_1, \ldots, g_r\}$ mit Verknüpfung "$*$" wird durch ihre *Verknüpfungstafel* beschrieben:

$$\begin{array}{c|cccc}
(G,*) & e_G & g_1 & \ldots & g_r \\
\hline
e_G & e_G * e_G & e_G * g_1 & \ldots & e_G * g_r \\
g_1 & g_1 * e_G & g_1 * g_1 & \ldots & g_1 * g_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
g_r & g_r * e_G & g_r * g_1 & \ldots & g_r * g_r
\end{array}$$

Bestimme die Verknüpfungstafeln für $(C_2, +)$ und $(C_5, +)$. Wie spiegelt sich die Tatsache, dass diese Gruppen abelsch sind in ihren Verknüpfungstafeln wieder?

Aufgabe 2.1.22. Es sei G eine Gruppe mit Verknüpfung "$*$". Zeige: Jedes Element $h \in G$ definiert bijektive Abbildungen

$$\begin{aligned} L_h \colon G &\to G, & g &\mapsto h * g, \\ R_h \colon G &\to G, & g &\mapsto g * h. \end{aligned}$$

Insbesondere kommt jedes $g \in G$ in jeder Zeile und ebenso in jeder Spalte der Verknüpfungstafel von G genau einmal vor.

Aufgabe 2.1.23. Es sei $M = \{e, m\}$ eine Menge mit zwei Elementen. Zeige: Es gibt genau eine Verknüpfung "$*$" auf M, sodass $(M, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e ist. In diesem Fall ist $(M, *)$ eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 2.1.24. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und es seien $a, b \in G$. Zeige: Die Gleichung $a * x = b$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

Aufgabe 2.1.25. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $n \in G$ ein Element mit $n * g = g$ für ein $g \in G$, so gilt $n = e_G$.
(ii) Ist $n \in G$ ein Element mit $g * n = g$ für ein $g \in G$, so gilt $n = e_G$.

Aufgabe 2.1.26. Es sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung "$*$". Zeige: G ist genau dann eine Gruppe, wenn Folgendes gilt:

(i) Es gibt ein *linksneutrales Element* $e \in G$, d.h., für jedes $g \in G$ gilt $e * g = g$.
(ii) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *Linksinverses* $g' \in G$, d.h., es gilt $g' * g = e$.

Aufgabe 2.1.27. Es sei G eine Gruppe. Zeige

(i) Gilt $(gh)2 = g^2h2$ für alle $g, h \in G$, so ist G abelsch.
(ii) Gilt $g2 = e_G$ für jedes $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 2.1.28. Zeige: Sind $\varphi \colon G \to H$ und $\psi \colon H \to F$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi \colon G \to F$ ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 2.1.29. Es seien G eine Gruppe mit genau n Elementen, H eine Gruppe mit genau m Elementen, und es sei $\varphi \colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige: Es gilt $n = km$ mit einer natürlichen Zahl k, und für jedes $h \in H$ besitzt die Faser $\varphi^{-1}(h)$ genau k Elemente.

2.2. **Ringe.**

Definition 2.2.1. Ein *Ring* ist eine Menge R zusammen mit zwei inneren Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \mathrm{add}\colon R \times R \to R, &\qquad (a,b) \mapsto a+b, \\ \mathrm{mult}\colon R \times R \to R, &\qquad (a,b) \mapsto ab \end{aligned}$$

(üblicherweise Addition und Multiplikation genannt), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Das Paar $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.,
- es gilt stets $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- es gibt ein Element $0_R \in R$ mit $0_R + a = a = a + 0_R$ für alle $a \in R$,
- zu jedem $a \in R$ gibt es ein Element $-a \in R$ mit $a + (-a) = 0_R = (-a) + a$,
- es gilt stets $a + b = b + a$.

(R2) Die Verknüpfung "$\cdot$" auf R ist assoziativ, d.h., für je drei Elemente $a, b, c \in R$ gilt

$$a \cdot (b \cdot c) \;=\; (a \cdot b) \cdot c.$$

(R3) Die Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" auf R sind *distributiv*, d.h., für je drei Elemente $a, b, c \in R$ gilt

$$a \cdot (b + c) \;=\; (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad (b + c) \cdot a \;=\; (b \cdot a) + (c \cdot a).$$

Man nennt einen Ring $(R, +, \cdot)$ *kommutativ*, falls er zusätzlich zu (R1), (R2) und (R3) die folgende Eigenschaft besitzt:

(KR) Die Verknüpfung "$\cdot$" auf R ist kommutativ, d.h., für je zwei Elemente $a, b \in R$ gilt

$$a \cdot b \;=\; b \cdot a.$$

Man sagt, dass ein Ring $(R, +, \cdot)$ *ein Einselement* besitzt, falls zusätzlich zu (R1), (R2) und (R3) gilt

(RE) Die Verknüpfung "$\cdot$" besitzt ein neutrales Element, d.h., es gibt ein Element $1_R \in R$, sodass für jedes Element $a \in R$ gilt

$$1_R \cdot a \;=\; a \cdot 1_R \;=\; a.$$

Beispiel 2.2.2. Wir kennen bereits eine ganze Reihe kommutativer Ringe mit Einselement:

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot), \qquad (\mathbb{Q}, +, \cdot), \qquad (\mathbb{R}, +, \cdot).$$

Es gibt auch wichtige nichtkommutative Ringe; wir werden später explizite Beispiele dafür kennenlernen.

Lemma 2.2.3. *Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement $1_R \in R$.*

(i) *Die neutralen Elemente 0_R der Addition und 1_R der Multiplikation in R sind eindeutig bestimmt.*

(ii) *Für jedes $r \in R$ gilt $0_R \cdot r = 0_R = r \cdot 0_R$. Insbesondere ist $1_R = 0_R$ nur in dem trivialen Ring $R = \{0_R\}$ möglich.*

(iii) *Für jedes $r \in R$ gilt $(-1_R) \cdot r = -r = r \cdot (-1_R)$. Weiter hat man für je zwei Elemente $a, b \in R$:*

$$(-a) \cdot b \;=\; a \cdot (-b) \;=\; -(a \cdot b), \qquad (-a) \cdot (-b) \;=\; a \cdot b.$$

Beweis. Zu (i). Die Eindeutigkeit des neutralen Elements 0_R der abelschen Gruppe $(R,+)$ folgt aus Satz 2.1.9. Die Eindeutigkeit von 1_R sieht man ganz analog: Ist $1'_R$ ein weiteres neutrales Element von "$\cdot$", so gilt

$$1'_R \;=\; 1_R \cdot 1'_R \;=\; 1_R.$$

Zu (ii). Wir beginnen den Nachweis von $0_R \cdot r = 0_R$ mit einer Vorüberlegung: Für jedes $r \in R$ gilt

$$\begin{aligned} 0_R \cdot r \;&=\; (0_R + 0_R) \cdot r \;=\; 0_R \cdot r + 0_R \cdot r, \\ r \cdot 0_R \;&=\; r \cdot (0_R + 0_R) \;=\; r \cdot 0_R + r \cdot 0_R. \end{aligned}$$

Addiert man nun das Element $-(0_R \cdot r) \in R$ bzw. das Element $-(r \cdot 0_R) \in R$ zu dieser Gleichung, so erhält man, wie behauptet, $0_R \cdot r = 0_R$ bzw. $r \cdot 0_R = 0_R$.

Wir kommen zur Zusatzaussage von (ii). Gilt $1_R = 0_R$ in einem Ring R, so ergibt sich jedes weitere Element $r \in R$:

$$r \;=\; 1_R \cdot r \;=\; 0_R \cdot r \;=\; 0_R.$$

Zu (iii). Wir zeigen zunächst, dass $(-1_R) \cdot r$, ebenso wie $r \cdot (-1_R)$, das additive Inverse zu r ist. Unter Verwendung von $0_R \cdot r = 0_R = r \cdot 0_R$ erhält man

$$\begin{aligned} (-1_R) \cdot r + r \;&=\; (-1_R + 1_R) \cdot r \;=\; 0_R \cdot r \;=\; 0_R, \\ r \cdot (-1_R) + r \;&=\; r \cdot (-1_R + 1_R) \;=\; r \cdot 0_R \;=\; 0_R. \end{aligned}$$

Die verbleibenden Aussagen sind dann direkte Folgerungen aus $(-1_R) \cdot r = -r$: Für je zwei Elemente $a, b \in R$ gilt

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b \;&=\; ((-1_R) \cdot a) \cdot b \;=\; (-1_R) \cdot (a \cdot b) \;=\; -(a \cdot b) \\ &=\; (a \cdot (-1_R)) \cdot b \;=\; a \cdot ((-1_R) \cdot b) \;=\; a \cdot (-b), \\ (-a) \cdot (-b) \;&=\; ((-1_R) \cdot (-1_R)) \cdot (a \cdot b) \;=\; (-(-1_R)) \cdot (a \cdot b) \\ &=\; 1_R \cdot (a \cdot b) \;=\; a \cdot b. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.4. Es sei $(R,+)$ eine abelsche Gruppe, und es seien Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ gegeben. Dann setzt man

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;:=\; a_1 + \ldots + a_n \;:=\; a_1 + (a_2 + (\ldots + (a_{n-1} + a_n) \ldots)).$$

Wegen der Assoziativität von "+" kommt es auf die Klammerung nicht an, diese Schreibweisen sind somit gerechtfertigt. Weiter setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in R$:

$$na \;=\; \sum_{i=1}^{n} a \;=\; \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ mal}}, \qquad \text{wobei } 0a := 0_R.$$

Bemerkung 2.2.5. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Sind $a_1, \ldots, a_n \in R$ gegeben, so setzt man

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \;:=\; a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \;:=\; a_1 \cdot (a_2 \cdot (\ldots \cdot (a_{n-1} \cdot a_n) \ldots)).$$

Wegen der Assoziativität von "$\cdot$" kommt es auf die Klammerung nicht an, was die Schreibweisen rechtfertigt. Besitzt R ein Einselement, so setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in R$:

$$a^n \;=\; \prod_{i=1}^{n} a \;=\; \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \qquad \text{wobei } a^0 := 1_R.$$

Sind Elemente $b_1, \ldots, b_m \in R$ gegeben, so erhält man durch Ausmultiplizieren und anschliessendes Sortieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\right) \;=\; \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right).$$

Definition 2.2.6. Es seien R und S Ringe. Eine Abbildung $\varphi\colon R \to S$ heißt *Ringhomomorphismus*, falls für je zwei $a, b \in R$ gilt

$$\varphi(a+b) \;=\; \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(a \cdot b) \;=\; \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Beispiel 2.2.7. Für jeden Ring R ist die Identität $\mathrm{id}_R\colon R \to R$ ein Ringhomomorphismus.

Konstruktion 2.2.8. Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir haben zwei Verknüpfungen auf der Menge $C_n := \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, nämlich

$$\overline{a} \;+\; \overline{b} \;:=\; \overline{r(a+b;n)}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} \;:=\; \overline{r(ab;n)}.$$

Satz 2.2.9. $(C_n, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring mit Nullelement* $\overline{0}$ *und Einselement* $\overline{1}$. *Weiter ist die Abbildung*

$$\pi\colon \mathbb{Z} \;\to\; C_n, \qquad a \;\mapsto\; \overline{r(a;n)}$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\pi(1) = \overline{1}$, *und für je zwei ganze Zahlen* a *und* b *gilt*

$$\pi(a) \;=\; \pi(b) \quad\iff\quad n \text{ teilt } a - b.$$

Beweis. Aus Satz 2.1.16 wissen wir, dass $(C_n, +)$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement $\overline{0}$ ist, dass π ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ auf $(C_n, +)$ ist, und dass genau dann $\pi(a) = \pi(b)$ gilt, wenn n ein Teiler von $a - b$ ist.

Wir zeigen, zunächst, dass π mit der Multiplikation "$\cdot$" verträglich ist. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben, so schreiben wir

$$a \;=\; k_a n + r_a, \qquad\qquad a \;=\; k_b n + r_b,$$

wobei $k_a := k(a;n)$ und $r_a := r(a;n)$ sowie $k_b := k(b;n)$ und $r_b := r(b;n)$ gemäß 2.1.2 definiert sind. Es folgt

$$\begin{aligned}
\pi(ab) &= \pi((k_a n + r_a)(k_b n + r_b)) \\
&= \pi(k_a n k_b n + k_a n r_b + k_b n r_a + r_a r_b)) \\
&= \pi(r_a r_b) \\
&= \overline{r(r_a r_b; n)} \\
&= \overline{r_a} \cdot \overline{r_b} \\
&= \pi(r_a) \cdot \pi(r_b) \\
&= \pi(a) \cdot \pi(b).
\end{aligned}$$

Das können wir nutzen, um die Assoziativität der Verknüpfung "$\cdot$" auf C_n nachzuweisen. Für je drei Elemente $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in C_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}) &= \pi(a) \cdot (\pi(b) \cdot \pi(c)) \\
&= \pi(a) \cdot \pi(bc) \\
&= \pi(a(bc)) \\
&= \pi((ab)c) \\
&= \pi(a \cdot b) \cdot \pi(c) \\
&= (\pi(a) \cdot \pi(b)) \cdot \pi(c) \\
&= (\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c}.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Kommutativität. Für je zwei Elemente $\overline{a}, \overline{b} \in C_n$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= \pi(a) \cdot \pi(b) \\ &= \pi(ab) \\ &= \pi(ba) \\ &= \pi(b) \cdot \pi(a) \\ &= \overline{b} \cdot \overline{a}. \end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch die Distributivität nachweisen. Für je drei Elemente $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in C_n$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) &= \pi(a) \cdot (\pi(b) + \pi(c)) \\ &= \pi(a) \cdot \pi(b + c) \\ &= \pi(a(b + c)) \\ &= \pi(ab + ac) \\ &= \pi(a \cdot b) + \pi(a \cdot c) \\ &= (\pi(a) \cdot \pi(b)) + (\pi(a) \cdot \pi(c)) \\ &= (\overline{a} \cdot \overline{b}) + (\overline{a} \cdot \overline{c}). \end{aligned}$$

Die Tatsachen, dass $\overline{1} \in C_n$ das Einselement ist, und dass $\pi(1) = \overline{1}$ gilt sind dann offensichtlich. $\square$

Bemerkung 2.2.10. Den Ringhomomorphismus $\pi\colon \mathbb{Z} \to C_n$ aus Satz 2.2.9 können wir für explizite Berechnungen verwenden. Beispielsweise gilt in C_6:

$$(\overline{4} + \overline{4}) \cdot \overline{5} \;=\; (\pi(4) + \pi(4)) \cdot \pi(5) \;=\; \pi((4 + 4) \cdot 5) \;=\; \pi(40) \;=\; \overline{r(40;6)} \;=\; \overline{4}.$$

Definition 2.2.11. Es sei R ein Ring mit Einselement 1_R. Man nennt ein Element $a \in R$ eine *Einheit*, falls es ein $a' \in R$ gibt mit $a \cdot a' = 1_R = a' \cdot a$. Die Menge aller Einheiten von R bezeichnet man mit R^*.

Beispiel 2.2.12. In den Ringen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind die Einheitenmengen gegeben durch

$$\mathbb{Z}^* \;=\; \{\pm 1\}, \qquad \mathbb{Q}^* \;=\; \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{R}^* \;=\; \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Satz 2.2.13. *Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Dann ist $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1_R. Ist R kommutativ, so ist $(R^*, \cdot)$ abelsch.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass für $a, b \in R^*$ das Produkt $a \cdot b$ wieder eine Einheit ist. Dazu seien $a', b' \in R$ mit $a \cdot a' = 1_R = a' \cdot a$ bzw. $b \cdot b' = 1_R = b' \cdot b$ gegeben. Dann gilt:

$$(a \cdot b) \cdot (b' \cdot a') \;=\; a \cdot ((b \cdot b') \cdot a') \;=\; a \cdot (1_R \cdot a') \;=\; a \cdot a' \;=\; 1_R,$$
$$(b' \cdot a') \cdot (a \cdot b) \;=\; b' \cdot ((a' \cdot a) \cdot b) \;=\; b' \cdot (1_R \cdot b) \;=\; b' \cdot b \;=\; 1_R.$$

Also ist $R^* \times R^* \to R^*$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ eine wohldefinierte Verknüpfung. Sie ist assoziativ mit neutralem Element 1_R, jedes $a \in R^*$ besitzt ein Inverses, und sie ist kommutativ, wenn R dies ist. $\square$

Schreibweise 2.2.14. Es sei R ein Ring mit Einselement. Wie üblich bezeichnet man das multiplikative Inverse einer Einheit $a \in R^*$ mit a^{-1}.

Satz 2.2.15. *Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, und es sei $\overline{a} \in C_n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\overline{a}$ ist eine Einheit in C_n.*
(ii) *Es gilt* $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$.

Insbesondere ist die Gruppe C_n^* der Einheiten des Ringes C_n gegeben durch

$$C_n^* \;=\; \{\overline{a} \in C_n;\ \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}.$$

Beweis. Wir arbeiten mit dem Ringhomomorphismus $\pi\colon \mathbb{Z} \to C_n$, $a \mapsto \overline{r(a;n)}$ aus Satz 2.2.9.

Zu "(i)⇒(ii)". Es sei $\overline{b} \in C_n$ mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$. Dann gilt $\pi(ab) = \pi(1)$ und somit $ab = 1 + ln$ mit einem $l \in \mathbb{Z}$.

Ist ein gemeinsamer Teiler $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ von a und n gegeben, so müssen wir zeigen, dass $c = 1$ gilt. Wir haben $a = a'c$ und $n = n'c$ mit $a', n' \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$1 \;=\; ab - ln \;=\; a'cb - ln'c \;=\; c(a'b - ln').$$

Diese Gleichung ist offensichtlich nur mit $c = 1$ zu erfüllen. Folglich ist 1 der größte gemeinsame Teiler von a und n.

Zu "(ii)⇒(i)". Wir wählen Zahlen $b, l \in \mathbb{Z}$, sodass $c := ab - ln$ minimal ist mit $c > 0$. Wir zeigen, dass c dann ein gemeinsamer Teiler von a und n ist.

Zu "c teilt a". Andernfalls hätte man $c' := r(a;c) > 0$ für den Rest von a modulo c. Mit $a = k(a;c)c + c'$ ergibt sich

$$c' \;=\; a - k(a;c)c \;=\; a - k(a;c)(ab - ln) \;=\; a(1 - k(a;c)b) - (-k(a;c)l)n.$$

Wegen $0 < c' < c$ steht dies im Widerspruch zur Wahl der beiden ganzen Zahlen b und l.

Ebenso zeigen wir "c teilt n". Andernfalls hätte man $c'' := r(n;c) > 0$ für den Rest von n modulo c. Weiter hat man

$$c'' \;=\; n - k(n;c)c \;=\; n - k(n;c)(ab - ln) \;=\; a(-k(n;c)b) - (-(1 + k(n;c)l)n.$$

Wegen $0 < c'' < c$ steht dies im Widerspruch zur Wahl der beiden ganzen Zahlen b und l.

Damit ist gezeigt, dass c ein gemeinsamer Teiler von a und n ist. Wegen $\mathrm{ggT}(a,n) = 1$ muss $c = 1$ gelten. Es folgt $ab = 1 + ln$, und wir erhalten $\overline{a} \in C_n^*$ mit

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \;=\; \pi(a) \cdot \pi(b) \;=\; \pi(ab) \;=\; \pi(1) \;=\; \overline{1}.$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 2.2.

Aufgabe 2.2.16. Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und es seien $a, b \in R$. Zeige: Es gilt

$$a^n \cdot a^m \;=\; a^{n+m}, \qquad (a^n)^m \;=\; a^{mn}, \qquad (a \cdot b)^n \;=\; a^n \cdot b^n.$$

An welcher Stelle des Beweises wird die Kommutativität des Ringes R dabei ernstlich benötigt?

Aufgabe 2.2.17 (Binomischer Lehrsatz)**.** Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und es seien $a, b \in R$. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Aufgabe 2.2.18. Berechne folgende Ausdrücke:

(i) $(\overline{3} + \overline{7}) \cdot (\overline{5} + \overline{4}) \;\in\; C_8$,
(ii) $(\overline{6} - \overline{7}) \cdot (\overline{2} - \overline{8}) \;\in\; C_9$.

Aufgabe 2.2.19. Bestimme alle Einheiten der Ringe C_4 sowie C_{12}.

Aufgabe 2.2.20. Bestimme die Einheitengruppe C_8^* des Ringes C_8 und stelle ihre Verknüpfungstafel auf.

Aufgabe 2.2.21. Zeige: Sind $\varphi\colon R \to S$ und $\psi\colon S \to T$ Ringhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi\colon R \to T$ ein Ringhomomorphismus.

2.3. **Körper.**

Definition 2.3.1. Ein *Körper* ist ein kommutativer Ring $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit Einselement, sodass $1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$ gilt.

Beispiel 2.3.2. Die Ringe $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper. Der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

Satz 2.3.3. *Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Ring $(C_n, +, \cdot)$ ist ein Körper.*
(ii) *Die Zahl n ist eine Primzahl.*

Beweis. $(C_n, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn jedes Element $\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ eine Einheit in C_n ist. Nach Satz 2.2.15 gilt dies genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ gilt für $a = 1, \ldots, n-1$. Das ist genau dann der Fall, wenn n eine Primzahl ist. □

Definition 2.3.4. Es seien $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ heißt *Körperhomomorphismus*, falls sie Ringhomomorphismus ist und $\varphi(1_\mathbb{K}) = 1_\mathbb{L}$ gilt.

Satz 2.3.5. *Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv.*

Lemma 2.3.6. *Es seien R und S Ringe, $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi(1_R) = 1_S$ und $r \in R^*$. Dann gilt $\varphi(r) \in S^*$ und $\varphi(r)^{-1} = \varphi(r^{-1})$. Insbesondere hat man $\varphi(R^*) \subseteq S^*$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(r^{-1})$ die Eigenschaften des multiplikativen Inversen zu $\varphi(r)$ besitzt. Das ergibt sich aus

$$\varphi(r^{-1}) \cdot \varphi(r) \ = \ \varphi(r^{-1} \cdot r) \ = \ \varphi(1_R) \ = \ 1_S$$

und

$$\varphi(r) \cdot \varphi(r^{-1}) \ = \ \varphi(r \cdot r^{-1}) \ = \ \varphi(1_R) \ = \ 1_S.$$

□

Beweis von Satz 2.3.5. Es sei $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ ein Körperhomomorphismus. Wir müssen zeigen, dass für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$ bereits $a = b$ gilt. Man hat

$$\varphi(a - b) \ = \ \varphi(a) - \varphi(b) \ = \ 0_\mathbb{L}.$$

Nach Lemma 2.3.6 kann $a - b$ deshalb keine Einheit in $\mathbb{K}$ sein. Das bedeutet $a - b = 0_\mathbb{K}$ und somit $a = b$. □

Bemerkung 2.3.7. Der Ringhomomorphismus $\pi\colon \mathbb{Z} \to C_n$, $a \mapsto \overline{r(a;n)}$ ist nicht injektiv.

Konstruktion 2.3.8 (Körper der komplexen Zahlen)**.** Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$$\mathbb{C} \ := \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ = \ \{(a_1, a_2);\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren zwei innere Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$. Zunächst die *komponentenweise Addition*:

$$(a_1, a_2) \ + \ (b_1, b_2) \quad := \quad (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ wird im Gegensatz zur Addition nicht komponentenweise definiert, sondern man setzt

$$(a_1, a_2) \ \cdot \ (b_1, b_2) \quad := \quad (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Satz 2.3.9. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper mit Nullelement* $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$ *und Einselement* $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$. *Weiter gilt*

$$\begin{array}{rclll} -(a_1,a_2) & = & (-a_1,-a_2) & \textit{für jedes} & (a_1,a_2) \in \mathbb{C}, \\ (a_1,a_2)^{-1} & = & \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) & \textit{für jedes} & (a_1,a_2) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}. \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(0,0)$ ist. Zur Assoziativität von "+": Es gilt stets

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) \;+\; \big((b_1,b_2)+(c_1,c_2)\big) &= (a_1,a_2) \;+\; (b_1+c_1, b_2+c_2) \\ &= (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2)) \\ &= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2) \\ &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \;+\; (c_1,c_2) \\ &= \big((a_1,a_2)+(b_1,b_2)\big) \;+\; (c_1,c_2). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(0,0) \in \mathbb{C}$ ein neutrales Element für "+" und $(-a_1,-a_2)$ ist das additive Inverse zu (a_1,a_2). Zur Kommutativität von "+": Es gilt stets

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) \;+\; (b_1,b_2) &= (a_1+b_1, a_2+b_2) \\ &= (b_1+a_1, b_2+a_2) \\ &= (b_1,b_2) \;+\; (a_1,a_2). \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den Eigenschaften der Verknüpfung "$\cdot$". Die Assoziativität ist etwas mühsam: Zunächst beobachtet man

$$\begin{aligned} (a_1,a_2)\cdot\big((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2)\big) &= (a_1,a_2)\cdot(b_1c_1-b_2c_2, b_1c_2+b_2c_1) \\ &= {\scriptstyle (a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1,\; a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1-a_2b_2c_2).} \end{aligned}$$

Dann beobachtet man

$$\begin{aligned} \big((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)\big)\cdot(c_1,c_2) &= (a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)\cdot(c_1,c_2) \\ &= {\scriptstyle (a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2,\; a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1).} \end{aligned}$$

Bei näherem Hinsehen stellt man fest, dass die beiden kleingedruckten Terme übereinstimmen. Damit ist die Assoziativität verifiziert. Zur Kommutativität:

$$\begin{aligned} (a_1,a_2) \;\cdot\; (b_1,b_2) &= (a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1) \\ &= (b_1a_1-b_2a_2, b_1a_2+b_2a_1) \\ &= (b_1,b_2) \;\cdot\; (a_1,a_2). \end{aligned}$$

Zur Distributivität. Da wir die Kommutativität bereits nachgewiesen haben, genügt es, $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{C}$ zu zeigen. Das erhält man mit

$$\begin{aligned} (a_1,a_2)\cdot\big((b_1,b_2)+(c_1,c_2)\big) &= (a_1,a_2)\cdot(b_1+c_1, b_2+c_2) \\ &= (a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2), a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1)) \\ &= (a_1b_1+a_1c_1-a_2b_2-a_2c_2, a_1b_2+a_1c_2+a_2b_1+a_2c_1) \\ &= (a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_1-a_2c_2, a_1c_2+a_2c_1) \\ &= (a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)+(a_1,a_2)\cdot(c_1,c_2). \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass $(1,0)$ ein neutrales Element für die Multiplikation "$\cdot$" ist, lässt sich leicht nachrechnen: Es gilt

$$(a_1,a_2)\cdot(1,0) \;=\; (1,0)\cdot(a_1,a_2) \;=\; (1a_1-0a_2, 1a_2+0a_1) \;=\; (a_1,a_2).$$

Für die erste Gleichung haben wir dabei wieder die bereits bewiesene Kommutativität von "$\cdot$" verwendet.

Schließlich bleibt noch die Formel für die multiplikative Inversenbildung zu verifizieren. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\cdot(a_1,a_2) &= \left(\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2}-\frac{-a_2^2}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2a_1}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\\ &= (1,0).\end{aligned}$$

Verwendet man erneut die Kommutativität von "·", so ergibt sich auch die zweite Bedingung für das Inverse von (a_1, a_2). □

Bemerkung 2.3.10. Um das Rechnen mit komplexen Zahlen zu vereinfachen, setzt man $I := (0, 1) \in \mathbb{C}$. Man nennt I auch die *imaginäre Einheit*. Es gilt

$$I^2 \;=\; I\cdot I \;=\; (0,1)\cdot(0,1) \;=\; (-1,0) \;=\; -1_{\mathbb{C}}.$$

Schreibt man weiter einfach a_1 für $(a_1, 0)$, wobei $a_1 \in \mathbb{R}$, so erhält man für jede komplexe Zahl $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$(a_1,a_2) \;=\; (a_1,0)\cdot(1,0)+(a_2,0)\cdot(0,1) \;=\; a_1+a_2\cdot I.$$

Sind nun reelle Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gegeben, so erhält man Summe und Produkt der komplexen Zahlen $a_1 + a_2\cdot I$ und $b_1 + b_2\cdot I$ durch

$$\begin{aligned}(a_1+a_2\cdot I)+(b_1+b_2\cdot I) &= a_1+b_1+(a_2+b_2)\cdot I,\\ (a_1+a_2\cdot I)\cdot(b_1+b_2\cdot I) &= (a_1b_1+a_2b_2\cdot I^2) \;+\; (a_1b_2+a_2b_1)\cdot I\\ &= (a_1b_1-a_2b_2) \;+\; (a_1b_2+a_2b_1)\cdot I.\end{aligned}$$

Man muss sich also die Definition des Produktes von $a_1 + a_2\cdot I$ und $b_1 + b_2\cdot I$ nicht merken, sondern kann es einfach durch Ausmultiplizieren und Anwenden der Regel $I^2 = -1_{\mathbb{C}}$ berechnen.

Beispiel 2.3.11. In der Praxis schreibt man meistens kurz 1 anstelle von $1_{\mathbb{C}}$. Es folgen zwei kleine Rechnungen in $\mathbb{C}$:

$$(1+I)\cdot(1-I) \;=\; 1-I+I-I^2 \;=\; 2,$$

$$(2-3I)^{-1} \;=\; \frac{2}{2^2+3^2}-\frac{-3}{2^2+3^2}I \;=\; \frac{2}{13}+\frac{3}{13}I.$$

Bemerkung 2.3.12. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ in den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \;+\; \ldots \;+\; a_{1n}x_n &= b_1,\\ &\;\vdots\\ a_{m1}x_1 \;+\; \ldots \;+\; a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Eine *Lösung* des obigen Systems ist ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, das alle Gleichungen erfüllt. Das System heißt *lösbar*, falls es eine Lösung besitzt.

Lineare Gleichungssysteme über Körpern lassen sich sehr systematisch behandeln, wie wir später sehen werden. Wir wollen das allgemeine Vorgehen hier anhand eines einfachen Systems über $\mathbb{Q}$ andeuten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1,\\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1,\\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1.\end{array}$$

Zunächst bringt man das System auf sogenannte “Zeilenstufenform”: Wir eliminieren die Variable x_1 aus der zweiten Gleichung, indem wir die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren. Das führt zu einem neuen System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -2, \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Man beachte, dass diese Operation rückgängig gemacht werden kann, indem man die erste Gleichung des neuen Systems zu seiner zweiten addiert. Insbeondere besitzt das neue System genau dieselben Lösungen wie das alte.

Nun multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $1/2$ (hier verwendet man die Existenz des Inversen $1/2 = 2^{-1}$) und eliminieren anschließend die Variable x_2 aus der dritten Gleichung, indem wir die zweiten Gleichung zur dritten addieren. Das führt zu dem System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1, \\ & & & & 0x_3 & = & 0. \end{array}$$

Die Lösungen dieses Systems lassen sich direkt ablesen: Die Variable x_3 ist frei wählbar (stünde auf der rechten Seite eine von Null verschiedene Zahl, so wäre das System nicht lösbar). Für die Variablen x_2 sowie x_1 erhalten wir sukkzessive folgende Bedingungen:

$$x_2 \;=\; -1 + 2x_3, \qquad x_1 \;=\; 1 + x_2 - x_3 \;=\; 1 + -1 + 2x_3 - x_3 \;=\; x_3.$$

Wie vorhin bemerkt, beschreiben diese Bedingungen auch die Lösungen des Ausgangssystems. Dessen Lösungsmenge kann man daher schreiben als

$$\{(x_3, -1 + 2x_3, x_3);\; x_3 \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Aufgaben zu Abschnitt 2.3.

Aufgabe 2.3.13. Es sei R ein endlicher kommutativer Ring mit $1_R \neq 0_R$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) R ist ein Körper.
(ii) Für je zwei $a, b \in R$ gilt $ab = 0_R \implies a = 0_R$ oder $b = 0_R$.

Aufgabe 2.3.14. Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Verifiziere die folgende Identität in $\mathbb{K}$:

$$\prod_{a \in \mathbb{K}^*} a \quad = \quad -1_{\mathbb{K}}.$$

Beweise damit den Satz von Wilson: Ist $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Primzahl, so ist p ein Teiler von $1 + (p-1)!$.

Aufgabe 2.3.15. Betrachte die komponentenweise Addition und die komponentenweise Multiplikation auf $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) \ := \ (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \qquad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \ := \ (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ auf diese Weise zwar ein kommutativer Ring mit Einselement ist, aber *kein* Körper.

Aufgabe 2.3.16. Zeige, dass die folgende Abbildung ein bijektiver Körperhomomorphismus ist:

$$\kappa \colon \mathbb{C} \ \to \ \mathbb{C}, \qquad a_1 + a_2 \cdot I \ \mapsto \ a_1 - a_2 \cdot I.$$

Zeige weiter:

(i) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, d.h., von der Form $z = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$, wenn $\kappa(z) = z$ gilt.
(ii) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist die Summe $z + \kappa(z)$ sowie das Produkt $z \cdot \kappa(z)$ reell.

Aufgabe 2.3.17. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gegeben. Zeige, dass es eine komplexe Zahl z gibt mit $a^2 z + bz + c = 0$.

Aufgabe 2.3.18. Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über C_5:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{2}x_1 & + & x_2 & + & \overline{3}x_3 & = & \overline{2}, \\ x_1 & - & \overline{4}x_2 & - & \overline{2}x_3 & = & -\overline{1}, \\ & & -\overline{3}x_2 & + & x_3 & = & \overline{2}. \end{array}$$

3. Vektorräume

3.1. Vektorräume und Untervektorräume.

Definition 3.1.1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit

- einer inneren Verknüpfung (auch *Vektorraumaddition* genannt):
$$\mathrm{add}_V\colon V \times V \;\to\; V, \qquad (v, v') \;\mapsto\; \mathrm{add}_V(v, v') \;=:\; v + v',$$
- einer "äußeren" Verknüpfung (auch *Skalarmultiplikation* genannt):
$$\mathrm{smult}_V\colon \mathbb{K} \times V \;\to\; V, \qquad (a, v) \;\mapsto\; \mathrm{smult}_V(a, v) \;=:\; a\cdot v,$$

sodass folgende Regeln gelten:

(VR1) Die Menge V zusammen mit der Vektorraumaddition "add_V" ist eine abelsche Gruppe, d.h.,
- es gilt stets $u + (v + w) = (u + v) + w$,
- es gibt ein Element $0_V \in V$ mit $0_V + v = v = v + 0_v$ für alle $v \in V$,
- zu jedem $v \in V$ gibt es ein Element $-v \in V$ mit $(-v) + v = 0_V = v + (-v)$.
- für je zwei $u, v \in V$ gilt stets $u + v = v + u$,

(VR2) Die Skalarmultiplikation "smult_V" ist *unitär* und *assoziativ*, d.h., für alle $v \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt
$$1_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; v, \qquad (a'a)\cdot v \;=\; a'\cdot(a\cdot v).$$

(VR3) Die Skalarmultiplikation und die Vektorraumaddition sind distributiv, d.h., für alle $v, v' \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt
$$(a + a')\cdot v \;=\; a\cdot v + a'\cdot v, \qquad a\cdot(v + v') \;=\; a\cdot v + a\cdot v'.$$

Bemerkung 3.1.2. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Die Elemente von $\mathbb{K}$ nennt man bisweilen *Skalare*, und die Elemente von V heißen *Vektoren*.
(ii) Einen Skalar $a \in \mathbb{K}$ multipliziert man immer von links an einen Vektor $v \in V$, d.h., man schreibt stets $a\cdot v$ für $\mathrm{smult}_V(a, v)$.
(iii) Das neutrale Element $0_V \in V$ der Vektorraumaddition nennt man auch den *Nullvektor* in V.

Konstruktion 3.1.3. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Auf dem n-fachen direkten Produkt $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ hat man eine innere und eine äußere Verknüpfung:

- Die *komponentenweise Addition*: Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ gegeben, so setzt man
$$(x_1, \ldots, x_n) \;+\; (y_1, \ldots, y_n) \quad:=\quad (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
- Die *komponentenweise Skalarmultiplikation*: Sind a aus $\mathbb{K}$ und $(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ gegeben, so setzt man
$$a\cdot(x_1, \ldots, x_n) \quad:=\quad (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Satz 3.1.4. *Zusammen mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Skalarmultiplikation ist $\mathbb{K}^n$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beweis. Die Vektorraumaxiome (VR1), (VR2), und (VR3) ergeben sich direkt durch komponentenweises Anwenden der Körperaxiome; der Vollständigkeit halber führen wir dies explizit durch.

Zu (VR1). Wir zeigen zunächst, dass die Verknüpfung "+" auf $\mathbb{K}^n$ assoziativ ist. Es gilt stets

$$\begin{aligned}
(x_1,\ldots,x_n) + ((y_1,\ldots,y_n)+(z_1,\ldots,z_n)) &= (x_1,\ldots,x_n) + (y_1+z_1,\ldots,y_n+z_n)\\
&= (x_1+(y_1+z_1),\ldots,x_n+(y_n+z_n))\\
&= ((x_1+y_1)+z_1,\ldots,(x_n+y_n)+z_n)\\
&= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) + (z_1,\ldots,z_n)\\
&= ((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)) + (z_1,\ldots,z_n).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(0,\ldots,0)\in\mathbb{K}^n$ ein neutrales Element für "+" und $(-x_1,\ldots,-x_n)$ ist das additive Inverse zu $(x_1,\ldots,x_n)$. Zur Kommutativität von "+": Es gilt stets

$$\begin{aligned}
(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\
&= (y_1+x_1,\ldots,y_n+x_n)\\
&= (y_1,\ldots,y_n) + (x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Zu (VR2). Es seien $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ und $a,a'\in\mathbb{K}$ gegeben. Dann erhalten wir für die Skalarmultiplikation mit $1_{\mathbb{K}}$ bzw. $a'a$:

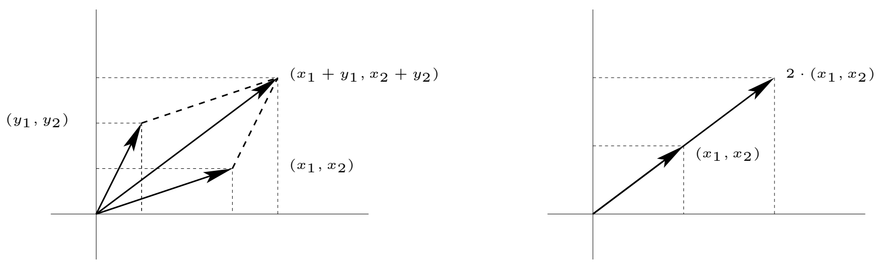
$$\begin{aligned}
(1_{\mathbb{K}})\cdot(x_1,\ldots,x_n) &= (1_{\mathbb{K}}x_1,\ldots,1_{\mathbb{K}}x_n)\\
&= (x_1,\ldots,x_n),\\
(a'a)\cdot(x_1,\ldots,x_n) &= (a'ax_1,\ldots,a'ax_n)\\
&= a'\cdot(ax_1,\ldots,ax_n)\\
&= a'\cdot(a\cdot(x_1,\ldots,x_n)).
\end{aligned}$$

Zu (VR3). Es seien $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ und $a,a'\in\mathbb{K}$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a'+a)\cdot(x_1,\ldots,x_n) &= ((a'+a)x_1,\ldots,(a'+a)x_n)\\
&= (a'x_1+ax_1,\ldots,a'x_n+ax_n)\\
&= (a'x_1,\ldots,a'x_n) + (ax_1,\ldots,ax_n)\\
&= a'\cdot(x_1,\ldots,x_n) + a\cdot(x_1,\ldots,x_n),\\
a\cdot((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)) &= a\cdot(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\
&= (a(x_1+y_1),\ldots,a(x_n+y_n))\\
&= (ax_1+ay_1,\ldots,ax_n+ay_n)\\
&= (ax_1,\ldots,ax_n)+(ay_1,\ldots,ay_n)\\
&= a\cdot(x_1,\ldots,x_n) + a\cdot(y_1,\ldots,y_n).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.1.5. Vektorraumaddition und Skalarmultiplikation in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ lassen sich geometrisch darstellen:



Lemma 3.1.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten folgende Rechenregeln:*

(i) *Für jedes Element $v\in V$ gilt $0_{\mathbb{K}}\cdot v=0_V$.*
(ii) *Für jedes Element $a\in\mathbb{K}$ gilt $a\cdot 0_V=0_V$.*
(iii) *$a\cdot v=0_V$ impliziert $a=0_{\mathbb{K}}$ oder $v=0_V$.*
(iv) *Für jedes Element $v\in V$ gilt $(-1_{\mathbb{K}})\cdot v=-v$.*

Beweis. Zu (i). Unter Verwendung der Distributivität von Vektorraumaddition und Skalarmultiplikation erhalten wir

$$0_{\mathbb{K}}\cdot v + 0_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})\cdot v \;=\; 0_{\mathbb{K}}\cdot v.$$

Addiert man nun das Inverse $-(0_{\mathbb{K}}\cdot v) \in V$ von $0_{\mathbb{K}}\cdot v \in V$ zu dieser Gleichung, so erhält man

$$-(0_{\mathbb{K}}\cdot v) \;+\; (0_{\mathbb{K}}\cdot v + 0_{\mathbb{K}}\cdot v) \;\;=\;\; -(0_{\mathbb{K}}\cdot v) \;+\; 0_{\mathbb{K}}\cdot v.$$

Mit $-(0_{\mathbb{K}}\cdot v) + 0_{\mathbb{K}}\cdot v = 0_V$ und der Assoziativität der Vektorraumaddition ergibt sich daraus

$$0_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; (-(0_{\mathbb{K}}\cdot v) \;+\; 0_{\mathbb{K}}\cdot v) + 0_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; 0_V.$$

Zu (ii). Nach (i) gilt $0_{\mathbb{K}}\cdot 0_V = 0_V$. Damit erhalten wir, unter Verwendung der Assoziativität der Skalarmultiplikation, die gewünschte Gleichung:

$$a\cdot 0_V \;=\; a\cdot(0_{\mathbb{K}}\cdot 0_V) \;=\; (a\cdot 0_{\mathbb{K}})\cdot 0_V \;=\; 0_{\mathbb{K}}\cdot 0_V \;=\; 0_V.$$

Zu (iii). In dem Fall $a = 0_{\mathbb{K}}$ ist Aussage (iii) erfüllt. Also ist noch der Fall $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ zu betrachten. In diesem Fall gibt es ein multiplikatives Inverses $a^{-1} \in \mathbb{K}$. Damit erhalten wir

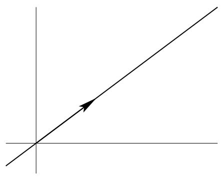
$$v \;=\; 1_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; (a^{-1}a)\cdot v \;=\; a^{-1}\cdot(a\cdot v) \;=\; a^{-1}\cdot 0_V \;=\; 0_V.$$

Zu (iv). Wir prüfen direkt nach, dass $(-1_{\mathbb{K}})\cdot v \in V$ das Inverse zu $v \in V$ ist: Es gilt

$$v + (-1_{\mathbb{K}})\cdot v \;=\; 1_{\mathbb{K}}\cdot v + (-1_{\mathbb{K}})\cdot v \;=\; (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}}))\cdot v \;=\; 0_{\mathbb{K}}\cdot v \;=\; 0_V.$$

□

Beispiel 3.1.7. Es sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Die *(Ursprungs-) Gerade durch* x ist die Menge $\mathbb{R}\cdot x := \{\lambda\cdot x;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.



Für je zwei Vektoren $y = \lambda\cdot x$ und $y' = \lambda'\cdot x$ aus $\mathbb{R}\cdot x$ sowie jedes Element $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$y + y' \;=\; (\lambda + \lambda')\cdot x \in \mathbb{R}\cdot x, \qquad\qquad a\cdot y \;=\; (a\lambda)\cdot x \in \mathbb{R}\cdot x.$$

Definition 3.1.8. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* von V, in Zeichen $U \leq_{\mathbb{K}} V$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- **(UV1)** Es gilt $U \neq \emptyset$.
- **(UV2)** U ist abgeschlossen bezüglich der Vektorraumaddition, d.h., für je zwei $u, u' \in U$ gilt $u + u' \in U$.
- **(UV3)** U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation, d.h., für alle $u \in U$ und alle $a \in \mathbb{K}$ gilt $a\cdot u \in U$.

Beispiel 3.1.9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Die Menge V ist ein Untervektorraum in V.
(ii) Die Menge $\{0_V\}$ ist ein Untervektorraum in V.

Satz 3.1.10. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Vektorraumaddition* add_V *und Skalarmultiplikation* smult_V*. Ist $U \leq_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum, so definieren*

$$\begin{array}{rclcrcl} \operatorname{add}_U : U \times U & \to & U, & \quad & (u, u') & \mapsto & \operatorname{add}_V(u, u') \;=\; u + u', \\ \operatorname{smult}_U : \mathbb{K} \times U & \to & U, & \quad & (a, u) & \mapsto & \operatorname{smult}_V(a, u) \;=\; a \cdot u \end{array}$$

eine innere und eine äußere Verknüpfung auf U. Zusammen mit diesen Verknüpfungen wird U zu einem Vektorraum; der Nullvektor in U ist $0_U = 0_V$.

Beweis. Zunächst beachte man, dass aufgrund der Eigenschaften (UV2) und (UV3) eines Untervektorraumes die beiden Verknüpfungen add_U und smult_U überhaupt wohldefinierte Abbildungen sind. Weiter erben add_U und smult_U die Eigenschaften (VR2) und (VR3) von add_V bzw. smult_V.

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass U zusammen mit der Verknüpfung add_U eine abelsche Gruppe ist. Das Axiom (VR1) für V liefert, dass die Verknüpfung add_U assoziativ und kommutativ ist.

Um zu sehen, dass add_U ein neutrales Element besitzt, genügt es, zu zeigen, dass $0_V \in U$ gilt. Dazu wählen wir ein Element $u \in U$, was wegen (UV1) möglich ist. Mit Lemma 3.1.6 (iv) und den Eigenschaften (UV2) sowie (UV3) folgt dann

$$0_V \;=\; u + (-u) \;=\; u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \;\in\; U.$$

Für die Existenz eines Inversen zu gegebenem $u \in U$, genügt es zu zeigen, dass das Inverse $-u \in V$ bezüglich add_V bereits in U liegt. Das ergibt sich mit Lemma 3.1.6 (iv) und (UV3): Es gilt

$$-u \;=\; (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \;\in\; U.$$

□

Satz 3.1.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und, $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen $U_i \leq_{\mathbb{K}} V$. Dann ist der Durchschnitt über alle U_i wieder ein Untervektorraum in V, d.h., es gilt*

$$\bigcap_{i \in I} U_i \quad \leq_{\mathbb{K}} \quad V.$$

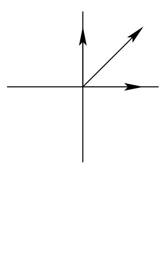
Beweis. Wir müssen nachweisen, dass $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ die Eigenschaften (UV1), (UV2) und (UV3) besitzt.

Zu (UV1): Nach Satz 3.1.10 gilt $0_V \in U_i$ für jedes U_i. Das impliziert $0_V \in U$. Somit ist U nicht leer.

Zu (UV2): Es seien $u, u' \in U$ gegeben. Dann gilt $u, u' \in U_i$ für jedes $i \in I$. Da jedes U_i ein Untervektorraum von V ist, erhalten wir $u + u' \in U_i$ für jedes $i \in I$. Das impliziert $u + u' \in U$.

Zu (UV3): Es seien $u \in U$ und $a \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gilt $u \in U_i$ für jedes $i \in I$. Da jedes U_i ein Untervektorraum von V ist, erhalten wir $a \cdot u \in U_i$ für jedes $i \in I$. Das impliziert $a \cdot u \in U$. □

Bemerkung 3.1.12. Die Vereinigung von Untervektorräumen ist im Allgemeinen kein Untervektorraum:



Für die Vereinigung der Koordinatenachsen $M := \mathbb{K}\cdot(1,0) \cup \mathbb{K}\cdot(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ hat man $(1,0),(0,1) \in M$ aber $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin M$.

Konstruktion 3.1.13. Es seien X eine Menge, $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es sei

$$\mathrm{Abb}(X,V) \quad := \quad \{\varphi;\ \varphi\colon X \to V \text{ ist Abbildung}\}$$

die Menge aller Abbildungen von X nach V. Wir erklären punktweise eine Addition und eine Skalarmultiplikation auf $\mathrm{Abb}(X,V)$ durch

$$\begin{array}{rcllcl} \varphi+\psi\colon X & \to & V, & \qquad x & \mapsto & \varphi(x)+\psi(x), \\ a\cdot\varphi\colon X & \to & V, & \qquad x & \mapsto & a\cdot\varphi(x). \end{array}$$

Satz 3.1.14. *Es seien X eine Menge, $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es sei* $\mathrm{Abb}(X,V)$ *die Menge aller Abbildungen von X nach V. Zusammen mit der punktweisen Addition und der punktweisen Skalarmultiplikation ist* $\mathrm{Abb}(X,V)$ *ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Nullvektor in* $\mathrm{Abb}(X,V)$ *ist die Abbildung $\nu\colon X \to V$, $x \mapsto 0_V$.*

Beweis. Die Vektorraumaxiome lassen sich leicht punktweise auf die Vektorraumaxiome in V zurückführen:
Zu (VR1). Wir weisen zunächst die Assoziativität von "+" nach. Für je drei Abbildungen $\varphi,\psi,\kappa\colon X \to V$ erhält man

$$\begin{array}{rcl} ((\varphi+\psi)+\kappa)(x) & = & (\varphi+\psi)(x))+\kappa(x) \\ & = & (\varphi(x)+\psi(x))+\kappa(x) \\ & = & \varphi(x)+(\psi(x)+\kappa(x)) \\ & = & \varphi(x)+((\psi+\kappa)(x)) \\ & = & (\varphi+(\psi+\kappa))(x). \end{array}$$

Es ist klar, dass die Nullabbildung neutrales Element bezüglich "+" in $\mathrm{Abb}(X,V)$ ist, und dass das Inverse zu $\varphi \in \mathrm{Abb}(X,V)$ durch $(-\varphi)(x) := -(\varphi(x))$ definiert ist.
Zur Kommutativität von "+". Für je zwei Abbildungen $\varphi,\psi\colon X \to V$ gilt

$$\begin{array}{rcl} (\varphi+\psi)(x) & = & \varphi(x)+\psi(x) \\ & = & \psi(x)+\varphi(x) \\ & = & (\psi+\varphi)(x). \end{array}$$

Zu (VR2). Es seien $\varphi \in \mathrm{Abb}(X,\mathbb{K})$ und $a',a \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann erhält man $1_{\mathbb{K}}\cdot\varphi = \varphi$ und $(a'a)\cdot\varphi = a'\cdot(a\cdot\varphi)$ mit

$$\begin{array}{rcl} (1_{\mathbb{K}}\cdot\varphi)(x) & = & 1_{\mathbb{K}}\cdot(\varphi(x)) \\ & = & \varphi(x), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ((a'a)\cdot\varphi)(x) & = & (a'a)\cdot(\varphi(x)) \\ & = & a'\cdot(a\cdot\varphi(x)) \\ & = & a'\cdot((a\cdot\varphi)(x)) \\ & = & (a'\cdot(a\cdot\varphi))(x). \end{array}$$

Zu (VR3). Es seien $\varphi,\psi \in \mathbb{K}^n$ und $a,a' \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann erhalten wir $(a'+a)\cdot\varphi = a'\cdot\varphi + a\cdot\varphi$ bzw. $a\cdot(\varphi+\psi) = a\cdot\varphi + a\cdot\psi$ mit:

$$\begin{array}{rcl} ((a'+a)\cdot\varphi)(x) & = & (a'+a)\cdot(\varphi(x)) \\ & = & a'\cdot\varphi(x)+a\cdot\varphi(x) \\ & = & (a'\cdot\varphi)(x)+(a\cdot\varphi)(x) \\ & = & (a'\cdot\varphi+a\cdot\varphi)(x), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (a\cdot(\varphi+\psi))(x) & = & a\cdot((\varphi+\psi)(x)) \\ & = & a\cdot(\varphi(x)+\psi(x)) \\ & = & a\cdot\varphi(x)+a\cdot\psi(x) \\ & = & (a\cdot\varphi)(x)+(a\cdot\psi)(x) \\ & = & ((a\cdot\varphi)+(a\cdot\psi))(x). \end{array}$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 3.1.

Aufgabe 3.1.15. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es sei ein lineares Gleichungssystem folgender Gestalt über $\mathbb{K}$ gegeben:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}$$

Zeige, dass die Menge der Lösungen dieses Gleichungssystems ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 3.1.16. Es sei $\mathbb{K} := C_2$. Bestimme alle Untervektorräume von $\mathbb{K}^3$.

Aufgabe 3.1.17. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq_{\mathbb{K}} V$ zwei Untervektorräume. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum von V.
(ii) Es gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 3.1.18. Die Elemente $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann man anschaulich durch ihre Graphen

$$\Gamma_f \ = \ \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}\} \ \subseteq \ \mathbb{R}^2$$

darstellen. Veranschauliche damit Addition und Skalarmultiplikation in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Bestimme die Graphen von f, g, $3 \cdot g$ und $f + g$ für

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x^2, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1.$$

Aufgabe 3.1.19. Es sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit den punktweisen Verknüpfungen. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind Untervektorräume:

(i) Die Menge aller geraden Funktionen, d.h., die Menge
$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(-x) = f(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}.$$
(ii) Die Menge aller ungeraden Funktionen, d.h., die Menge
$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(-x) = -f(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}.$$
(iii) Die Menge aller nach oben beschränkten Funktionen, d.h., die Menge
$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) \leq b \text{ für jedes } x \in X\}.$$
(iv) Die Menge aller betragsmäßig beschränkten Funktionen, d.h., die Menge
$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x)| \leq b \text{ für jedes } x \in X\}.$$
(v) Die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(vi) Die Menge aller unstetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.2. **Lineare Hülle und lineare (Un-)abhängigkeit.**

Definition 3.2.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Eine *Linearkombination über* $\mathcal{F}$ ist ein Element der Form

$$\sum_{i\in I} a_i\cdot v_i \;\in\; V, \qquad \text{wobei } a_i \in \mathbb{K},\; a_i \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ für höchstens endlich viele } i \in I.$$

Die *lineare Hülle* (auch das *Erzeugnis*, der *Aufspann*) von $\mathcal{F}$ in V ist die Menge aller Linearkombinationen über $\mathcal{F}$, in Zeichen

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \;:=\; \{v \in V;\; v \text{ ist Linearkombination über } \mathcal{F}\}.$$

Der Vollständigkeit halber definieren wir die lineare Hülle der leeren Familie durch $\mathrm{Lin}(\;) := \{0_V\}$.

Schreibweise 3.2.2. Ist $\mathcal{F}$ eine endliche Familie, d.h., $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$, so schreibt man auch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot v_i$$

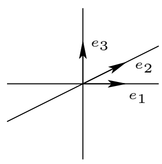
für die Linearkombinationen über $\mathcal{F}$, und weiter schreibt man $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$ für $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$.

Bemerkung 3.2.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $v \in V$ mit $v \neq 0_V$. Dann ist $\mathrm{Lin}(v)$ die durch v aufgespannte *(Ursprungs-)Gerade*:

$$\mathrm{Lin}(v) \;=\; \{a\cdot v;\; a \in \mathbb{K}\} \;=\; \mathbb{K}\cdot v.$$

Beispielsweise erhält man in $\mathbb{R}^3$ für die Vektoren $e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$ und $e_3 := (0,0,1)$ die Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}(e_1) &= \{(x_1,0,0);\; x_1 \in \mathbb{R}\},\\ \mathrm{Lin}(e_2) &= \{(0,x_2,0);\; x_2 \in \mathbb{R}\},\\ \mathrm{Lin}(e_3) &= \{(0,0,x_3);\; x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$



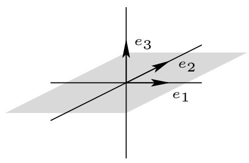
Allgemeiner liefert $\mathrm{Lin}(x)$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq (0,0,0)$ den vertrauten Begriff der (Ursprungs-)Geraden durch x.

Bemerkung 3.2.4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $u, v \in V$ mit $u \neq 0_V$ und $v \notin \mathbb{K}u$. Dann ist $\mathrm{Lin}(u,v)$ die von u und v erzeugte *(Ursprungs-)Ebene*:

$$\mathrm{Lin}(u,v) \;=\; \{a\cdot u + b\cdot v;\; a, b \in \mathbb{K}\}$$

Beispielsweise erhält man für die beiden Vektoren $e_1 := (1,0,0)$ und $e_2 := (0,1,0)$ in $\mathbb{R}^3$ die x_1, x_2-Ebene:

$$\mathrm{Lin}(e_1, e_2) \;=\; \{x_1\cdot e_1 + x_2\cdot e_2;\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \;=\; \{(x_1, x_2, 0);\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$



Allgemeiner liefert $\mathrm{Lin}(x,y)$ für zwei nicht kollineare Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ den vertrauten Begriff der von x und y aufgespannten Ebene.

Satz 3.2.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Dann ist $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ ein Untervektorraum von V, und es gilt $v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ für jedes $i \in I$.*

Beweis. Für die leere Familie haben wir definitionsgemäß $\mathrm{Lin}(\ ) = \{0_V\}$, und es nichts weiter zu zeigen.

Für eine nichtleere Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ zeigen wir zunächst, dass stets $v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ gilt. Das ergibt sich sofort aus

$$v_i \;=\; \sum_{j \in I} \delta_{ij} \cdot v_j \;\in\; \mathrm{Lin}(\mathcal{F}), \qquad \text{wobei } \delta_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & i = j, \\ 0_{\mathbb{K}} & i \neq j. \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ ein Untervektorraum von V ist. Wegen $v_i \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ für jedes $i \in I$ ist $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ nicht leer, d.h., (UV1) ist erfüllt.

Zu (UV2). Es seien zwei Linearkombinationen $\sum a_i \cdot v_i$ und $\sum b_i \cdot v_i$ über $\mathcal{F}$ gegeben. Dann gibt es höchstens endlich viele $i \in I$ mit $a_i \neq 0$ oder $b_i \neq 0$. Folglich gibt es auch nur endlich viele $i \in I$ mit $a_i + b_i \neq 0$, und wir erhalten

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \cdot v_i \right) \;=\; \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \cdot v_i \;\in\; \mathrm{Lin}(\mathcal{F}).$$

Zu (UV3). Es seien eine Linearkombinationen $\sum a_i v_i$ über $\mathcal{F}$ und ein $a \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gibt es höchstens endlich viele $i \in I$ mit $aa_i \neq 0$ und wir erhalten

$$a \cdot \left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i \right) \;=\; \left(\sum_{i \in I} (aa_i) \cdot v_i \right) \;\in\; \mathrm{Lin}(\mathcal{F}).$$

$\square$

Satz 3.2.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V und $M := \{v_i;\ i \in I\} \subseteq V$. Dann gilt*

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \;=\; \bigcap_{M \subseteq U \leq_{\mathbb{K}} V} U.$$

Beweis. Für den Fall der leeren Familie $\mathcal{F} = (\ )$ ist nichts zu zeigen. Betrachten wir also eine nichtleere Familie $\mathcal{F}$.

Zur Inklusion "$\subseteq$". Es sei $v = \sum a_i \cdot v_i$ eine Linearkombination über $\mathcal{F}$. Wir müssen zeigen, dass v in jedem Untervektorraum $U \leq_{\mathbb{K}} V$ mit $M \subseteq U$ liegt. Für ein solches U gilt $v_i \in U$ für jedes $i \in I$. Mit (UV3) erhalten wir $a_i \cdot v_i \in U$ für jedes $i \in I$ und jedes $a_i \in \mathbb{K}$. Wiederholtes Anwenden von (UV2) liefert $v = \sum a_i \cdot v_i \in U$.

Zur Inklusion "$\supseteq$". Nach Satz 3.2.5 ist $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ ein Untervektorraum von V mit $M \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$. Damit ergibt sich

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \;\supseteq\; \bigcap_{M \subseteq U \leq_{\mathbb{K}} V} U.$$

$\square$

Folgerung 3.2.7. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum. Ist $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V mit $v_i \in U$ für jedes $i \in I$, so gilt* $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \subseteq U$.

Folgerung 3.2.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V. Dann ist* $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ *der kleinste Untervektorraum von V, der jedes v_i, $i \in I$, enthält.*

Definition 3.2.9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ in V heißt *linear abhängig*, falls man den Nullvektor 0_V als nichttriviale Linearkombination über $\mathcal{F}$ gewinnt, d.h., falls man 0_V schreiben kann als

$$0_V \;=\; \sum_{i\in I} a_i\cdot v_i, \qquad \text{wobei } a_i \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ für mindestens ein } i \in I.$$

Beispiel 3.2.10. In jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Familie (0_V) linear abhängig, denn es gilt $1_{\mathbb{K}}\cdot 0_V = 0_V$.

Beispiel 3.2.11. Die Familie $\big((1,0),(0,1),(1,1)\big)$ in $\mathbb{R}^2$ ist linear abhängig, denn man hat

$$(0,0) \;=\; 1\cdot(1,0) \;+\; 1\cdot(0,1) \;+\; (-1)\cdot(1,1)$$

Satz 3.2.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1,\dots,v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Familie $(v_1,\dots,v_n)$ ist linear abhängig.*
(ii) *Es gibt ein $1 \le i \le n$ mit $v_i \in \operatorname{Lin}(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$.*

Beweis. Zu "(i)$\Rightarrow$(ii)". Da die Familie $\mathcal{F}$ linear abhängig ist, gibt es eine Darstellung des Nullvektors

$$0_V \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j\cdot v_j,$$

wobei $a_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ für ein i gilt. Addiert man $-(a_i\cdot v_i)$ zu dieser Gleichung und multipliziert anschließend mit $(-a_i)^{-1}$, so ergibt sich

$$v_i \;=\; \sum_{j\neq i}(-a_i^{-1}a_j)\cdot v_j \;\in\; \operatorname{Lin}(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n).$$

Zu "(ii)$\Rightarrow$(i)". Es sei $1 \le i \le n$ mit $v_i \in \operatorname{Lin}(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$ gegeben. Dann hat man eine Darstellung

$$v_i \;=\; \sum_{j\neq i} a_j\cdot v_j.$$

Setzt man $a_i := -1_{\mathbb{K}}$, und addiert $a_i\cdot v_i$ zu dieser Gleichung so erhält man den Nullvektor als nichttriviale Linearkombination über $\mathcal{F}$:

$$0_V \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j\cdot v_j.$$

□

Definition 3.2.13. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ in V heißt *linear unabhängig*, falls sie nicht linear abhängig ist.

Bemerkung 3.2.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_1,\dots,v_n)$ in V ist genau dann linear unabhängig, wenn für jede Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot v_i$ über $\mathcal{F}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot v_i \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \ldots = a_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Beispiel 3.2.15. Die Familie $((1,0),(0,1))$ in $\mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig, denn wir haben

$$\begin{aligned} a_1\cdot(1,0) \;+\; a_2\cdot(0,1) \;=\; (0,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad (a_1,a_2) \;=\; (0,0) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

Satz 3.2.16. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.*
(ii) *Für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt $v_i \notin \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$.*

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.2.12; wir haben lediglich die dort formulierten Aussagen (i) und (ii) negiert. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 3.2.

Aufgabe 3.2.17. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) U ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.
(ii) Es gilt $U = \{x \in \mathbb{R}^3;\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, wobei $a_i \neq 0$ für mindestens ein i gilt.

Aufgabe 3.2.18. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und untersuche darin die beiden folgenden Familien auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & := & \big((-5,2,-1),\ (3,4,-1),\ (2,-2,1)\big), \\ \mathcal{F}' & := & \big((-2,-4,3),\ (0,1,-2),\ (-4,2,-1)\big). \end{array}$$

Aufgabe 3.2.19. Betrachte den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ und untersuche darin die beiden folgenden Familien auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & := & \big((1,I),\ (-I,1)\big), \\ \mathcal{F}' & := & \big((1+2I,3I),\ (1+I,5)\big). \end{array}$$

Aufgabe 3.2.20. Prüfe ob $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{F}')$ bzw. $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}') \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ für die beiden folgenden Familien in $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & := & \big((-1,3,2),\ (2,0,1),\ (1,2,3)\big), \\ \mathcal{F}' & := & \big((-2,-1,2),\ (1,1,-2),\ (-1,1,-2)\big). \end{array}$$

Aufgabe 3.2.21. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $V \neq \{0_V\}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $u, v \in V$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Familie (u, v) ist linear abhängig.
(ii) Die Vektoren u, v liegen auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden.

Aufgabe 3.2.22. Bestimme den Durchschnitt der beiden Untervektorräume $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ und $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}')$ in $\mathbb{R}^3$ für

$$\mathcal{F} := \big((1,0,2),\ (-2,3,1)\big), \qquad \mathcal{F}' := \big((2,1,2),\ (-3,2,1)\big).$$

Aufgabe 3.2.23. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter seien $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V und $J \subseteq I$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige: Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, so ist auch $(v_j)_{j\in J}$ linear unabhängig.

3.3. **Basen und Koordinaten.**

Definition 3.3.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ in V heißt *Erzeugendensystem* für V, falls $V = \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ gilt, d.h., falls jedes Element aus V eine Linearkombination über $\mathcal{F}$ ist.

Beispiel 3.3.2. Die *Standardeinheitsvektoren* in dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind definiert als

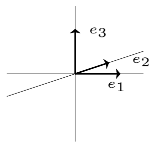
$$e_1 := (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}), \quad e_2 := (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}), \ \ldots, \quad e_n := (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}).$$

Die Familie $(e_1, \ldots, e_n)$ der Standardeinheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathbb{K}^n$, denn für jeden Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n.$$

Definition 3.3.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Basis* für V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem für V.

Beispiel 3.3.4. Die Familie $(e_1, \ldots, e_n)$ der Standardeinheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$ ist eine Basis des $\mathbb{K}^n$; man nennt sie die *Standardbasis* des $\mathbb{K}^n$.



Nach 3.3.2 ist $(e_1, \ldots, e_n)$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{K}^n$. Die lineare Unabhängigkeit erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_n \cdot e_n \ = \ (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \quad &\Longrightarrow \quad (a_1, \ldots, a_n) \ = \ (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &\Longrightarrow \quad a_1 = \ldots = a_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.5. Es seien $u := (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}})$ und $v := (1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$. Dann ist $\mathcal{B} = (u, v)$ eine Basis für $\mathbb{K}^2$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{K}^2$ ist, müssen wir jedes Element $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$ als Linearkombination über $\mathcal{B}$ schreiben:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Lösbarkeit des folgenden linearen Gleichungssystems in den Variablen x_1, x_2 über $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= \quad b_1, \\ x_2 \quad &= \quad b_2. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $x_2 := b_2$ und $x_1 := b_1 - b_2$ dieses Gleichungsystem lösen, d.h., wir erhalten $(b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$ als Linearkombination über $\mathcal{B}$.

Um die lineare Unabhängigkeit der Familie $\mathcal{B}$ nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass aus

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}$$

bereits $x_1 = x_2 = 0_{\mathbb{K}}$ folgt. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= \quad 0_{\mathbb{K}}, \\ x_2 \quad &= \quad 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

nur $x_1 = x_2 = 0_{\mathbb{K}}$ als Lösung besitzt. Das ist im vorliegenden Fall jedoch unmittelbar einsichtig.

Satz 3.3.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V. Dann besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$v = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n \quad \text{mit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}. \tag{3.3.6.1}$$

Beweis. Da $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem für V ist, besitzt jedes $v \in V$ eine Darstellung (3.3.6.1).

Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien zwei Darstellungen $v = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$ und $v = y_1 \cdot v_1 + \ldots + y_n \cdot v_n$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0_V &= v - v \\ &= (x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n) - (y_1 \cdot v_1 + \ldots + y_n \cdot v_n) \\ &= (x_1 - y_1) \cdot v_1 + \ldots + (x_n - y_n) \cdot v_n. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, muss $x_i = y_i$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ gelten. Folglich stimmen die Darstellungen von v überein. □

Definition 3.3.7. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V. Für jedes $v \in V$ nennt man die Darstellung

$$v = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n \text{ mit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$$

die *Entwicklung* von v nach der Basis $\mathcal{B}$, und man nennt $x_{\mathcal{B}}(v) := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ den *Koordinatenvektor* von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Beispiel 3.3.8. Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ von $\mathbb{R}^2$, wobei $v_1 := (1, 0)$ und $v_2 := (1, 1)$. Der Koordinatenvektor von $v = (2, 2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist $x_{\mathcal{B}}(v) = (0, 2)$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.3.9. Der Koordinatenvektor eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$ ist gegeben durch $x_{\mathcal{E}}(x) = x$.

Bemerkung 3.3.10. Es seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und $w \in \mathbb{K}^n$. Den Koordinatenvektor $x_{\mathcal{B}}(w)$ erhält man durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} v_{11} x_1 + \ldots + v_{n1} x_n &= w_1, \\ &\vdots \\ v_{1n} x_1 + \ldots + v_{nn} x_n &= w_n, \end{aligned}$$

wobei wir $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$ schreiben. Man beachte, dass dieses System nach Satz 3.3.6 eindeutig lösbar ist.

Satz 3.3.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V. Dann gilt für alle $v, v' \in V$ und alle $a \in \mathbb{K}$:*

$$x_{\mathcal{B}}(v + v') = x_{\mathcal{B}}(v) + x_{\mathcal{B}}(v'), \qquad x_{\mathcal{B}}(a \cdot v) = a \cdot x_{\mathcal{B}}(v).$$

Beweis. Es seien $x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x_{\mathcal{B}}(v') = (x_1', \ldots, x_n')$ die Koordinatenvektoren von v bzw. v'. Dann gilt

$$\begin{aligned} v + v' &= x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n + x_1' \cdot v_1 + \ldots + x_n' \cdot v_n \\ &= (x_1 + x_1') \cdot v_1 + \ldots + (x_n + x_n') \cdot v_n. \end{aligned}$$

Nach Definition des Koordinatenvektors erhalten wir also

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}}(v + v') &= (x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n') \\ &= x_{\mathcal{B}}(v) + x_{\mathcal{B}}(v'). \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} a\cdot v &= a\cdot(x_1\cdot v_1 + \ldots + x_n\cdot v_n) \\ &= (ax_1)\cdot v_1 + \ldots + (ax_n)\cdot v_n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}}(a\cdot v) &= (ax_1, \ldots, ax_n) \\ &= a\cdot x_{\mathcal{B}}(v). \end{aligned}$$

□

Konstruktion 3.3.12. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *Polynom* über $\mathbb{K}$ in der Variablen T ist ein formaler Ausdruck

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu, \qquad \text{wobei } a_\nu \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ für nur endlich viele } \nu\in\mathbb{N}.$$

Dabei nennt man die a_ν die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome $\sum a_\nu T^\nu$ und $\sum b_\nu T^\nu$ nennt man *gleich*, falls $a_\nu = b_\nu$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Menge aller Polynome über $\mathbb{K}$ in der Variablen T bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[T]$. Auf $\mathbb{K}[T]$ definieren wir eine Addition und eine Skalarmultiplikaiton durch

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) &:= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu, \\ a\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right) &:= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu) T^\nu. \end{aligned}$$

Satz 3.3.13. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zusammen mit den Verknüpfungen "+" und "·" ist $\mathbb{K}[T]$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum; der Nullvektor in $\mathbb{K}[T]$ ist das Nullpolynom $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} 0_{\mathbb{K}} T^\nu$.*

Beweis. Die Vektorraumaxiome für $\mathbb{K}[T]$ lassen sich unmittelbar aus den Körperaxiomen für $\mathbb{K}$ herleiten.

Zu (V1). Wir zeigen zunächst, dass "+" eine assoziative Verknüpfung ist. Dies ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} ((a_\nu + b_\nu) + c_\nu) T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu + (b_\nu + c_\nu)) T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (b_\nu + c_\nu) T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass das Nullpolynom $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} 0_{\mathbb{K}} T^\nu$ neutrales Element für die Addition ist, und dass das Inverse zu $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu$ durch $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} -a_\nu T^\nu$ gegeben ist. Die Kommutativität von "+" erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (b_\nu + a_\nu) T^\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu. \end{aligned}$$

Zu (V2). Es seien $a, a' \in \mathbb{K}$ und ein Polynom $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \in \mathbb{K}[T]$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
1_{\mathbb{K}} \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (1_{\mathbb{K}} \cdot a_\nu) T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \\
(a'a) \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a'aa_\nu) T^\nu \\
&= a' \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu) T^\nu \\
&= a' \cdot \left(a \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \right).
\end{aligned}$$

Zu (V3). Es seien $a, a' \in \mathbb{K}$ und Polynome $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \in \mathbb{K}[T]$ sowie $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu \in \mathbb{K}[T]$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a' + a) \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} ((a' + a)a_\nu) T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a'a_\nu + aa_\nu) T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a'a_\nu) T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu) T^\nu \\
&= a' \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + a \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \\
a \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu \right) &= a \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu + b_\nu) T^\nu \right) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a(a_\nu + b_\nu) T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu + ab_\nu) T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (aa_\nu) T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (ab_\nu) T^\nu \\
&= a \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu + a \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3.14. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die *Monome* in $\mathbb{K}[T]$ sind die Polynome der Gestalt

$$T^\mu := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_{\mu\nu} T^\nu, \qquad \text{wobei } \delta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & \mu = \nu, \\ 0_{\mathbb{K}}, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Jedes Polynom $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu$ ist eine Linearkombination von Monomen: Wegen $a_\nu \neq 0_{\mathbb{K}}$ für höchstens endlich viele $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es ein k mit $a_\nu = 0_{\mathbb{K}}$ für alle $\nu > k$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu &= a_0 \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \delta_{0\nu} T^\nu + \ldots + a_k \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{k\nu} T^\nu \\
&= a_0 \cdot T^0 + a_1 \cdot T^1 + \ldots + a_k \cdot T^k.
\end{aligned}$$

Satz 3.3.15. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Familie $(T^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ der Monome ist eine Basis für den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}[T]$.*

Beweis. In Bemerkung 3.3.14 haben wir bereits gesehen, dass $(T^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{K}[T]$ ist.

Wir kommen zur linearen Unabhängigkeit. Jede Linearkombination über $(T^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ ist von der Form $a_0 \cdot T^0 + a_1 \cdot T^1 + \ldots + a_k \cdot T^k$ mit einem $k \geq 0$, und es gilt

$$a_0 \cdot T^0 + a_1 \cdot T^1 + \ldots + a_k \cdot T^k \quad = \quad \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu,$$

wobei man die rechte Seite als Polynom ansieht und $a_\nu := 0_{\mathbb{K}}$ für $n > k$ definiert. Damit erhalten wir die lineare Unabhängigkeit: Es gilt

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu \; = \; \sum_{\nu\in\mathbb{N}} 0_{\mathbb{K}} T^\nu \quad \Longrightarrow \quad a_\nu = 0_{\mathbb{K}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Aufgaben zu Abschnitt 3.3.

Aufgabe 3.3.16. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem für V. Zeige: Ist $\mathcal{G} = (w_j)_{j \in J}$ eine Familie in V mit $v_i \in \operatorname{Lin}(\mathcal{G})$ für jedes $i \in I$, so ist $\mathcal{G}$ ein Erzeugendensystem für V.

Aufgabe 3.3.17. Es sei $\mathcal{B} = ((1,2,1), (-1,1,3), (1,0,1))$. Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimme den Koordinatenvektor $x_{\mathcal{B}}(v)$ von $v = (2,3,4)$.

Aufgabe 3.3.18. Bestimme eine Basis des Lösungsraumes für das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und X eine endliche Menge. Dann ist die Menge $\operatorname{Abb}(X, \mathbb{K})$ zusammen mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x), \qquad (a \cdot \varphi)(x) := a \cdot \varphi(x)$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, siehe Satz 3.1.14. Für jeden Punkt $x \in X$ definieren wir eine Abbildung $\delta_x \in \operatorname{Abb}(X, \mathbb{K})$ durch

$$\delta_x \colon X \to \mathbb{K}, \qquad y \mapsto \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & y = x, \\ 0_{\mathbb{K}} & y \neq x. \end{cases}$$

Zeige, dass die Familie $(\delta_x)_{x \in X}$ eine Basis für $\operatorname{Abb}(X, \mathbb{K})$ ist. Wozu wird die Endlichkeit von X dabei gebraucht?

Aufgabe 3.3.20. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die Familie $(T^0 + T^1 + \ldots + T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ der Polynome über $\mathbb{K}$ in der Variablen T ist.

Aufgabe 3.3.21. Bestimme eine Basis für den folgenden Untervektorraum von $\mathbb{Q}[T]$:

$$\operatorname{Lin}(T^2,\ T^2 + T,\ T^2 + 1,\ T^2 + T + 1,\ T^7 + T^5).$$

3.4. **Existenz von Basen und Dimension.**

Satz 3.4.1. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Familie in* V*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{F}$ *ist eine Basis für* V*.*
(ii) $\mathcal{F}$ *ist ein Erzeugendensystem für* V *und lässt sich als solches nicht (echt) verkürzen.*
(iii) $\mathcal{F}$ *ist eine linear unabhängige Familie und lässt sich als solche nicht (echt) verlängern.*

Lemma 3.4.2. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $v_1, \ldots, v_r \in V$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{F} := (v_1, \ldots, v_r)$ *ist linear unabhängig.*
(ii) $\mathcal{F}' := (v_1, \ldots, v_{r-1})$ *ist linear unabhängig und es gilt* $v_r \notin \mathrm{Lin}(\mathcal{F}')$*.*

Beweis. Zur Implikation "(i)⇒(ii)". Nach Satz 3.2.16 gilt $v_r \notin \mathrm{Lin}(\mathcal{F}')$. Als Teilfamilie der linear unabhängigen Familie $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}'$ linear unabhängig: Es gilt

$$\sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_r \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Wir betrachten eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination über $\mathcal{F}$:

$$0_V \;=\; a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_{r-1} \cdot v_{r-1} + a_r \cdot v_r. \tag{3.4.2.1}$$

Nach Bemerkung 3.2.14 müssen wir zeigen, dass $a_1 = \ldots = a_r = 0$ gilt. Das geschieht in zwei Schritten.

Schritt 1: Wir zeigen, dass $a_r = 0$ gilt. Andernfalls hätte man $a_r \neq 0$. Addiert man $-(a_r \cdot v_r)$ zu (3.4.2.1) und multipliziert dann mit $(-a_r)^{-1}$, so stößt man auf einen Widerspruch zu (ii), nämlich

$$v_r \;=\; -a_r^{-1} a_1 \cdot v_1 - \ldots - a_r^{-1} a_{r-1} \cdot v_{r-1} \;\in\; \mathrm{Lin}(\mathcal{F}').$$

Schritt 2: Wir zeigen, dass $a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0$ gilt. Wegen $a_r = 0$ ist (3.4.2.1) eine Linearkombination über der Familie $\mathcal{F}'$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{F}'$ gilt $a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0$. □

Beweis von Satz 3.4.1. Zu "(i)⇒(ii)". Als Basis ist die Familie $\mathcal{F}$ erzeugend. Nehmen wir an, $\mathcal{F}$ ließe sich zu einer erzeugenden Familie verkürzen, etwa zu

$$\mathcal{F}' \;:=\; (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Dann erhielte man insbesondere den Vektor v_i als Linearkombination über $\mathcal{F}'$. Nach Satz 3.2.12 müsste $\mathcal{F}$ dann linear abhängig sein. Widerspruch zu (i).

Zu "(ii)⇒(iii)". Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}$ linear unabhängig ist. Andernfalls würde Satz 3.2.12 ein i liefern mit

$$v_i \;\in\; \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Wendet man jetzt Folgerung 3.2.7 an, so kommt man zu einen Widerspuch zu Aussage (ii), nämlich

$$V \;=\; \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n) \;\subseteq\; \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}$ als linear unabhängige Familie unverlängerbar ist. Andernfalls hätte man ein $v \in V$, sodass $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear unabhängig ist. Mit Satz 3.2.12 ergibt sich, dass $v \notin \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ gilt. Widerspruch zu (ii).

Zu "(iii)$\Rightarrow$(i)". Es ist nur zeigen, dass $\mathcal{F}$ erzeugend ist. Nehmen wir an, $\mathcal{F}$ wäre nicht erzeugend. Dann hätte man ein $v \in V$ mit $v \notin \mathrm{Lin}(V)$. Nach Lemma 3.4.2 ist $(v_1, \ldots, v_n, v)$ dann eine linear unabhängige Familie. Widerspruch zu (iii). $\square$

Satz 3.4.3 (Basisergänzungssatz)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_r)$ ein Erzeugendensystem für V, sodass $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig ist, wobei $1 \leq k \leq r$. Dann gibt es Indizes $k+1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq r$, sodass $(v_1, \ldots, v_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$ eine Basis für V ist.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über $m := r - k$. Der Fall $m = 0$ ist einfach; hier gilt $r = k$ und somit ist $(v_1, \ldots, v_r)$ die gesuchte Basis für V.

Wir kommen zum Induktionsschritt, d.h., wir nehmen wir an, dass die Aussage für $m-1$ gilt und folgern daraus, dass sie dann auch für m gilt. Dazu betrachten den Untervektorraum

$$U \ := \ \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{r-1}) \ \leq_{\mathbb{K}} \ V.$$

Wegen $(r-1) - k = m - 1$ dürfen wir die Induktionsannahme auf U anwenden. Das liefert Indizes $k+1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq r-1$, sodass $(v_1, \ldots, v_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$ eine Basis für U ist.

Diese Basis für U müssen wir nun zu einer Basis von V verlängern. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gilt $v_r \in U$. Dann gilt $v_1, \ldots, v_r \in U$. Mit Folgerung 3.2.7 erhalten wir deshalb

$$V \ = \ \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_r) \ \subseteq \ U.$$

Also muss $V = U$ gelten. Das bedeutet, dass $(v_1, \ldots, v_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$ bereits eine Basis für V ist.

Fall 2: Es gilt $v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$. Mit $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}, v_r)$ gilt

$$v_1, \ldots, v_{r-1} \ \in \ U \ \subseteq \ \mathrm{Lin}(\mathcal{B}), \qquad v_r \ \in \ \mathrm{Lin}(\mathcal{B}).$$

Es folgt

$$V \ = \ \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_r) \ \subseteq \ \mathrm{Lin}(\mathcal{B}).$$

Also ist die Familie $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem für V. Nach Lemma 3.4.2 ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. $\square$

Folgerung 3.4.4. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist V endlich erzeugt, d.h., besitzt V ein endliches Erzeugendensystem, so besitzt V eine Basis.*

Beweis. Im Falle $V = \{0_V\}$ ist die leere Familie eine Basis für V. Ansonsten besitzt V ein Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$, mit $v_1 \neq 0_V$. Nach Satz 3.4.3 besitzt V dann eine Basis der Form $(v_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$. $\square$

Satz 3.4.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann besitzen je zwei Basen von V dieselbe Länge.*

Beweis. Ist jede Basis in V von unendlicher Länge, so ist nichts zu zeigen. Wir müssen also nur etwas zeigen, falls es endliche Basen gibt. In diesem Fall wählen wir eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ minimaler Länge.

Wir zeigen zunächst, dass jede weitere Basis $\mathcal{C} = (u_i)_{i \in I}$ von V ebenfalls von endlicher Länge ist. Jedes v_j ist von der Gestalt

$$v_j \ = \ \sum_{i \in I} a_i \cdot u_i, \qquad \text{wobei } a_i \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ für höchstens endlich viele } i \in I.$$

Folglich gibt es eine endliche Teilfamilie $\mathcal{C}' = (u_i)_{i \in I'}$, wobei $I' \subseteq I$, von $\mathcal{C}$, sodass $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Lin}(\mathcal{C}')$ und somit $V = \mathrm{Lin}(\mathcal{C}')$ gilt.

Wir zeigen, dass $I' = I$ gilt. Andernfalls gäbe es ein $j \in I \setminus I'$. Wegen $V = \mathrm{Lin}(\mathcal{C}')$ erhalten wir $u_j \in \mathrm{Lin}(\mathcal{C}')$. Das impliziert lineare Abhängigkeit von $(u_i)_{i \in I' \cup \{j\}}$ und somit von $\mathcal{C}$. Widerspruch.

Es ist noch zu zeigen, dass jede endliche Basis die Länge n besitzt. Es sei also $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis für V. Nach Wahl von n gilt dabei mit $m \geq n$.

Wir betrachten die Familie $(u_1, v_1, \ldots, v_n)$ Nach Satz 3.4.3 gibt es Indizes und $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n$, sodass

$$\mathcal{C}_1 \quad := \quad (u_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_l})$$

eine Basis für V ist. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ als linear unabhängige Familie unverlängerbar ist, gilt $l < n$ und somit hat $\mathcal{C}_1$ die Länge höchstens n.

Diesen Schritt wiederholen wir sinngemäß mit der Familie $(u_1, u_2, v_{i_1}, \ldots, v_{i_l})$ und erhalten eine weitere Basis der Länge höchstens n:

$$\mathcal{C}_2 \quad := \quad (u_1, u_2, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}).$$

Nach spätestens n Wiederholungen ist keines der v_i mehr übrig, und man erhält eine Basis $(u_1, \ldots, u_r)$ mit $r \leq n$. Nach Wahl von n gilt $r = n$. Da $(u_1, \ldots, u_m)$ nach Satz 3.4.1 als Erzeugendensystem unverkürzbar ist, folgt $n = m$. $\square$

Definition 3.4.6. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann definiert man die *Dimension* von V durch

$$\dim(V) \quad := \quad \begin{cases} \infty & \text{falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt,} \\ n & \text{falls } V \text{ eine Basis } (v_1, \ldots, v_n) \text{ besitzt.} \end{cases}$$

Beispiel 3.4.7. Es gilt $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Satz 3.4.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Dann ist n das Maximum über alle Längen linear unabhängiger Familien in V.*

Beweis. Da V eine Basis $\mathcal{B}$ besitzt, und diese von der Länge n ist, gibt es linear unabhängige Familien der Länge n in V.

Nehmen wir nun an, es existiere eine linear unabhängige Familie der Länge größer n. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfamilie gewinnt man daraus eine linear unabhängige Familie $\mathcal{F}$ der Länge $n + 1$.

Nach Satz 3.4.3 kann man $\mathcal{F}$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V ergänzen. Nach Konstruktion besitzt $\mathcal{C}$ mindestens $n + 1$ Elemente. Widerspruch zu $\dim(V) = n$. $\square$

Satz 3.4.9. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ bereits eine Basis für V.*

Beweis. Nach Satz 3.4.8 ist $(v_1, \ldots, v_n)$ als linear unabhängige Familie nicht verlängerbar. Nach Satz 3.4.1 ist $(v_1, \ldots, v_n)$ dann eine Basis für V. $\square$

Folgerung 3.4.10. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in $\mathbb{K}^n$, so ist $(v_1, \ldots, v_n)$ bereits eine Basis für $\mathbb{K}^n$.*

Satz 3.4.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$.*

Beweis. Nur für $\dim(V) = n < \infty$ ist etwas zeigen. Wir betrachten dazu linear unabhängige Familien in U. Diese sind ebenso linear unabhängig in V und besitzen daher nach Satz 3.4.8 die Länge höchstens $n = \dim(V)$. Also gibt es eine linear unabhängige Familie $(u_1, \ldots, u_r)$ maximaler Länge $r \leq n$ in U. Nach Satz 3.4.1 ist diese eine Basis für U. Es folgt $\dim(U) = r \leq n$. $\square$

Satz 3.4.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq_{\mathbb{K}} V$. Dann gilt*

$$\dim(U) \ = \ \dim(V) \quad \Longrightarrow \quad U \ = \ V.$$

Beweis. Es sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis für U. Dann ist $(u_1, \ldots, u_n)$ nach Satz 3.4.9 auch eine Basis für V, und es folgt

$$U \ = \ \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n) \ = \ V.$$

$\square$

Aufgaben zu Abschnitt 3.4.

Aufgabe 3.4.13. Bestimme die Dimension des Untervektorraumes $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Lin}(\mathcal{F}')$ von $\mathbb{R}^3$ für die beiden folgenden Familien:

$$\mathcal{F} := ((1,0,-2),\ (1,1,1),\ (0,2,6)), \qquad \mathcal{F}' := ((-1,-2,1),\ (0,-1,1),\ (5,3,2)).$$

Aufgabe 3.4.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_k)$ eine Familie in V. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig.
(ii) Es gilt $\dim(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})) = k$.

Aufgabe 3.4.15. Zeige: Jeder zweielementige Vektorraum ist eindimensional.

Aufgabe 3.4.16. Bestimme alle Basen (v_1, v_2, v_3) des C_3-Vektorraumes C_3^3.

Aufgabe 3.4.17. Es seien p eine Primzahl, $\mathbb{K} = C_p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wieviele Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ besitzt $\mathbb{K}^n$?

Aufgabe 3.4.18. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:

$$\dim(V) \quad = \quad \sup(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0};\ \text{es gibt eine Kette } V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_m \text{ mit } V_i \leq_{\mathbb{K}} V).$$

Aufgabe 3.4.19. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimme die Dimension des folgenden Untervektorraumes:

$$\mathrm{Lin}(e_i - e_j;\ 1 \leq i \leq j \leq n) \quad \leq_{\mathbb{K}} \quad \mathbb{K}^n.$$

Aufgabe 3.4.20. Zeige anhand eines konkreten Beispiels, dass Satz 3.4.12 für einen unendlichdimensionalen Vektorraum V keine Gültigkeit mehr hat.

4. Lineare Abbildungen

4.1. **Lineare Abbildungen.**

Definition 4.1.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V sowie W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt *linear*, falls für alle $v, v' \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(v + v') \;=\; \varphi(v) + \varphi(v'), \qquad \varphi(a \cdot v) \;=\; a \cdot \varphi(v).$$

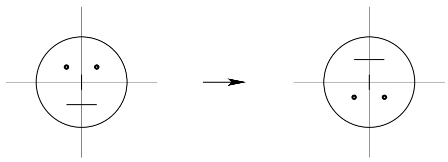
Eine lineare Abbildung nennt man auch einen *Vektorraumhomomorphismus*. Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W bezeichnet man mit $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Beispiel 4.1.2. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

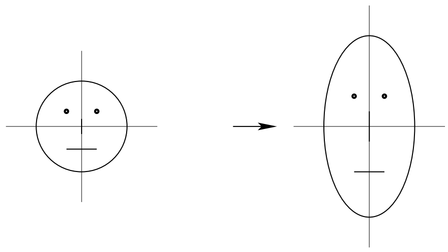
(i) Die *Nullabbildung* $V \to W$, $v \mapsto 0_W$ ist linear.
(ii) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto v$ ist linear.

Beispiel 4.1.3. Die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear:

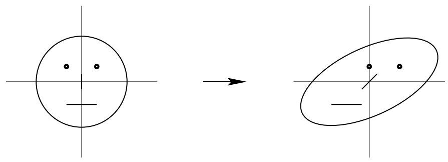
(i) Die Spiegelung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ an der x_1-Achse.



(ii) Die Achsenstreckung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$ in x_2-Richtung.



(iii) Die Scherung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$ längs der x_1-Achse.



Bemerkung 4.1.4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. Dann gilt

$$\varphi(0_V) \;=\; 0_W, \qquad \varphi(-v) \;=\; -\varphi(v) \quad \text{für jedes } v \in V.$$

Bemerkung 4.1.5. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V sowie W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) Die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist linear.
(ii) Für alle $v, v' \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(a \cdot v + a' \cdot v') \;=\; a \cdot \varphi(v) \;+\; a' \cdot \varphi(v').$$

(iii) Für jede Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i$ in V gilt

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i\right) \;=\; \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi(v_i).$$

Satz 4.1.6. *Es seien $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann ist die Komposition $\psi \circ \varphi\colon U \to W$ wieder eine lineare Abbildung.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich direkt aus der Linearität von φ und ψ: Für alle $u, u' \in U$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt

$$\psi(\varphi(a \cdot u + a' \cdot u')) \;=\; \psi(a \cdot \varphi(u) + a' \cdot \varphi(u')) \;=\; a \cdot \psi(\varphi(u)) + a' \cdot \psi(\varphi(u')).$$

□

Definition 4.1.7. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. *Kern* und *Bild* von φ sind definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\varphi) \;&:=\; \{v \in V;\; \varphi(v) = 0_W\} \;=\; \varphi^{-1}(0_W), \\ \mathrm{Bild}(\varphi) \;&:=\; \{\varphi(v);\; v \in V\} \;=\; \varphi(V). \end{aligned}$$

Satz 4.1.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W.*

(i) *Für jeden Untervektorraum $V' \le_{\mathbb{K}} V$ ist $\varphi(V')$ ein Untervektorraum von W; insbesondere ist* $\mathrm{Bild}(\varphi)$ *ein Untervektorraum von W.*
(ii) *Für jeden Untervektorraum $W' \le_{\mathbb{K}} W$ ist $\varphi^{-1}(W')$ ein Untervektorraum von V; insbesondere ist* $\mathrm{Kern}(\varphi)$ *ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Zu (i). Wir müssen die Axiome eines Untervektorraumes für $\varphi(V')$ nachweisen.

Zu (UV1). Da V' ein Untervektorraum von V ist, gilt $V' \neq \emptyset$. Das impliziert $\varphi(V') \neq \emptyset$.

Zu (UV2). Es seien $w, w' \in \varphi(V')$. Dann gibt es $v, v' \in V'$ mit $\varphi(v) = w$ und $\varphi(v') = w'$. Da V' ein Untervektorraum von V ist, gilt $v + v' \in V'$. Es folgt

$$w + w' \;=\; \varphi(v) + \varphi(v') \;=\; \varphi(v + v') \;\in\; \varphi(V').$$

Zu (UV3). Es seien $w \in \varphi(V')$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gibt es ein $v \in V'$ mit $\varphi(v) = w$. Da V' ein Untervektorraum von V ist, gilt $a \cdot v \in V'$. Es folgt

$$a \cdot w \;=\; a \cdot \varphi(v) \;=\; \varphi(a \cdot v) \;\in\; \varphi(V').$$

Zu (ii). Jetzt müssen wir die Axiome eines Untervektorraumes für $\varphi^{-1}(W')$ nachweisen.

Zu (UV1). Da W' ein Untervektorraum von W ist, gilt $0_W \in W'$. Nach Bemerkung 4.1.4 gilt deshalb $0_V \in \varphi^{-1}(W')$.

Zu (UV2). Es seien $v, v' \in \varphi^{-1}(W')$. Dann gilt $\varphi(v), \varphi(v') \in W'$. Da W' ein Untervektorraum von W ist, folgt

$$\varphi(v + v') \;=\; \varphi(v) + \varphi(v') \;\in\; W'.$$

Das bedeutet $v + v' \in \varphi^{-1}(W')$.

Zu (UV3). Es seien $v \in \varphi^{-1}(W')$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\varphi(v) \in W'$. Da W' ein Untervektorraum von W ist, folgt

$$\varphi(a \cdot v) \;=\; a \cdot \varphi(v) \;\in\; W'.$$

Das bedeutet $a \cdot v \in \varphi^{-1}(W')$. □

Satz 4.1.9. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist injektiv.*
(ii) *Es gilt* $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0_V\}$.

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Nach Bemerkung 4.1.4 gilt $0_V \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Da φ injektiv ist, gibt es kein $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ und $\varphi(v) = 0_W$. Das bedeutet $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0_V\}$.

Zu "(ii)⇒(i)". Es seien zwei Vektoren $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v')$ gegeben. Dann gilt

$$\varphi(v - v') \;=\; \varphi(v) - \varphi(v') \;=\; 0_W.$$

Folglich haben wir $v - v' \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Das bedeutet $v - v' = 0_V$, und wir erhalten $v = v'$. □

Satz 4.1.10. *Es seien $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von* $\mathrm{Kern}(\varphi)$ *und $(w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von* $\mathrm{Bild}(\varphi)$. *Ist $u_j \in \varphi^{-1}(w_j)$ für $j = 1, \ldots, l$, so ist $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l)$ eine Basis für V.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Familie $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l)$ linear unabhängig ist. Dazu sei eine Linearkombination

$$0_V \;=\; a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_k \cdot v_k + b_1 \cdot u_1 + \ldots + b_l \cdot u_l \tag{4.1.10.1}$$

gegeben. Wir müssen dann zeigen, dass alle Koeffizienten a_i und b_j verschwinden. Mit der Linearität von φ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0_W &= \varphi(0_V) \\ &= \varphi\big(a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_k \cdot v_k + b_1 \cdot u_1 + \ldots + b_l \cdot u_l\big) \\ &= a_1 \cdot \varphi(v_1) + \ldots + a_k \cdot \varphi(v_k) + b_1 \cdot \varphi(u_1) + \ldots + b_l \cdot \varphi(u_l) \\ &= b_1 \cdot w_1 + \ldots + b_l \cdot w_l. \end{aligned}$$

Da $(w_1, \ldots, w_l)$ als Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ linear unabhängig ist, folgt $b_1 = \ldots = b_l = 0$. Gehen wir damit in die Linearkombination (4.1.10.1), so ergibt sich

$$0_V \;=\; a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_k \cdot v_k.$$

Da $(v_1, \ldots, v_k)$ als Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ linear unabhängig ist, erhalten wir $a_1 = \ldots = a_k = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ nachgewiesen.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{B}$ eine erzeugende Familie für V ist. Dazu sei $v \in V$ gegeben. Da $(w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist, erhalten wir eine Darstellung

$$\varphi(v) \;=\; b_1 \cdot w_1 + \ldots + b_l \cdot w_l.$$

Wir betrachten nun den Vektor $v' := b_1 \cdot u_1 + \ldots + b_l \cdot u_l$. Für das Bild der Differenz $v - v'$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(v - v') &= \varphi(v) - \varphi(v') \\ &= b_1 \cdot w_1 + \ldots + b_l \cdot w_l \;-\; \varphi(b_1 \cdot u_1 + \ldots + b_l \cdot u_l) \\ &= b_1 \cdot w_1 + \ldots + b_l \cdot w_l \;-\; (b_1 \cdot \varphi(u_1) + \ldots + b_l \cdot \varphi(u_l)) \\ &= 0_W. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Es gilt $v - v' \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Da $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ erhalten wir eine Darstellung

$$v - v' \;=\; a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_k \cdot v_k.$$

Setzen wir die Darstellungen für $v - v'$ und v' zusammen, so ergibt sich, wie gewünscht, eine Darstellung von v als Linearkombination über $\mathcal{B}$:

$$v \;=\; (v - v') + v' \;=\; a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_k \cdot v_k \;+\; b_1 \cdot u_1 + \ldots + b_l \cdot u_l.$$

□

Folgerung 4.1.11 (Dimensionsformel)**.** *Es sei* $\varphi\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorräume. Dann gilt*

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) \;+\; \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)).$$

Beweis. Als Untervektorräume endlichdimensionaler Vektorräume sind $\mathrm{Kern}(\varphi)$ sowie $\mathrm{Bild}(\varphi)$ nach Satz 3.4.11 endlichdimensional; sie besitzen also endliche Basen $(v_1, \ldots, v_k)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_l)$. Folglich kann man Satz 4.1.10 anwenden. □

Folgerung 4.1.12. *Es sei* $\varphi\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{K}$*-Vektorräumen mit* $\dim(W) = \dim(V) < \infty$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\varphi\colon V \to W$ *ist injektiv.*
(ii) $\varphi\colon V \to W$ *ist surjektiv.*
(iii) $\varphi\colon V \to W$ *ist bijektiv.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Nach Satz 4.1.9 gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$. Die Dimensionsformel liefert somit $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V)$. Nach Voraussetzung gilt $\dim(V) = \dim(W)$. Mit Satz 3.4.12 folgt $\mathrm{Bild}(\varphi) = W$.

Zu "(ii)⇒(iii)". Da φ surjektiv ist, gilt $\dim(W) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir daher $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$ und somit $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0_V\}$. Nach Satz 4.1.9 ist φ injektiv.

Die Implikation "(iii)⇒(i)" ist offensichtlich. □

Definition 4.1.13. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ von $\mathbb{K}$-Vektorräumen heißt *Isomorphismus*, falls es eine lineare Abbildung $\psi\colon W \to V$ gibt mit

$$\psi \circ \varphi \;=\; \mathrm{id}_V, \qquad \varphi \circ \psi \;=\; \mathrm{id}_W.$$

Zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W nennt man *isomorph*, in Zeichen $V \cong W$, falls es einen Isomorphismus $\varphi\colon V \to W$ gibt.

Satz 4.1.14. *Es sei* $\varphi\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{K}$*-Vektorräumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) φ *ist ein Isomorphismus.*
(ii) φ *ist bijektiv.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Da φ als Isomorphismus insbesondere eine Umkehrabbildung besitzt, ist φ nach Satz 1.3.13 bijektiv.

Zu "(ii)⇒(i)". Als bijektive Abbildung besitzt φ nach Satz 1.3.13 eine Umkehrabbildung $\psi\colon W \to V$. Wir müssen zeigen, dass diese linear ist. Es gilt stets

$$a \cdot w + a' \cdot w' \;=\; a \cdot \varphi(\psi(w)) + a' \cdot \varphi(\psi(w')) \;=\; \varphi(a \cdot \psi(w) + a' \cdot \psi(w')).$$

Wendet man nun die Abbildung ψ auf diese Gleichung an, so ergibt sich die gewünschte Linearität. □

Satz 4.1.15. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Ist* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis für* V*, so hat man einen Isomorphismus*

$$\varphi_{\mathcal{B}}\colon V \;\to\; \mathbb{K}^n, \qquad v \;\mapsto\; x_{\mathcal{B}}(v).$$

Beweis. Die Abbildung $\varphi_{\mathcal{B}}$ ist offensichtlich surjektiv, und nach Satz 3.3.11 ist sie linear. Also ist sie nach 4.1.12 und 4.1.14 ein Isomorphismus. □

Folgerung 4.1.16. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $V \cong W$.
(ii) *Es gilt* $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Gilt $V \cong W$, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi \colon V \to W$. Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(V) \;=\; \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \;=\; \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \;=\; \dim(W).$$

Zu "(i)⇒(ii)". Nach Satz 4.1.16 gibt es Isomorphismen $\varphi \colon V \to \mathbb{K}^n$ und $\psi \colon W \to \mathbb{K}^n$. Die Hintereinanderausführung $\psi^{-1} \circ \varphi \colon V \to W$ ist dann ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \circ \psi \colon W \to V$. □

Aufgaben zu Abschnitt 4.1.

Aufgabe 4.1.17. Welche der folgenden Abbildungen ist linear:

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2^2$,
(ii) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto -5x_1 - 6x_2$,
(iii) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 + 1$?

Aufgabe 4.1.18. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi, \psi\colon V \to V$ lineare Abbildungen. Zeige:

(i) $\mathrm{Kern}(\psi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi \circ \psi)$.
(ii) $\mathrm{Bild}(\varphi \circ \psi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$.
(iii) Ist φ injektiv, so gilt $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Kern}(\varphi \circ \psi)$.
(iv) Ist ψ surjektiv, so gilt $\mathrm{Bild}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$.

Zeige durch Angabe expliziter Beispiele, dass die Umkehrung der Aussagen (iii) sowie (iv) im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4.1.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, und es seien Elemente $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ gegeben. Zeige, dass

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \;\to\; \mathbb{K}^2, \qquad (x, y) \;\mapsto\; (ax + by, cx + dy)$$

eine lineare Abbildung ist. Zeige weiter, dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Aufgabe 4.1.20. Es sei $V = \mathrm{Lin}(u, v)$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Zeige: Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = V$.

Aufgabe 4.1.21. Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, und es sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist linear.
(ii) Der Graph $\Gamma_\varphi = \{(v, \varphi(v));\ v \in V\}$ ist ein Untervektorraum von $V \times W$.

Aufgabe 4.1.22. Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V und $\varphi(\mathcal{F}) := (\varphi(v_i))_{i \in I}$ die Bildfamilie in W. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $\varphi\colon V \to W$ injektiv und die Familie $\mathcal{F}$ linear unabhängig, so ist die Bildfamilie $\varphi(\mathcal{F})$ linear unabhängig.
(ii) Ist $\varphi\colon V \to W$ surjektiv und $\mathcal{F}$ ein Erzeugendensystem für V, so ist die Bildfamilie $\varphi(\mathcal{F})$ ein Erzeugendensystem für W.
(iii) Ist $\varphi\colon V \to W$ bijektiv und $\mathcal{F}$ eine Basis für V, so ist die Bildfamilie $\varphi(\mathcal{F})$ eine Basis für W.

Aufgabe 4.1.23. Zeige, dass die Dimensionsformel auf lineare Abbildungen nicht notwendig endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume verallgemeinert werden kann.

4.2. **Matrizen.**

Beispiel 4.2.1. Eine Matrix ist eine Anordnung von Körperelementen in ein rechteckiges Schema; zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

eine (2×3)-Matrix, eine (3×2)-Matrix.

Definition 4.2.2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine $(m \times n)$-*Matrix über* $\mathbb{K}$ ist eine Anordnung von Elementen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ in ein Schema

$$A \;=\; (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ mit $m = n$ nennen wir auch eine *quadratische Matrix.*

Bemerkung 4.2.3. Es sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$.

(i) A besitzt m *Zeilen*, $A_{1*}, \dots, A_{m*}$; dabei ist die i-te Zeile gegeben durch

$$A_{i*} \;:=\; (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

(ii) A besitzt n *Spalten*, $A_{*1}, \dots, A_{*n}$; dabei ist die j-te Spalte gegeben durch

$$A_{*j} \;:=\; \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 4.2.4. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die $(n \times n)$-*Einheitsmatrix über* $\mathbb{K}$ ist die quadratische Matrix

$$E_n \;:=\; (\delta_{ij})_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{wobei } \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die i-te Zeile von E_n ist gerade der Vektor e_i, und die j-te Spalte von E_n ist der Vektor e_j.

Bemerkung 4.2.5. Die Menge $\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ aller $(m \times n)$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ wird zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum durch die komponentenweise Addition und die komponentenweise Skalarmultiplikation

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) \;:=\; (a_{ij} + b_{ij}), \qquad\qquad a \cdot (a_{ij}) \;:=\; (a \cdot a_{ij}).$$

Definition 4.2.6. Die *Anwendung* eines Vektors $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ auf einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$a \cdot x \;:=\; a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\in\; \mathbb{K}.$$

Lemma 4.2.7. *Das Anwenden ist linear in beiden Argumenten, d.h., für $a, b, x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt stets:*

$$(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \cdot x \;=\; \alpha(a \cdot x) + \beta(b \cdot x), \qquad a \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \;=\; \alpha(a \cdot x) + \beta(a \cdot y).$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich direkt aus den Rechenregeln des Körpers $\mathbb{K}$: Es gilt

$$(\alpha{\cdot}a+\beta{\cdot}b)\cdot x \;=\; \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i)x_i \;=\; \alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}b_ix_i \;=\; \alpha(a\cdot x)+\beta(b\cdot x).$$

und

$$a\cdot(\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y) \;=\; \sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i) \;=\; \alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i \;=\; \alpha(a\cdot x)+\beta(a\cdot y).$$

□

Definition 4.2.8. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A=(a_{ij})\in\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Das *Matrix-Vektor-Produkt* von A und x ist der Vektor

$$A\cdot x \;:=\; \begin{pmatrix} A_{1*}\cdot x\\ \vdots\\ A_{m*}\cdot x\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n\end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{K}^m.$$

Beispiel 4.2.9. Es gilt

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1\\4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\28\end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1\\3\cdot2+4\cdot1\\5\cdot2+6\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\10\\16\end{pmatrix}.$$

Satz 4.2.10. *Für Matrizen $A,B\in\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, Vektoren $x,y\in\mathbb{K}^n$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ gilt*

$$(\alpha{\cdot}A+\beta{\cdot}B)\cdot x \;=\; \alpha{\cdot}(A\cdot x)+\beta{\cdot}(B\cdot x), \qquad A\cdot(\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y) \;=\; \alpha{\cdot}(A\cdot x)+\beta{\cdot}(A\cdot y).$$

Beweis. Für die i-te Komponente von $(\alpha{\cdot}A+\beta{\cdot}B){\cdot}x$ erhalten wir mit Lemma 4.2.7

$$(\alpha{\cdot}A+\beta{\cdot}B)_{i*}\cdot x \;=\; (\alpha{\cdot}A_{i*}+\beta{\cdot}B_{i*})\cdot x \;=\; \alpha{\cdot}(A_{i*}\cdot x)+\beta{\cdot}(B_{i*}\cdot x).$$

Für die i-te Komponente von $A\cdot(\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y)$ ergibt sich

$$A_{i*}\cdot(\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y) \;=\; \alpha{\cdot}(A_{i*}\cdot x)+\beta{\cdot}(A_{i*}\cdot y).$$

Das verifiziert die Gleichungen der Behauptung komponentenweise. □

Definition 4.2.11. Es seien $A=(a_{ij})$ eine $(m\times n)$-Matrix und $B=(b_{jk})$ eine $(n\times l)$-Matrix. Das *Produkt* von A und B ist die $(m\times l)$-Matrix

$$A{\cdot}B \;:=\; (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le k\le l}} \qquad \text{wobei } c_{ik} \;:=\; \sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \;=\; A_{i*}\cdot B_{*k}.$$

Bemerkung 4.2.12. Es seien $A=(a_{ij})$ eine $(m\times n)$-Matrix und $B=(b_{jk})$ eine $(n\times l)$-Matrix.

(i) Die i-te Zeile von $A{\cdot}B$ erhält man durch Anwenden der i-ten Zeile von A auf die Spalten von B, d.h., es gilt

$$A{\cdot}B \;:=\; \begin{pmatrix} A_{1*}{\cdot}B_{*1} & \ldots & A_{1*}{\cdot}B_{*l}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m*}{\cdot}B_{*1} & \ldots & A_{m*}{\cdot}B_{*l}\end{pmatrix}.$$

(ii) Die Spalten von $A{\cdot}B$ sind gerade die Matrix-Vektor-Produkte $A{\cdot}B_{*k}$, wobei $1\le k\le l$, d.h., es gilt

$$A{\cdot}B \;:=\; (A{\cdot}B_{*1},\ldots,A{\cdot}B_{*l}).$$

Beispiel 4.2.13. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3 \\ 4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 2 & 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 17 & 32 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 4 & 0\cdot 2+1\cdot 5 & 0\cdot 3+1\cdot 6 \\ 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6 \\ 2\cdot 1+3\cdot 4 & 2\cdot 2+3\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \\ 14 & 19 & 24 \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.2.14. *Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n,l;\mathbb{K})$ und $x \in \mathbb{K}^l$. Dann gilt*

$$A\cdot(B\cdot x) \;=\; (A\cdot B)\cdot x$$

Beweis. Die j-te Komponente von $B\cdot x$ ist $(B\cdot x)_j = \sum_{k=1}^{l} b_{jk}x_k$. Somit erhalten wir

$$(A\cdot(B\cdot x))_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{jk}x_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)x_k \;=\; ((A\cdot B)\cdot x)_i.$$

□

Satz 4.2.15. *Die Matrizenmultiplikation besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) *Sie ist assoziativ, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n,l;\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(l,k;\mathbb{K})$ gilt stets*

$$(A\cdot B)\cdot C \;=\; A\cdot(B\cdot C).$$

(ii) *Sie ist distributiv, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$, $B,C \in \mathrm{Mat}(n,l;\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{Mat}(l,k;\mathbb{K})$ gilt stets*

$$A\cdot(B+C) \;=\; A\cdot B + A\cdot C, \qquad (B+C)\cdot D \;=\; B\cdot D + C\cdot D.$$

(iii) *Die Einheitsmatrix verhält sich neutral, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n,l;\mathbb{K})$ gilt stets*

$$A\cdot E_n \;=\; A, \qquad E_n\cdot B \;=\; B.$$

Beweis. Zu (i). Mit Bemerkung 4.2.12 (ii) und Lemma 4.2.14 erhalten wir

$$\begin{aligned} A\cdot(B\cdot C) &= A\cdot(B\cdot C_{*1},\ldots,B\cdot C_{*k}) \\ &= (A\cdot(B\cdot C_{*1}),\ldots,A\cdot(B\cdot C_{*k})) \\ &= ((A\cdot B)\cdot C_{*1}),\ldots,(A\cdot B)\cdot C_{*k})) \\ &= (A\cdot B)\cdot C. \end{aligned}$$

Zu (ii). Hier arbeiten wir mit Bemerkung 4.2.12 (ii) und Satz 4.2.10: Es gilt

$$\begin{aligned} A\cdot(B+C) &= (A\cdot(B_{*1}+C_{*1}),\ldots,A\cdot(B_{*l}+C_{*l})) \\ &= (A\cdot B_{*1}+A\cdot C_{*1},\ldots,A\cdot B_{*l}+A\cdot C_{*l}) \\ &= (A\cdot B_{*1},\ldots,A\cdot B_{*l}) \;+\; (A\cdot C_{*1},\ldots,A\cdot C_{*l}) \\ &= A\cdot B + A\cdot C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B+C)\cdot D &= ((B+C)\cdot D_{*1},\ldots,(B+C)\cdot D_{*k}) \\ &= (B\cdot D_{*1}+C\cdot D_{*1},\ldots,B\cdot D_{*k}+C\cdot D_{*k}) \\ &= (B\cdot D_{*1},\ldots,B\cdot D_{*k}) \;+\; (C\cdot D_{*1},\ldots,C\cdot C_{*k}) \\ &= B\cdot D + C\cdot D. \end{aligned}$$

Aussage (iii) ergibt sich direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Folgerung 4.2.16. $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ *ist ein Ring mit Einselement* E_n*.*

Definition 4.2.17. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ gibt mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

Bemerkung 4.2.18. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann gilt für jede quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$:

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})^*.$$

Man bezeichnet die Inverse einer invertierbaren Matrix A daher auch mit A^{-1}. Die Einheitengruppe des Matrizenringes $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ bezeichnet man mit

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \quad := \quad \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})^*.$$

Für $n \geq 2$ ist die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ nicht abelsch. Beispielsweise hat man $A \cdot B \neq B \cdot A$ in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ für die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 4.2.

Aufgabe 4.2.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $x \in \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Zeige: Das Matrix-Vektor-Produkt $A\cdot x$ ist eine Linearkombination aus den Spalten A_{*j} der Matrix A mit den Koeffizienten x_j:

$$A\cdot x \quad = \quad x_1\cdot A_{*1} + \ldots + x_n\cdot A_{*n}.$$

Aufgabe 4.2.20. Bestimme alle möglichen Produkte aus je zwei der folgenden drei Matrizen:

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.2.21. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte die folgenden (3×3)-Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad E(\lambda;3,1) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E(2,3) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E(\lambda;2) \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Produkte

$$E(\lambda;3,1)\cdot A, \quad A\cdot E(\lambda;3,1), \qquad E(2,3)\cdot A, \quad A\cdot E(2,3), \qquad E(\lambda;2)\cdot A, \quad A\cdot E(\lambda;2).$$

Was passiert dabei mit Zeilen und Spalten von A?

Aufgabe 4.2.22. Beweise Bemerkung 4.2.18, d.h., zeige, dass $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ für jedes $n \geq 2$ und jeden Körper $\mathbb{K}$ nicht abelsch ist.

4.3. **Lineare Abbildungen und Matrizen.**

Satz 4.3.1. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Dann definiert die Multiplikation mit A eine lineare Abbildung*

$$\mu_A\colon \mathbb{K}^n \;\to\; \mathbb{K}^m, \qquad x \;\mapsto\; A\cdot x.$$

Die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1,\ldots,e_n \in \mathbb{K}^n$ unter μ_A sind genau die Spalten der Matrix A, d.h., es gilt

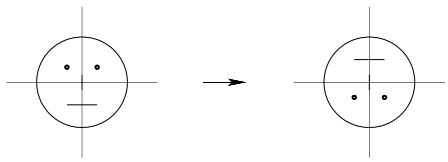
$$\mu_A(e_j) \;=\; A\cdot e_j \;=\; A_{*j} \;=\; \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Linearität von μ_A ist durch die entsprechende Eigenschaft der Matrix-Vektor-Multiplikation garantiert, siehe Satz 4.2.10. Die Aussage über die Bilder der Basisvektoren e_j unter μ_A ergibt sich direkt aus der Definition von $A\cdot e_j$. $\square$

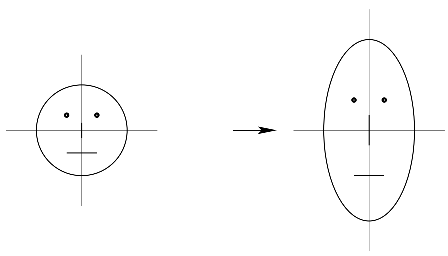
Beispiel 4.3.2. Es sei $E_n \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ die $(n\times n)$-Einheitsmatrix. Dann gilt $\mu_{E_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$.

Beispiel 4.3.3. Die linearen Abbildungen $\mu_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zu einigen reellen (2×2)-Matrizen A:

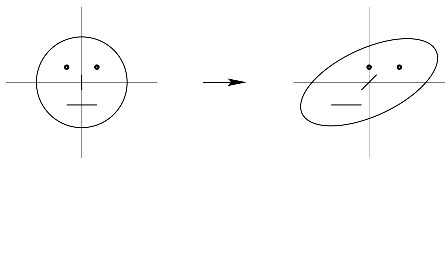
(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liefert $\mu_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2) \mapsto (x_1,-x_2)$.



(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ liefert $\mu_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2) \mapsto (x_1,2x_2)$.



(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $\mu_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1,x_2) \mapsto (x_1+x_2,x_2)$.



Konstruktion 4.3.4. Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis für W.

Ist $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A) \colon V \to W$ mit der das Diagramm

(4.3.4.1)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}\colon v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\mathcal{C}}\colon w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\mu_A\colon x \mapsto Ax"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

kommutativ wird, d.h., es gilt $\mu_A \circ \varphi_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ \mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)$. Die Bilder der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ unter dieser Abbildung sind gegeben durch

(4.3.4.2)
$$\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)(v_j) \quad = \quad a_{1j} \cdot w_1 + \ldots + a_{mj} \cdot w_m.$$

Beweis. Als Isomorphismus besitzt $\varphi_{\mathcal{C}} \colon W \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Umkehrabbildung $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \colon \mathbb{K}^m \to W$. Also erhält man eine lineare Abbildung

$$\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A) \quad := \quad \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \mu_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}.$$

Anwenden von $\varphi_{\mathcal{C}}$ von links ergibt die Kommutativität des Diagrammes und Anwenden von $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ von rechts die Eindeutigkeit von $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)$.

Um die Aussage über die Bilder der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ nachzuweisen, bestimmen wir den Koordinatenvektor von $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)(v_j)$. Es gilt

$$x_{\mathcal{C}}(\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)(v_j)) \; = \; \mu_A(x_{\mathcal{B}}(v_j)) \; = \; \mu_A(e_j) \; = \; (a_{1j}, \dots, a_{mj}).$$

$\square$

Konstruktion 4.3.5. Es seien $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis für W. Dann nennt man

(4.3.5.1)
$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \; := \; \begin{pmatrix} x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)), & \ldots, & x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n)) \end{pmatrix} \; \in \; \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$$

die *(darstellende) Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$*. Die Spalten der Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ sind also gerade die Koordinatenvektoren $x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_j)) \in \mathbb{K}^m$ der Bilder $\varphi(v_j)$ der Basisvektoren v_j, wobei $j = 1, \dots, n$.

Beispiel 4.3.6. Es sei $\varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung. Bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ hat φ die Matrix

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \quad = \quad (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Satz 4.3.7. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis für W. Dann hat man zueinander inverse bijektive Abbildungen*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W) \\ A & \mapsto & \mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A) \\ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) & \leftarrow\!\shortmid & \varphi. \end{array}$$

Lemma 4.3.8. *Es seien $\varphi, \psi \colon V \to W$ lineare Abbildungen von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, und es sei $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem für V. Gilt $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ für jedes $i \in I$, so gilt bereits $\varphi = \psi$.*

Beweis. Jedes Element $v \in V$ besitzt eine Darstellung $v = \sum a_i \cdot v_i$ als Linearkombination über $\mathcal{F}$. Damit erhalten wir

$$\varphi(v) \;=\; \varphi\Big(\sum a_i \cdot v_i\Big) \;=\; \sum a_i \cdot \varphi(v_i) \;=\; \sum a_i \cdot \psi(v_i) \;=\; \psi\Big(\sum a_i \cdot v_i\Big) \;=\; \psi(v).$$

□

Beweis von Satz 4.3.7. Wir verifizieren zunächst $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)) = A$ für jedes $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$. Dies ergibt sich durch spaltenweises Vergleichen der beiden Matrizen:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A))_{*j} \;=\; x_{\mathcal{C}}(\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)(v_j)) \;=\; \mu_A(x_{\mathcal{B}}(v_j)) \;=\; A \cdot e_j \;=\; A_{*j}.$$

Wir zeigen nun, dass $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)) = \varphi$ für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt. Dazu vergleichen wir die Koordinaten der jeweiligen Bilder der Basisvektoren v_j: Es gilt

$$x_{\mathcal{C}}(\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi))(v_j)) \;=\; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot x_{\mathcal{B}}(v_j) \;=\; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot e_j \;=\; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)_{*j} \;=\; x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_j)).$$

Die beiden Bilder von v_j haben also dieselben Koordinaten bezüglich $\mathcal{C}$ und stimmen somit überein. Lemma 4.3.8 garantiert dann $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)) = \varphi$. □

Folgerung 4.3.9. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v \,\mapsto\, x_{\mathcal{B}}(v)"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "w \,\mapsto\, x_{\mathcal{C}}(w)"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \,\mapsto\, M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\cdot x"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kommutativ, und die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ ist eindeutig bestimmt durch diese Eigenschaft.

Beweis. Nach Satz 4.3.7 gilt $\varphi = \mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi))$. Die Kommutativität des Diagrammes ergibt sich also aus der von (4.3.4.1). Weiter garantiert Satz 4.3.7 die Eindeutigkeit: Für jedes $B \neq M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ gilt $\mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(B) \neq \varphi = \mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi))$. □

Satz 4.3.10. *Es seien U, V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Sind $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi) \;=\; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$$

Beweis. Wir setzen $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ und $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi)$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{A}}"', "\cong"] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"', "\cong"] \\
\mathbb{K}^l \arrow[r, "x\mapsto A\cdot x"'] \arrow[rr, bend right, "x\mapsto B\cdot(A\cdot x)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "y\mapsto B\cdot y"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 4.2.14 gilt $B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x$. Folgerung 4.3.9 liefert uns deshalb $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi) = B \cdot A$. □

Satz 4.3.11. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* V *sowie* W *zwei* $\mathbb{K}$*-Vektorräume. Dann wird Menge* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *aller linearen Abbildungen von* V *nach* W *zu einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum durch die punktweisen Verknüpfungen:*

$$(\varphi + \psi)(v) \ := \ \varphi(v) + \psi(v), \qquad (r\cdot\varphi)(v) \ := \ r\cdot\varphi(v).$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Menge $\mathrm{Abb}(V, W)$ aller Abbildungen von V nach W zusammen mit den punktweisen Verknüpfungen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Es ist daher lediglich zu zeigen, dass $\mathrm{Hom}(V, W)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

Da die Nullabbildung zu $\mathrm{Hom}(V, W)$ gehört, ist $\mathrm{Hom}(V, W)$ nicht leer. Es ist also nur noch zu zeigen, dass mit $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ und $r \in \mathbb{K}$ die Abbildungen $\varphi + \psi$ und $r\cdot\varphi$ wieder linear sind:

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi)(v_1 + v_2) &= \varphi(v_1 + v_2) + \psi(v_1 + v_2) \\
&= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \psi(v_1) + \psi(v_2) \\
&= \varphi(v_1) + \psi(v_1) + \varphi(v_2) + \psi(v_2) \\
&= (\varphi + \psi)(v_1) + (\varphi + \psi)(v_2), \\
(\varphi + \psi)(r\cdot v) &= \varphi(r\cdot v) + \psi(r\cdot v) \\
&= r\cdot\varphi(v) + r\cdot\psi(v) \\
&= r\cdot(\varphi(v) + \psi(v)) \\
&= r\cdot(\varphi + \psi)(v), \\
(r\cdot\varphi)(v_1 + v_2) &= r\cdot(\varphi(v_1 + v_2)) \\
&= r\cdot(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) \\
&= r\cdot\varphi(v_1) + r\cdot\varphi(v_2) \\
&= (r\cdot\varphi)(v_1) + (r\cdot\varphi)(v_2), \\
(r\cdot\varphi)(a\cdot v) &= r\cdot\varphi(a\cdot v) \\
&= r\cdot(a\cdot\varphi(v)) \\
&= a\cdot(r\cdot\varphi(v)) \\
&= a\cdot((r\cdot\varphi)(v)).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.3.12. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V*,* W *zwei* $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis für* V *und* $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ *eine Basis für* W*. Dann hat man zueinander inverse Vektorraumisomorphismen.*

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W) \\
A & \mapsto & \mu^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(A) \\
M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) & \leftarrow\!\shortmid & \varphi.
\end{array}$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die beiden Abbildungen zu einander inverse Bijektionen sind. Nach Satz 4.1.14 genügt es zu zeigen, dass eine davon linear ist. Dies geschieht wie folgt

$$\begin{aligned}
M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi + \psi) &= (x_{\mathcal{C}}((\varphi + \psi)(v_1)), \ldots, x_{\mathcal{C}}((\varphi + \psi)(v_n))) \\
&= (x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)) + x_{\mathcal{C}}(\psi(v_1)), \ldots, x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n)) + x_{\mathcal{C}}(\psi(v_n))) \\
&= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(a\cdot\varphi) &= (x_{\mathcal{C}}((a\cdot\varphi)(v_1)), \ldots, x_{\mathcal{C}}((a\cdot\varphi)(v_n))) \\
&= (a\cdot x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)), \ldots, a\cdot x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n))) \\
&= a\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.3.13. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann wird die Menge* $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ *der Endomorphismen von V zu einem Ring durch*

$$(\varphi + \psi)(v) \;:=\; \varphi(v) + \psi(v), \qquad \varphi{\cdot}\psi \;:=\; \varphi \circ \psi.$$

Der Endomorphismenring $\mathrm{End}(V)$ *besitzt die Identität* id_V *als Einselement, und die Gruppe seiner Einheiten ist gegeben durch*

$$\mathrm{End}(V)^* \quad = \quad \{\varphi \in \mathrm{End}(V);\ \varphi \textit{ ist Isomorphismus}\}.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{End}(V)$ zusammen mit der punktweisen Addition eine abelsche Gruppe ist. Weiter ist die Multiplikation in $\mathrm{End}(V)$ nach Satz 1.3.8 assoziativ. Die Distributivität prüfen wir punktweise nach: Es gilt stets

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ (\psi + \kappa))(v) &= \varphi((\psi + \kappa)(v)) \\
&= \varphi(\psi(v) + \kappa(v)) \\
&= \varphi(\psi(v)) + \varphi(\kappa(v)) \\
&= \varphi \circ \psi(v) + \varphi \circ \kappa(v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\varphi + \psi) \circ \kappa)(v) &= ((\varphi + \psi)(\kappa(v)) \\
&= \varphi(\kappa(v)) + \psi(\kappa(v)) \\
&= \varphi \circ \kappa(v) + \psi \circ \kappa(v) \\
&= (\varphi \circ \kappa + \psi \circ \kappa)(v).
\end{aligned}$$

Die Identität id_V ist dann offensichtlich ein neutrales Element für die Multiplikation "$\circ$", und die Aussage über die Einheitengruppe ist ebenfalls klar. □

Satz 4.3.14. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V. Dann hat man zueinander inverse Ringhomomorphismen*

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K}) & \longleftrightarrow & \mathrm{End}(V) \\
A & \mapsto & \mu_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) \\
M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) & \leftarrow\!\shortmid & \varphi.
\end{array}$$

Insbesondere hat man für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ *und jede lineare Abbildung* $\varphi \colon V \to V$*:*

$$\begin{array}{rcl}
A \textit{ ist invertierbar} & \Longleftrightarrow & \mu_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) \textit{ ist Isomorphismus}, \\
\varphi \textit{ ist Isomorphismus} & \Longleftrightarrow & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \textit{ ist invertierbar}.
\end{array}$$

Ist dabei eine beiden Bedingungen erfüllt, so gilt $\mu_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A)^{-1} = \mu_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A^{-1})$*, beziehungsweise* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}$.

Beweis. Die Hauptaussage ist eine direkte Anwendung der Sätze 4.3.10 und 4.3.12. Die Zusatzaussage ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Ringhomomorphismus mit Inversenbildung verträglich ist, siehe Lemma 2.3.6. □

Aufgaben zu Abschnitt 4.3.

Aufgabe 4.3.15. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Zeige: Hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

mit einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, so gilt bereits $\varphi = \mu_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A)$ und $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Aufgabe 4.3.16. Betrachte die Basen $\mathcal{B} := ((1,2),\ (2,1))$ und $\mathcal{C} := ((3,2),\ (1,1))$ von $\mathbb{R}^2$ und bestimme die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ für die linearen Abbildungen

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$,
(ii) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$,
(iii) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$.

Aufgabe 4.3.17. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $V := \mathrm{Lin}(T^0, \ldots, T^n) \subseteq \mathbb{K}[T]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen T über $\mathbb{K}$ vom Grad $\leq n$. Zeige, dass

$$D\colon V \ \to \ V, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \ \mapsto \ \sum_{k=1}^{n} k a_k T^{k-1}$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (T^0, \ldots, T^n)$ von V für

$$\varphi \ = \ D, \qquad \varphi \ = \ D \circ D, \qquad \varphi \ = \ D \circ D - D.$$

Aufgabe 4.3.18. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige: Es gibt ein $r \in \mathbb{Z}_{\geq}0$ und Basen $\mathcal{B}$ für V sowie $\mathcal{C}$ für W, sodass gilt

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. **Der Dualraum.**

Definition 4.4.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der *Dualraum* von V ist der $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$V^* \; := \; \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K}) \; = \; \{f\colon V \to \mathbb{K};\; f \text{ ist linear}\}$$

(zusammen mit den punktweisen Verknüpfungen). Die Elemente $f \in V^*$ nennt man *Linearformen* oder auch *lineare Funktionale* auf V.

Satz 4.4.2. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit*

$$\varphi(v_i) \; = \; w_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von φ haben wir bereits in 4.3.8 nachgewiesen. Zum Nachweis der Existenz definieren wir φ explizit: Ist $v \in V$ gegeben, so haben wir eine eindeutige Darstellung

$$v \; = \; \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i$$

mit dem Koordinatenvektor $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ von v bezüglich $\mathcal{B}$. Mit Hilfe dieser Darstellung definieren wir die Abbildung $\varphi\colon V \to W$ durch

$$\varphi(v) \; := \; \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i.$$

Offensichtlich gilt dann $\varphi(v_i) = w_i$. Zum Nachweis der Linearität seien $v, v' \in V$ und $a, a' \in \mathbb{K}$ gegeben. Wir betrachten die Entwicklungen

$$v \; = \; \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i, \qquad v' \; = \; \sum_{i=1}^{n} a'_i \cdot v_i$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Gemäß unserer Definition von φ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\varphi(a \cdot v + a' \cdot v') \; &= \; \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (aa_i + a'a'_i) \cdot v_i\right) \\
&= \; \sum_{i=1}^{n} (aa_i + a'a'_i) \cdot w_i \\
&= \; \sum_{i=1}^{n} (aa_i) \cdot w_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} (a'a'_i) \cdot w_i \\
&= \; a \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i \; + \; a' \cdot \sum_{i=1}^{n} a'_i \cdot w_i \\
&= \; a \cdot \varphi(v) \; + \; a' \cdot \varphi(v').
\end{aligned}$$

□

Satz 4.4.3. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei $v_i^* \in V^*$ die Linearform mit*

$$v_i^*(v_j) \; = \; \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & i = j, \\ 0_{\mathbb{K}} & i \neq j. \end{cases}$$

Dann ist die Familie $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ *eine Basis des Dualraumes* V^**. Weiter erhält man den Koordinatenvektor* $x_\mathcal{B}(v)$ *eines jeden* $v \in V$ *bezüglich* $\mathcal{B}$ *durch*

$$x_\mathcal{B}(v) \quad = \quad (v_1^*(v), \ldots, v_n^*(v))\,.$$

Beweis. Wir vermerken zunächst, dass jedes v_i^* nach Satz 4.4.2 ein wohldefiniertes Element des Dualraumes V^* ist.

Wir zeigen nun, dass die Familie $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ ein Erzeugendensystem des Dualraumes V^* ist. Dazu sei $f \in V^*$ gegeben. Dann setzen wir

$$a_i \ := \ f(v_i), \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Wir wollen zeigen, dass dann $f = a_1 \cdot v_1^* + \ldots + a_n \cdot v_n^*$ gilt. Nach Satz 4.4.2 genügt es zu zeigen, dass die beiden Linearformen auf jedem v_i über einstimmen. Das ergibt sich jedoch mit

$$(a_1 \cdot v_1^* + \ldots + a_n \cdot v_n^*)(v_i) \ = \ a_1 \cdot v_1^*(v_i) + \ldots + a_n \cdot v_n^*(v_i) \ = \ a_i \cdot v_i^*(v_i) \ = \ a_i.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Familie $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ linear unabhängig ist. Dazu sei eine Darstellung

$$0_{V^*} \quad = \quad a_1 \cdot v_1^* + \ldots + a_n \cdot v_n^*$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $a_i = 0_\mathbb{K}$ für jedes i gilt. Das ergibt sich durch Anwenden der obigen Gleichung auf v_i: Es gilt

$$0_\mathbb{K} \ = \ 0_{V^*}(v_i) \ = \ (a_1 \cdot v_1^* + \ldots + a_n \cdot v_n^*)(v_i) \ = \ a_i.$$

Um den Zusatz zu beweisen, sei ein $v \in V$ gegeben. Der zugehörige Koordinatenvektor ist von der Form $x_\mathcal{B}(v) = (a_1, \ldots, a_n)$. Weiter erhalten wir

$$v_i^*(v) \ = \ v_i^*(a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n) \ = \ a_1 \cdot v_i^*(v_1) + \ldots + a_n \cdot v_i^*(v_n) \ = \ a_i.$$

□

Definition 4.4.4. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann nennt man die Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ des Dualraumes V^* die zu $\mathcal{B}$ *duale Basis.*

Folgerung 4.4.5. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Dann gilt* $\dim(V^*) = \dim(V)$*.*

Satz 4.4.6. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $\varphi\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{K}$*-Vektorräumen. Dann hat man eine zugehörige lineare Abbildung der Dualräume*

$$\varphi^*\colon W^* \ \to \ V^*, \qquad g \ \mapsto \ g \circ \varphi.$$

Ist $\psi\colon U \to V$ *eine weitere lineare Abbildung, so erhält man für die Komposition* $\varphi \circ \psi\colon U \to W$*:*

$$(\varphi \circ \psi)^* \quad = \quad \psi^* \circ \varphi^*.$$

Beweis. Zunächst vermerken wir, dass für jede Linearform $g \in W^*$ die Abbildung $g \circ \varphi\colon V \to \mathbb{K}$ als Komposition linearer Abbildungen wieder linear ist, siehe Satz 4.1.6. Das bedeutet $g \circ \varphi \in V^*$, und somit ist $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ eine wohldefinierte Abbildung.

Wir zeigen nun, dass $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ eine lineare Abbildung ist. Dazu seien $g, g' \in W^*$ und $a, a' \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann erhalten wir für jedes Element $v \in V$:

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(a{\cdot}g + a'{\cdot}g'))(v) &= ((a{\cdot}g + a'{\cdot}g') \circ \varphi)(v) \\
&= (a{\cdot}g + a'{\cdot}g')(\varphi(v)) \\
&= a{\cdot}g(\varphi(v)) + a'{\cdot}g'(\varphi(v)) \\
&= a{\cdot}(g \circ \varphi)(v) + a'{\cdot}(g' \circ \varphi)(v) \\
&= (a{\cdot}(g \circ \varphi) + a'{\cdot}(g' \circ \varphi))(v) \\
&= (a{\cdot}\varphi^*(g) + a'{\cdot}\varphi^*(g'))(v).
\end{aligned}$$

Das beweist die Linearität von $\varphi^*\colon W^* \to V^*$. Die Aussage über die Komposition $\varphi \circ \psi$ erhalten wir mit Satz 1.3.8: Für jedes $g \in W^*$ gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)^*(g) &= g \circ (\varphi \circ \psi) \\
&= (g \circ \varphi) \circ \psi \\
&= (\varphi^*(g)) \circ \psi \\
&= \psi^*(\varphi^*(g)) \\
&= (\psi^* \circ \varphi^*)(g).
\end{aligned}$$

□

Definition 4.4.7. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$A \;=\; (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \;\in\; \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}).$$

Die *Transponierte* von A ist

$$A^t \;:=\; (a'_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \;\in\; \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{K}), \qquad \text{wobei } a'_{ij} \;:=\; a_{ji}.$$

Bemerkung 4.4.8. Es sei A eine Matrix. Dann ist die i-te Zeile der Transponierten A^t gerade die i-te Spalte von A. Beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.4.9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$(A + B)^t \;=\; A^t + B^t, \qquad (\lambda{\cdot}A)^t \;=\; \lambda{\cdot}A^t, \qquad (A^t)^t \;=\; A.$$

Satz 4.4.10. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, l; \mathbb{K})$. Dann gilt*

$$(A \cdot B)^t \;=\; B^t \cdot A^t.$$

Lemma 4.4.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, x \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $a \cdot x = x \cdot a$.*

Beweis. Es seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Nach Definition der Anwendung erhalten wir

$$a \cdot x \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \;=\; x \cdot a.$$

□

Beweis von Satz 4.4.10. Das Produkt $A{\cdot}B$ und dessen Transponierte sind gegeben durch

$$A \cdot B \;=\; (A_{i*} \cdot B_{*k})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le l}}, \qquad (A \cdot B)^t \;=\; (A_{k*} \cdot B_{*i})_{\substack{1 \le i \le l \\ 1 \le k \le m}}.$$

Die i-te Zeile von B^t ist B_{*i} und die k-te Spalte von A^t ist A_{k*}. Unter Verwendung von Lemma 4.4.11 ergibt sich

$$B^t \cdot A^t \;=\; (B_{*i} \cdot A_{k*})_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq k\leq m}} \;=\; (A_{k*} \cdot B_{*i})_{\substack{1\leq i\leq l\\ 1\leq k\leq m}} \;=\; (A \cdot B)^t.$$

□

Folgerung 4.4.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix mit Inverser A^{-1}. Dann ist auch A^t invertierbar, und es gilt*

$$(A^t)^{-1} \;=\; (A^{-1})^t.$$

Beweis. Wir zeigen, dass $(A^{-1})^t$ die Eigenschaften der Inversen zu A^t besitzen. Mit Satz 4.4.10 folgt

$$\begin{aligned} (A^{-1})^t \cdot A^t &= (A \cdot A^{-1})^t = E_n^t = E_n, \\ A^t \cdot (A^{-1})^t &= (A^{-1} \cdot A)^t = E_n^t = E_n. \end{aligned}$$

□

Satz 4.4.13. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V sowie W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist die Matrix von $\varphi^*\colon W^* \to V^*$ bezüglich der dualen Basen $\mathcal{C}^*$ und $\mathcal{B}^*$ gegeben durch*

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^*) \;=\; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)^t.$$

Beweis. Es sei $B := M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^*) \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$. Die j-te Spalte der Matrix B ist der Koordinatenvektor $(b_{1j}, \ldots, b_{nj})$ des Bildes $\varphi^*(w_j^*)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$, d.h., es gilt

$$\varphi^*(w_j^*) \;=\; b_{1j} \cdot v_1^* + \ldots + b_{nj} \cdot v_n^*.$$

Es sei weiter $A := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$. Dann ist die i-te Spalte, $(a_{1i}, \ldots, a_{mi})$ von A der Koordinatenvektor von $\varphi(v_i)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$, d.h., es gilt

$$\varphi(v_i) \;=\; a_{1i} \cdot w_1 + \ldots + a_{mi} \cdot w_m$$

Um $B = A^t$ zu erhalten, müssen wir $b_{ij} = a_{ji}$ zeigen. Das ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (b_{1j} \cdot v_1^* + \ldots + b_{nj} \cdot v_n^*)(v_i) \\ &= (\varphi^*(w_j^*))(v_i) \\ &= w_j^*(\varphi(v_i)) \\ &= w_j^*(a_{1i} \cdot w_1 + \ldots + a_{mi} w_m) \\ &= a_{ji}. \end{aligned}$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 4.4.

Aufgabe 4.4.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V sowie W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$. Zeige: Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad (w_i^*(\varphi(v_j)))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Aufgabe 4.4.15. Zeige, dass man Satz 4.4.2 auch als Folgerung von Satz 4.3.7 erhält.

Aufgabe 4.4.16. Zeige, dass man Satz 4.4.10 auch als Folgerung von Satz 4.3.10 erhält.

Aufgabe 4.4.17. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige:

(i) φ ist genau dann injektiv, wenn φ^* surjektiv ist.
(ii) φ ist genau dann surjektiv, wenn φ^* injektiv ist.

Aufgabe 4.4.18. $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige: Ist φ bijektiv, so ist auch φ^* bijektiv, und es gilt $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

5. Matrizenrechung

5.1. **Zeilen- und Spaltenoperationen.**

Beispiel 5.1.1. Unser Ziel ist es, eine beliebige Matrix durch “elementare Zeilenoperationen” auf eine einfache Gestalt, die “Zeilenstufenform” zu bringen. Wir betrachten zunächst ein Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
\text{Wir beginnen mit der Matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\text{Vertauschen der Zeilen 1 und 2 liefert} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\text{Addieren von } -2 \text{ mal Zeile 1 zu Zeile 3 liefert} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\text{Addieren von 1 mal Zeile 2 zu Zeile 3 liefert} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\text{Multiplizieren von Zeile 2 mit 1/2 liefert} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Definition 5.1.2. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$. Wir sagen, dass A *Zeilenstufenform* besitzt, falls A von folgender Gestalt ist

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

wobei $a_{kj_k} \in \mathbb{K}^*$ für $1 \leq k \leq r$ gilt und “$*$” für ein beliebiges Element aus $\mathbb{K}$ steht. Man nennt $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ die *Pivoteinträge* und $A_{*j_1}, \ldots A_{*j_r}$ die *Pivotspalten.*

Wir sagen weiter, dass A *normierte Zeilenstufenform* besitzt, wenn sie Zeilenstufenform mit Pivoteinträgen $a_{1j_1} = \ldots = a_{rj_r} = 1$ besitzt.

Definition 5.1.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$. Wir unterscheiden drei Typen von *elementaren Zeilenoperationen* an der Matrix A:

(i) Addition des λ-fachen der j-ten zur i-ten Zeile, wobei $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\mathrm{ZOp}(\lambda; j, i)\colon \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \lambda \cdot A_{j*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}.$$

(ii) Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile:

$$\mathrm{ZOp}(i, j)\colon \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}.$$

(iii) Multiplikation der i-ten Zeile von A mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{ZOp}(\lambda; i)\colon \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ \lambda \cdot A_{i*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}.$$

Satz 5.1.4. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$.*

(i) *Man kann A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen vom Typ (i) und vom Typ (ii) in Zeilenstufenform bringen.*
(ii) *Besitzt A Zeilenstufenform, so kann man A durch endlich viele elementare Zeilenoperationen vom Typ (iii) in normierte Zeilenstufenform bringen.*

Beweis. Aussage (ii) ist offensichtlich. Aussage (i) beweisen wir durch Angabe eines expliziten Verfahrens, des *Gaußschen Eliminationsverfahrens* :

Schritt 1: Wir suchen das kleinste j_1, sodass A_{*j_1} keine Nullspalte ist und wählen ein i_1 mit $a_{i_1 j_1} \neq 0$. Dann vertauschen wir die erste mit der i-ten Zeile. Das bringt A auf die Gestalt

$$B \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i_1 j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Für $i = 2, \dots, m$ addieren wir das $-(b_{ij_1}/a_{i_1 j_1})$-fache der ersten Zeile zur i-ten Zeile. Dadurch bringen wir B auf die Gestalt

$$C \ := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{i_1 j_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} B_{1*} \\ D \end{pmatrix}.$$

Mit diesen beiden Schritten haben wir für die erste Zeile bereits den gewünschten Zustand erreicht.

Wiederholt man die beiden Schritte mit der Matrix D, so ist auch die zweite Zeile in die gewünschte Form gebracht — man beachte dabei, dass Zeilenoperationen an D auch Zeilenoperationen an C sind. Nach m derartigen Durchläufen ist man am Ziel. $\square$

Definition 5.1.5. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$. Wir unterscheiden drei Typen von *elementaren Spaltenoperationen* an der Matrix A:

(i) Addition des λ-fachen der j-ten zur i-ten Spalte, wobei $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{SpOp}(\lambda; j, i)\colon \quad & (A_{*1}, \dots, A_{*i}, \dots, A_{*j}, \dots, A_{*n}) \\ \mapsto \quad & (A_{*1}, \dots, A_{*i} + \lambda \cdot A_{*j}, \dots, A_{*j}, \dots, A_{*n}). \end{aligned}$$

(ii) Vertauschen der i-ten mit der j-ten Spalte:

$$\begin{aligned} \mathrm{SpOp}(i, j)\colon \quad & (A_{*1}, \dots, A_{*i}, \dots, A_{*j}, \dots, A_{*n}) \\ \mapsto \quad & (A_{*1}, \dots, A_{*j}, \dots, A_{*i}, \dots, A_{*n}). \end{aligned}$$

(iii) Multiplikation der i-ten Spalte mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{SpOp}(\lambda; i)\colon \quad & (A_{*1}, \dots, A_{*i}, \dots, A_{*n}) \\ \mapsto \quad & (A_{*1}, \dots, \lambda \cdot A_{*i}, \dots, A_{*n}). \end{aligned}$$

Satz 5.1.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit r Pivotspalten. Dann kann man A durch endlich viele elementare Spaltenoperationen vom Typ (i) und vom Typ (ii) auf folgende Gestalt bringen*

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei D eine $(r \times r)$-Diagonalmatrix ist, d.h., es gilt $D_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ für alle $i \neq j$. Durch Anwendung von Spaltenoperationen vom Typ (iii) erreicht man weiter, dass $D = E_r$ gilt.

Beweis. Durch Spaltenvertauschungen machen wir die l-te Pivotspalte zur l-ten Spalte, wobei $1 \leq l \leq r$. Damit bringen wir A in die Form

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann erreicht man durch Addieren von geeigneten Vielfachen der ersten Spalte zu den weiteren Spalten, dass alle Einträge rechts von d_{11} zu Null werden usw.. □

Definition 5.1.7. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zu $\lambda \in \mathbb{K}^*$ und $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ definieren wir eine *Elementarmatrix* $E(n;\lambda;j,i) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ durch

$$E(n;\lambda;j,i) \quad := \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + \lambda \cdot e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j + \lambda \cdot e_i, \ldots, e_n).$$

Bemerkung 5.1.8. Die Elementarmatrizen $E(n;\lambda;j,i) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ besitzen folgende Eigenschaften:

(i) Multiplikation von links mit $E(n;\lambda;j,i)$ entspricht dem Addieren des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$ gilt
$$E(n;\lambda;j,i) \cdot A \quad = \quad \mathrm{ZOp}(\lambda;j,i)(A).$$

(ii) Multiplikation von rechts mit $E(n;\lambda;j,i)$ entspricht dem Addieren des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte, d.h., für $B \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ gilt
$$B \cdot E(n;\lambda;j,i) \quad = \quad \mathrm{SpOp}(\lambda;i,j)(B).$$

(iii) Die Matrix $E(n;\lambda;j,i)$ ist invertierbar, und ihre Inverse ist gegeben durch
$$E(n;\lambda;j,i)^{-1} \quad = \quad E(n;-\lambda;j,i).$$

Definition 5.1.9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zu $1 \leq i < j \leq n$ definieren wir eine *Elementarmatrix* $E(n;i,j) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ durch

$$E(n;i,j) \quad := \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n).$$

Bemerkung 5.1.10. Die Elementarmatrizen $E(n;i,j) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ besitzen folgende Eigenschaften:

(i) Multiplikation von links mit $E(n;i,j)$ entspricht dem Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$ gilt
$$E(n;i,j) \cdot A \quad = \quad \mathrm{ZOp}(i,j)(A).$$

(ii) Multiplikation von rechts mit $E(n;i,j)$ entspricht dem Vertauschen der i-ten Spalte mit der j-ten Spalte, d.h., für $B \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ gilt
$$B \cdot E(n;i,j) \quad = \quad \mathrm{SpOp}(i,j)(B).$$

(iii) Die Matrix $E(n;i,j)$ ist invertierbar, und ihre Inverse ist gegeben durch
$$E(n;i,j)^{-1} \quad = \quad E(n;i,j).$$

Definition 5.1.11. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zu $\lambda \in \mathbb{K}^*$ und $1 \leq i \leq n$ definieren wir eine *Elementarmatrix* $E(n;\lambda;i) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ durch
$$E(n;\lambda;i) \quad := \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \quad (e_1, \ldots, \lambda \cdot e_i, \ldots, e_n).$$

Bemerkung 5.1.12. Die Elementarmatrizen $E(n;\lambda;i) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ besitzen folgende Eigenschaften:

(i) Multiplikation von links mit $E(n;\lambda;i)$ entspricht dem Multiplizieren der i-ten Zeile mit dem Faktor λ, d.h., für $A \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{K})$ gilt
$$E(n;\lambda;i) \cdot A \quad = \quad \mathrm{ZOp}(\lambda;i)(A).$$

(ii) Multiplikation von rechts mit $E(n;\lambda;i)$ entspricht dem Multiplizieren der i-ten Spalte mit dem Faktor λ, d.h., für $B \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ gilt
$$B \cdot E(n;\lambda;i) = \mathrm{SpOp}(\lambda;i)(B).$$

(iii) Die Matrix $E(n;\lambda;i)$ ist invertierbar, und ihre Inverse ist gegeben durch
$$E(n;\lambda;i)^{-1} \quad = \quad E(n;\lambda^{-1};i).$$

Satz 5.1.13. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ eine Matrix.*

(i) *Es gibt Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_k \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$, sodass $S_k \cdots S_1 \cdot A$ normierte Zeilenstufenform besitzt.*

(ii) *Besitzt A Zeilenstufenform mit r Pivotspalten, so gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_l \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ mit*
$$A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Es gibt Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_k \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$, und $T_1, \ldots, T_l \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ mit*
$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu (i). Nach Satz 5.1.4 kann man die Matrix A durch elementare Zeilenoperationen $\mathrm{ZOp}_1, \ldots, \mathrm{ZOp}_k$ in normierte Zeilenstufenform bringen, d.h., mit den zu ZOp_i gehörigen Elementarmatrizen S_i besitzt $S_k \cdots S_1 \cdot A$ normierte Zeilenstufenform.

Zu (ii). Nach Satz 5.1.6 wird die Matrix A durch elementare Spaltenoperationen $\mathrm{SpOp}_1, \ldots, \mathrm{SpOp}_l$ auf die gewünschte Gestalt gebracht. Bezeichnen T_i die zu SpOp_i gehörigen Elementarmatrizen, so gilt

$$A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aussage (iii) ergibt sich sofort aus den beiden vorangehenden Aussagen. □

Bemerkung 5.1.14. In der Situation von Satz 5.1.13, ist es häufig erforderlich, für gegebenes $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ die Matrizen $S := S_1 \cdots S_k \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ und $T := T_1 \cdots T_l \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ explizit zu bestimmen.

Man gewinnt S und T wie folgt: Man bildet das Tripel (A, E_m, E_n) und bringt A durch Zeilenoperationen ZOp_i und Spaltenoperationen SpOp_j auf die Gestalt

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei müssen nicht notwendigerweise alle Zeilenoperationen vor den Spaltenoperationen durchgeführt werden; man darf also auch mischen.

Die Zeilenoperationen ZOp_i wendet man sukzessive auf E_m an, und die Spaltenoperationen SpOp_j sukzessive auf E_n. Das Resultat ist ein Tripel (C, S, T), wobei S und T die gewünschte Eigenschaft $S \cdot A \cdot T = C$ besitzen.

Beispiel 5.1.15. Wir bestimmen Matrizen S und T wie in Bemerkung 5.1.14 für die Matrix

$$A \; := \; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \in \; \mathrm{Mat}(2, 3; \mathbb{Q}).$$

Das in Bemerkung 5.1.14 angegebene Verfahren verläuft in diesem Fall wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(-1;1,2)} \quad & \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1;2,1)} \quad & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{SpOp}(1;1,3)} \quad & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
\xrightarrow{\mathrm{SpOp}(2;2,3)} \quad & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir Matrizen S und T gefunden, sodass $S \cdot A \cdot T$ die gewünschte Form besitzt, nämlich

$$S \; := \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T \; := \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 5.1.

Aufgabe 5.1.16. Bestimme Matrizen $S \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q})$ und $T \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{Q})$, sodass $S \cdot A \cdot T = (E_3, 0)$ gilt für

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.1.17. Zeige, dass man jede Elementarmatrix des Typs $E(n;i,j)$ als Produkt von Elementarmatrizen des Typs $E(n;\pm 1;k,l)$ und $E(n;-1;k)$ darstellen kann.

5.2. **Der Rang einer Matrix.**

Definition 5.2.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix.

(i) Der *Spaltenraum* von A ist der durch die Spalten $A_{*1}, \ldots, A_{*n}$ von A erzeugte Untervektorraum $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m$.
(ii) Der *Spaltenrang* der Matrix A ist die Dimension des Spaltenraumes von A, in Zeichen

$$\mathrm{SpRang}(A) \quad := \quad \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n})).$$

Beispiel 5.2.2. Der Spaltenrang der $(n \times n)$-Einheitsmatrix über einem Körper $\mathbb{K}$ ist gegeben durch $\mathrm{SpRang}(E_n) = n$. Allgemeiner hat man

$$\mathrm{SpRang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad r.$$

Satz 5.2.3. *Spaltenraum und Spaltenrang einer Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ *lassen sich durch die lineare Abbildung* $\mu_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ *ausdrücken:*

$$\mathrm{Bild}(\mu_A) \;=\; \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}), \qquad\qquad \dim(\mathrm{Bild}(\mu_A)) \;=\; \mathrm{SpRang}(A).$$

Lemma 5.2.4. *Es sei* $\varphi \colon V \to W$ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{K}$*-Vektorräumen* V *und* W*. Ist* $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ *eine Familie in* V *und bezeichnet* $\varphi(\mathcal{F}) := (\varphi(v_i))_{i \in I}$ *die Familie der Bilder in* W*, so gilt*

$$\mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F})) \quad = \quad \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})).$$

Beweis. Zur Inklusion "$\subseteq$". Es sei $w \in \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F}))$ gegeben. Dann hat man eine Darstellung $w = \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi(v_i)$. Aufgrund der Linearität von φ erhalten wir

$$w \;=\; \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi(v_i) \;=\; \varphi\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i\right) \;\in\; \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})).$$

Zur Inklusion "$\supseteq$". Es sei $v \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ gegeben. Dann hat man eine Darstellung $v = \sum_{i \in I} a_i \cdot v_i$. Aufgrund der Linearität von φ erhalten wir

$$\varphi(v) \;=\; \varphi\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot v_i\right) \;=\; \sum_{i \in I} a_i \cdot \varphi(v_i) \;\in\; \mathrm{Lin}(\varphi(\mathcal{F})).$$

□

Beweis von Satz 5.2.3. Wir betrachten die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt $\mathbb{K}^n = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$ und wir haben

$$\mu_A(e_j) \;=\; A \cdot e_j \;=\; A_{*j}.$$

Also erhalten wir mit Lemma 5.2.4:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\mu_A) &= \mu_A(\mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)) \\ &= \mathrm{Lin}(\mu_A(e_1), \ldots, \mu_A(e_n)) \\ &= \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}). \end{aligned}$$

Das ist die erste Gleichung der Behauptung. Die zweite Gleichung ist dann nach Definition des Spaltenranges klar. □

Satz 5.2.5. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ *eine Matrix.*

(i) *Ist* $T \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ *invertierbar, so gilt* $\mathrm{SpRang}(A \cdot T) = \mathrm{SpRang}(A)$.
(ii) *Ist* $S \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ *invertierbar, so gilt* $\mathrm{SpRang}(S \cdot A) = \mathrm{SpRang}(A)$.

Lemma 5.2.6. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *sowie* W *zwei* $\mathbb{K}$*-Vektorräume und* $\varphi\colon V \to W$ *ein Isomorphismus. Ist* $U \leq_{\mathbb{K}} V$ *ein Untervektorraum mit Basis* $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_k)$*, so ist* $\varphi(\mathcal{C}) := (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k))$ *eine Basis für* $\varphi(U) \leq_{\mathbb{K}} W$*.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.4 ist $\varphi(\mathcal{C}) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k))$ ein Erzeugendensystem für $\varphi(U) = \varphi(\mathrm{Lin}(\mathcal{C}))$.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von $\varphi(\mathcal{C}) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k))$ betrachten wir eine Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \varphi(u_i) \quad = \quad 0_W.$$

Wir müssen zeigen, dass alle Koeffizienten a_i verschwinden. Anwenden der (linearen) Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon W \to V$ ergibt

$$0_V \;=\; \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \varphi(u_i)\right) \;=\; \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot u_i.$$

Mit der linearen Unabhängigkeit der Basis $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_k)$ erhalten wir dann wie gewünscht $a_1 = \ldots = a_k = 0$. □

Beweis von Satz 5.2.5. Zu (i). Da T invertierbar ist, liefert Satz 4.3.14, dass μ_T ein Isomorphismus ist. Es folgt $\mu_T(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{SpRang}(A \cdot T) &= \dim(\mathrm{Bild}(\mu_{A \cdot T})) \\
&= \dim(\mathrm{Bild}(\mu_A \circ \mu_T)) \\
&= \dim(\mu_A(\mu_T(\mathbb{K}^n))) \\
&= \dim(\mu_A(\mathbb{K}^n)) \\
&= \mathrm{SpRang}(A).
\end{aligned}$$

Zu (ii). Wir wählen eine Basis $(u_1, \dots, u_r)$ für $U := \mu_A(\mathbb{K}^n)$. Nach Lemma 5.2.6 ist dann $(\mu_S(u_1), \dots, \mu_S(u_r))$ eine Basis für $\mu_S(U) = \mu_S(\mu_A(\mathbb{K}^n))$. Das bedeutet

$$\begin{aligned}
\mathrm{SpRang}(S \cdot A) &= \dim(\mu_{S \cdot A}(\mathbb{K}^n)) \\
&= \dim(\mu_S(\mu_A(\mathbb{K}^n))) \\
&= r \\
&= \dim(\mu_A(\mathbb{K}^n)) \\
&= \mathrm{SpRang}(A).
\end{aligned}$$

□

Satz 5.2.7. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ *eine Matrix und* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathrm{SpRang}(A) = r$*.*
(ii) *Es gibt Elementarmatrizen* $S_1, \dots, S_k \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ *und* $T_1, \dots, T_l \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ *mit*

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zur Implikation “(i)⇒(ii)”. Nach Satz 5.1.13 gibt es Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_k \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ und $T_1, \dots, T_l \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Produkte invertierbarer Matrizen sind $S := S_k \cdots S_1$ und $T := T_1 \cdots T_l$ invertierbar. Mit Satz 5.2.5 folgt $s = r$.

Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Mit $S := S_k \cdots S_1$ und $T := T_1 \cdots T_l$ liefert Satz 5.2.5 sofort, dass $r = \mathrm{SpRang}(A)$ gilt. □

Folgerung 5.2.8. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann ist der Spaltenrang von A gleich der Anzahl der Pivotspalten von A.*

Beweis. Es sei r die Anzahl der Pivotspalten von A. Nach Satz 5.1.13 gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_l \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ mit

$$A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als Produkt invertierbarer Matrizen ist $T := T_1 \cdots T_l$ invertierbar. Mit Satz 5.2.5 folgt $r = \mathrm{SpRang}(A)$. □

Definition 5.2.9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix.

(i) Der *Zeilenraum* von A ist der durch die Zeilen $A_{1*}, \ldots, A_{m*}$ von A erzeugte Untervektorraum $\mathrm{Lin}(A_{1*}, \ldots, A_{m*}) \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$.

(ii) Der *Zeilenrang* der Matrix A ist die Dimension des Zeilenraumes von A, in Zeichen

$$\mathrm{ZRang}(A) \quad := \quad \dim(\mathrm{Lin}(A_{1*}, \ldots, A_{m*})).$$

Beispiel 5.2.10. Der Zeilenrang der $(n \times n)$-Einheitsmatrix über einem Körper ist $\mathrm{ZRang}(E_n) = n$. Allgemeiner hat man für Blockmatrizen

$$\mathrm{ZRang} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad r.$$

Satz 5.2.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix. Dann gilt*

$$\mathrm{ZRang}(A) \quad = \quad \mathrm{SpRang}(A).$$

Beweis. Wir setzten $r := \mathrm{SpRang}(A)$. Weiter wählen wir invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ wie in Folgerung 5.2.7, d.h., mit

$$S \cdot A \cdot T \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Folgerung 4.4.12 sind auch die Transponierten S^t sowie T^t invertierbar, und nach Satz 4.4.10 gilt $(S \cdot A \cdot T)^t = T^t \cdot A^t \cdot S^t$. Mit Satz 5.2.5 ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \mathrm{ZRang}(A) \quad &= \quad \mathrm{SpRang}(A^t) \\ &= \quad \mathrm{SpRang}(T^t \cdot A^t \cdot S^t) \\ &= \quad \mathrm{SpRang}((S \cdot A \cdot T)^t) \\ &= \quad \mathrm{ZRang}(S \cdot A \cdot T) \\ &= \quad r. \end{aligned}$$

□

Definition 5.2.12. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix. Der *Rang* von A ist

$$\mathrm{Rang}(A) \ := \ \mathrm{SpRang}(A) \ = \ \mathrm{ZRang}(A).$$

Bemerkung 5.2.13. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine $(m \times n)$-Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{Rang}(A) \ = \ \mathrm{SpRang}(A) \ = \ \mathrm{ZRang}(A^t) \ = \ \mathrm{Rang}(A^t).$$

Bemerkung 5.2.14. Um den Rang einer gegebenen Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ zu bestimmen, bringe man A durch Zeilen- und Spaltenoperationen auf eine Gestalt B, der man den Rang direkt ansehen kann. Es gilt dann $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

Satz 5.2.15. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Spalten von A bilden eine Basis des $\mathbb{K}^n$.*
(ii) *Die Zeilen von A bilden eine Basis des $\mathbb{K}^n$.*
(iii) *Es gilt* $\mathrm{Rang}(A) = n$.
(iv) *A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*
(v) *A ist invertierbar.*

Beweis. Zur Äquivalenz der Aussagen (i) und (iii). Mit Satz 3.4.9 und Satz 3.4.12 erhalten wir

$$\begin{aligned}
(A_{*1},\ldots,A_{*n}) \text{ Basis für } \mathbb{K}^n \quad &\Longleftrightarrow \quad (A_{*1},\ldots,A_{*n}) \text{ Erzeugendensystem für } \mathbb{K}^n \\
&\Longleftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Lin}(A_{*1},\ldots,A_{*n})) \ = \ n \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{SpRang}(A) \ = \ n.
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich völlig analog; man arbeitet hier mit Zeilen anstatt mit Spalten.

Zu "(iii)$\Rightarrow$(iv)". Nach Folgerung 5.2.7 gibt es Elementarmatrizen $S_1,\ldots,S_k$ und $T_1,\ldots,T_l$ in $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdots T_l \quad = \quad E_n.$$

Jede Elementarmatrix S_i, T_j ist invertierbar, und die Inversen S_i^{-1}, T_j^{-1} sind wieder Elementarmatrizen. Das impliziert

$$A \ = \ S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \cdot E_n \cdot T_l^{-1} \cdots T_1^{-1} \ = \ S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \cdot T_l^{-1} \cdots T_1^{-1}.$$

Zu "(iv)$\Rightarrow$(v)". Elementarmatrizen sind invertierbar. Also ist A als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar.

Zu "(v)$\Rightarrow$(iii)". Es sei $S := A^{-1}$. Dann gilt $S \cdot A = E_n$ und Satz 5.2.5 liefert uns $\mathrm{Rang}(A) = n$. □

Bemerkung 5.2.16 (Inversenberechnung)**.** Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ vom Rang n. Sind $S_1,\ldots,S_k$ Elementarmatrizen mit

$$S_k \cdots S_1 \cdot A \quad = \quad E_n,$$

so gilt $A^{-1} = S_k \cdots S_1$, siehe Satz 2.1.11. Weiter garantiert Satz 5.2.15 die Existenz der Elementarmatrizen $S_1,\ldots,S_k$.

Zur expliziten Berechnung der Inversen A^{-1} bilde man das Paar (A, E_n), überführe A durch Zeilenoperationen ZOp_i in die Einheitsmatrix und wende dabei die ZOp_i sukzessive auf E_n an. Das Resultat ist ein Paar (E_n, S), wobei S die Inverse von A ist.

Analog kann man das Verfahren mit Spalten- anstatt mit Zeilenoperationen durchführen. *Vorsicht:* Ein gemischtes Verfahren aus Zeilen- und Spaltenoperationen funktioniert im Allgemeinen nicht!

Beispiel 5.2.17. Wir bestimmen die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das in Bemerkung 5.2.16 angegebene Verfahren verläuft in diesem Fall wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad & \xrightarrow{\text{ZOp}(1,3)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(-1;3,1)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(1;1,2)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Damit ist die Inverse von A gegeben durch

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 5.2.

Aufgabe 5.2.18. Bestimme den Rang folgender Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(4,5;\mathbb{Q})$ und $B \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q})$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 2 & 3 & e \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } ad \neq bc.$$

Aufgabe 5.2.19. Bestimme die Inversen für folgende Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q})$ und $B \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{Q})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.2.20. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ eine Matrix in Zeilenstufenform. Zeige: Die Pivotspalten bilden eine Basis für den Spaltenraum von A.

Aufgabe 5.2.21. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n,l;\mathbb{K})$. Zeige: Es gilt $\mathrm{Rang}(A \cdot B) \leq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$.

Aufgabe 5.2.22. Zeige: Jede bijektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Hintereinanderausführung von endlich vielen Achsenspiegelungen, Achsenstreckungen und Scherungen.

5.3. **Lineare Gleichungssysteme.**

Definition 5.3.1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Man nennt ein solches Gleichungssystem *homogen*, falls $b_1 = \ldots = b_m = 0$ gilt; ansonsten nennt man es *inhomogen*.

Eine *Lösung* des obigen Systems ist ein Vektor $s \in \mathbb{K}^n$, der alle Gleichungen erfüllt. Das System heißt *lösbar*, falls es eine Lösung besitzt.

Bemerkung 5.3.2. Lineare Gleichungssystem lassen sich mit Hilfe von Matrix-Vektormultiplikation sehr elegant beschreiben: Für ein gegebenes System

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

nennt man $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ die zugehörige *Koeffizientenmatrix* und setzt $b := (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$. Mit $x := (x_1, \ldots, x_n)$ lässt sich das System schreiben als

$$A \cdot x \;=\; b.$$

Satz 5.3.3. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$.*

(i) *Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist gegeben durch*

$$\{x \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot x = 0\} \;=\; \{x \in \mathbb{K}^n;\ \mu_A(x) = 0\} \;=\; \mathrm{Kern}(\mu_A).$$

Insbesondere ist die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$; seine Dimension beträgt $n - \mathrm{Rang}(A)$.

(ii) *Ist $s \in \mathbb{K}^n$ eine "spezielle" Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, so ist die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ gegeben durch*

$$\{s + v;\ v \in \mathbb{K}^n,\ A \cdot v = 0\} \;=\; s + \mathrm{Kern}(\mu_A) \;=\; \mu_A^{-1}(b).$$

Beweis. Zu (i) die Charakterisierung der Lösungsmenge ist offensichtlich. Weiter gilt $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(\mu_A))$, siehe Satz 5.2.3. Mit der Dimensionsformel 4.1.11 erhalten wir daher $\dim(\mathrm{Kern}(\mu_A)) = n - \mathrm{Rang}(A)$.

Zu (ii). Wir charakterisieren zunächst den Sachverhalt, dass ein Vektor $s' \in \mathbb{K}^n$ Lösung des Systems $A \cdot x = b$ ist: Es gilt

$$A \cdot s' = b \iff \mu_A(s') = b \iff s' \in \mu_A^{-1}(b).$$

Wir zeigen nun, dass $\mu_A^{-1}(b) = s + \mathrm{Kern}(\mu_A)$ gilt. Zur Inklusion "$\subseteq$". Ist $s' \in \mu_A^{-1}(b)$ gegeben, so erhalten wir mit $v := s' - s$:

$$\mu_A(v) \;=\; \mu_A(s' - s) \;=\; \mu_A(s') - \mu_A(s) \;=\; b - b \;=\; 0.$$

Das bedeutet $v \in \mathrm{Kern}(\mu_A)$. Weiter gilt $s' = s + v$. Folglich erhalten wir $s' \in s + \mathrm{Kern}(\mu_A)$.

Zur Inklusion "$\supseteq$". Ist $s' \in s + \mathrm{Kern}(\mu_A)$ gegeben, so gilt $s' = s + v$ mit einem $v \in \mathrm{Kern}(\mu_A)$. Es folgt $s' \in \mu_A^{-1}(b)$, denn wir haben

$$\mu_A(s') \;=\; \mu_A(s + v) \;=\; \mu_A(s) + \mu_A(v) \;=\; \mu_A(s) \;=\; b.$$

□

Beispiel 5.3.4. Die Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichung $x_1 - x_2 = 0$ ist eine Ursprungsgerade und die Lösung der Gleichung $x_1 - x_2 = -1$ ist eine affine Gerade.

Satz 5.3.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ ist lösbar.*
(ii) *Der Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ liegt im Spaltenraum $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n})$ von A.*
(iii) *Der Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ liegt im Bild der Abbildung $\mu_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$.*
(iv) *Für $(A,b) := (A_{*1}, \ldots, A_{*n}, b)$ gilt $\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A)$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Es sei $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $A{\cdot}x = b$. Dann erhalten wir

$$b \;=\; A{\cdot}s \;=\; s_1{\cdot}A_{*1} + \ldots + s_n{\cdot}A_{*n} \;\in\; \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}).$$

Zu "(ii)⇒(i)". Liegt der Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ im Spaltenraum von A, so hat man eine Darstellung

$$b \;=\; s_1{\cdot}A_{*1} + \ldots + s_n{\cdot}A_{*n}$$

mit $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{K}$. Mit $s := (s_1, \ldots, s_n)$ erhält man $A{\cdot}s = b$, d.h., $s \in \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung das Systems $A{\cdot}x = b$.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist klar, denn es gilt $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}) = \mu_A(\mathbb{K}^n)$, siehe Satz 5.2.3.

Zu "(ii)⇒(iv)". Gilt $b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n})$, so stimmen die beiden Untervektorräume $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n})$ und $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}, b)$ von $\mathbb{K}^m$ überein. Es folgt $\mathrm{SpRang}(A,b) = \mathrm{SpRang}(A)$.

Zu "(iv)⇒(ii)". Offenbar gilt $\mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}) \subseteq \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n}, b)$. Weiter besitzen beide Vektorräume die Dimension $\mathrm{SpRang}(A) = \mathrm{SpRang}(A,b)$. Folglich stimmen sie überein, siehe Satz 3.4.12. Insbesondere gilt $b \in \mathrm{Lin}(A_{*1}, \ldots, A_{*n})$. □

Folgerung 5.3.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Gilt $\mathrm{Rang}(A) = m$, so ist das lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ lösbar.*

Satz 5.3.7. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ eine Matrix $b \in \mathbb{K}^m$, und $(A,b) := (A_{*1}, \ldots, A_{*n}, b)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ ist eindeutig lösbar.*
(ii) *Es gilt $\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A) = n$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Nach Satz 5.3.5 gilt $\mathrm{Rang}(A,b) = \mathrm{Rang}(A)$. Weiter ist die Lösungsmenge nach Satz 5.3.3 gegeben durch $s + \mathrm{Kern}(\mu_A)$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit muss daher $\mathrm{Kern}(\mu_A) = \{0\}$ gelten. Das bedeutet $\mathrm{Rang}(A) = n$, siehe Satz 5.3.3.

Zu "(ii)⇒(i)". Nach Satz 5.3.5 besitzt das System $A{\cdot}x = b$ eine Lösung s, und nach Satz 5.3.3 ist die Lösungsmenge gegeben durch $s + \mathrm{Kern}(\mu_A)$. Wegen $\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt $\mathrm{Kern}(\mu_A) = \{0\}$, siehe Satz 5.3.3. Das impliziert eindeutige Lösbarkeit. □

Folgerung 5.3.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Gilt $\mathrm{Rang}(A) = n$, so ist das lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ eindeutig lösbar und die Lösung ist gegeben durch $s := A^{-1}{\cdot}b$.*

Beweis. Nach Satz 5.3.7 ist $A{\cdot}x = b$ eindeutig lösbar. Weiter ist $s \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $A{\cdot}x = b$, denn wir haben

$$A \cdot s \;=\; A \cdot (A^{-1} \cdot b) \;=\; (A \cdot A^{-1}) \cdot b \;=\; E_n \cdot b \;=\; b.$$

□

Beispiel 5.3.9. Besitzt die Matrix A normierte Zeilenstufenform, so lassen sich die Lösungen von $A{\cdot}x = b$ direkt ablesen. Etwa für

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist das zugehörige lineare Gleichungssystem konkret gegeben durch

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1, \\ & & & & 0x_3 & = & 0. \end{array}$$

Der Parameter x_3 ist frei wählbar, und für die Parameter x_2 sowie x_1 erhalten wir sukkzessive folgende Bedingungen:

$$x_3 \;=\; x_3, \qquad x_2 \;=\; -1 + 2x_3, \qquad x_1 \;=\; 1 + x_2 - x_3 \;=\; 1 + -1 + 2x_3 - x_3 \;=\; x_3.$$

Das beschreibt bereits die Lösungsmenge L des Systems $A{\cdot}x = b$; besonders übersichtlich präsentiert man das Ergebnis in folgender Form

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Satz 5.3.10. *Es seien $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ eine Matrix A in normierter Zeilenstufenform, d.h., es gelte*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ & \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit r Pivotspalten $A_{*j_1}, \ldots, A_{*j_r}$, wobei $a_{ij_k} = 1$ für $1 \le k \le r$. Weiter sei $b \in \mathbb{K}^m$. Dann gilt:

(i) *Das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt einen $(n-r)$-dimensionalen Lösungsraum; die Lösungen sind explizit gegeben durch*

$$\begin{array}{rcl} x_{j_r} & = & -a_{rj_r+1}x_{j_r+1} - \;\ldots\; - a_{rn}x_n \\ x_{j_{r-1}} & = & -a_{r-1j_{r-1}+1}x_{j_{r-1}+1} - \;\ldots\; - a_{r-1n}x_n \\ & \vdots & \\ x_{j_1} & = & -a_{1j_1+1}x_{j_1+1} - \;\ldots\; - a_{1n}x_n. \end{array}$$

(ii) *Das inhomogene lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ gilt; eine spezielle Lösung $s \in \mathbb{K}^n$ ist dann gegeben durch*

$$\begin{aligned} s_j &:= 0 \text{ für } j \neq j_1, \ldots, j_r \\ s_{j_r} &:= b_r \\ s_{j_{r-1}} &:= b_{r-1} - a_{r-1 j_r} s_{j_r} \\ &\vdots \\ s_{j_1} &= b_1 - a_{1j_2} s_{j_2} - \ \ldots \ - a_{1j_r} s_{j_r}. \end{aligned}$$

Satz 5.3.11. *Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Ist $S \in \mathrm{Mat}(m,m;\mathbb{K})$ invertierbar, so gilt für jedes $s \in \mathbb{K}^n$:*

$$A \cdot s \ = \ b \ \iff \ (S \cdot A) \cdot s \ = \ S \cdot b.$$

Mit anderen Worten: Die beiden Gleichungssysteme $A{\cdot}x = b$ und $(S{\cdot}A){\cdot}x = S{\cdot}b$ besitzen dieselbe Lösungsmenge.

Beweis. Gilt $A{\cdot}x = b$, so erhalten wir daraus $(S{\cdot}A){\cdot}x = S{\cdot}b$ durch Anwenden von S. Gilt $(S{\cdot}A){\cdot}x = S{\cdot}b$, so erhalten wir daraus $A{\cdot}x = b$ durch Anwenden von S^{-1}. □

Bemerkung 5.3.12. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Das lineare Gleichungssystem $A{\cdot}x = b$ kann man konkret wie folgt lösen:

(i) Man bringt A durch Anwenden von Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_k$ auf normierte Zeilenstufenform $A' = S \cdot A$, wobei $S = S_1 \cdots S_k$, und bestimmt $b' = S \cdot b$.

(ii) Man bestimmt mit Satz 5.3.10 die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A'{\cdot}x = b'$; diese ist nach Satz 5.3.11 auch die Lösungsmenge von $A{\cdot}x = b$.

In der Praxis verfährt man in Schritt (i) am besten wie folgt: Man bildet die Matrix (A,b) und bringt durch elementare Zeilenoperationen an (A,b) den Block A auf Zeilenstufenform. Das Resultat ist eine Matrix (A',b'); diese enthält die gesuchten Daten, denn es gilt

$$(A', b') \ = \ S{\cdot}(A,b) \ = \ (S{\cdot}A, S{\cdot}b).$$

Beispiel 5.3.13. Wir betrachten das lineare Gleichungsystem $A{\cdot}x = b$ über $\mathbb{Q}$, wobei A und b definiert sind als

$$A \ := \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b \ := \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schritt (i) des Verfahrens 5.3.12 verläuft in diesem Fall wie folgt:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \ &\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(-1;1,2)} \ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\mathrm{ZOp}(1;2,3)} \ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir die gesuchten Daten (A', b') bestimmt; es gilt

$$A' \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b' \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge L des Systems $A' \cdot x = b'$ hatten wir bereits in Beispiel 5.3.9 berechnet; sie ist gegeben durch

$$L \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Nach Bemerkung 5.3.12 (ii) ist L auch die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$; durch Einsetzen kann man sich auch direkt davon überzeugen.

Aufgaben zu Abschnitt 5.3.

Aufgabe 5.3.14. Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x_4 - x_5 &= -1, \\ x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3.15. Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_2 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3.16. Es seien Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(m, k; \mathbb{K})$ gegeben. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{K})$ mit $A \cdot X = B$.
(ii) Es gilt $\mathrm{Rang}(A, B) = \mathrm{Rang}(A)$.

6. Die Determinante

6.1. Permutationen.

Konstruktion 6.1.1 (Permutationen)**.** Für eine beliebige Menge X betrachten wir die Menge ihrer *Permutationen*, d.h., ihrer bijektiven Selbstabbildungen:

$$S(X) \quad := \quad \{\sigma\colon X \to X;\ \sigma \text{ ist bijektiv}\}.$$

Die Hintereinanderausführung von Abbildungen definiert eine Verknüpfung auf der Menge $S(X)$ der Permutationen:

$$S(X) \times S(X) \ \to \ S(X), \qquad (\sigma, \tau) \ \mapsto \ \sigma \circ \tau.$$

Satz 6.1.2. *Es sei X eine Menge. Dann ist $(S(X), \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element id_X und das Inverse zu einer Permutation $\sigma \in S(X)$ ist ihre Umkehrabbildung $\sigma^{-1} \in S(X)$.*

Beweis. Nach Satz 1.3.8 ist die Verknüpfung "$\circ$" assoziativ. Offensichtlich ist id_X dabei ein neutrales Element. Weiter besitzt jedes $\sigma \in S(X)$ als bijektive Abbildung nach Satz 1.3.13 eine Umkehrabbildung $\sigma^{-1} \in S(X)$ und diese ist das Inverse zu σ bezüglich der Verknüpfung "$\circ$". □

Beispiel 6.1.3. Ein wichtiger Spezialfall ist die *symmetrische Gruppe S_n*, d.h., die Permutationsgruppe der n-elementigen Menge $X_n := \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$S_n \quad := \quad S(X_n).$$

Schreibweise 6.1.4. Eine bewährte Schreibweise für die Elemente von S_n sei am Beispiel $n = 3$ vorgeführt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{X_3} \ = \ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3, \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3, \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1, \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 2, \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1, \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} : \quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2.
\end{aligned}$$

Weiter gibt es spezielle Elemente in S_n, sogennante *Transpositionen*, die lediglich zwei Elemente von X_n, sagen wir i und j vertauschen; für diese ist folgende Schreibweise üblich:

$$(i, j)\colon X_n \ \to \ X_n, \qquad i \mapsto j,\ j \mapsto i,\ k \mapsto k \text{ für } k \neq i, j.$$

Bemerkung 6.1.5. Für jede Transposition $(i, j) \in S_n$ gilt $(i, j)^{-1} = (i, j)$ und $(i, j) = (j, i)$.

Satz 6.1.6. *Die symmetrische Gruppe S_n besitzt genau $n!$ Elemente.*

Beweis. Wir beschränken uns auf eine anschauliche Begründung. Die möglichen Elemente der Gruppe S_n sind von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau einmal unter den $a_1, \ldots, a_n$ vorkommt.

Jetzt kann man abzählen: Für die Wahl von a_1 hat man n Möglichkeiten. Ist a_1 gewählt, so verbleiben $n-1$ Möglichkeiten für die Wahl von a_2, usw.. Bei der Wahl von a_{n-1} gibt es dann noch 2 Möglichkeiten und a_n steht fest. Insgesamt erhält man also $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten. $\square$

Bemerkung 6.1.7. Die Gruppen S_1 und S_2 sind abelsch. Die Gruppe S_3 ist nicht abelsch: Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 6.1.8. Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Das *Signum* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist definiert als

$$\mathrm{sg}(\sigma) \quad := \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Beispiel 6.1.9. Für die Elemente von S_3 erhalten wir:

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(2-1)(3-1)(3-2)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad 1,$$

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(1-2)(3-2)(3-1)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad -1,$$

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(2-3)(1-3)(1-2)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad -1,$$

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(3-1)(2-1)(2-3)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad -1,$$

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(3-2)(1-2)(1-3)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad 1,$$

$$\mathrm{sg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{(1-3)(2-3)(2-1)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad 1.$$

Definition 6.1.10. Ein *Fehlstand* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Paar i, j von Elementen aus X_n mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Satz 6.1.11. *Es seien $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $\sigma \in S_n$. Bezeichnet $m(\sigma)$ die Zahl der Fehlstände von σ, so gilt*

$$\mathrm{sg}(\sigma) \quad = \quad (-1)^{m(\sigma)}.$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j} \sigma(j) - \sigma(i) \quad &= \quad \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \sigma(j) - \sigma(i) \ \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j) - \sigma(i) \\
&= \quad (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} -\sigma(j) + \sigma(i) \ \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j) - \sigma(i) \\
&= \quad (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\substack{j<i \\ \sigma(j)>\sigma(i)}} -\sigma(i) + \sigma(j) \ \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j) - \sigma(i) \\
&= \quad (-1)^{m(\sigma)} \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \sigma(j) - \sigma(i) \\
&= \quad (-1)^{m(\sigma)} \prod_{i<j} j - i.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 6.1.12. Es seien $1 \le k < l \le n$ gegeben, und es sei $\sigma := (k,l) \in S_n$ die zugehörige Transposition. Dann sind die Fehlstände von σ gegeben durch

$$k,l, \qquad k,j, \text{ wobei } j = k+1,\ldots,l-1, \qquad i,l, \text{ wobei } i = k+1,\ldots,l-1.$$

Insbesondere ist die Anzahl der Fehlstände ungerade. Daher gilt $(-1)^{m(\sigma)} = -1$, und wir erhalten $\mathrm{sg}(\sigma) = -1$.

Satz 6.1.13. *Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$. Dann definiert das Signum einen surjektiven Homomorphismus von S_n auf die multiplikative Gruppe $\{\pm 1\}$:*

$$\mathrm{sg}\colon S_n \ \to\ \{\pm 1\}, \qquad \sigma \ \mapsto\ \mathrm{sg}(\sigma).$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{sg}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sg}(\sigma)\mathrm{sg}(\tau)$ für je zwei Permutationen $\tau, \sigma \in S_n$ gilt. Das folgt aus

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{j-i} \ = \ \prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

und

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \ &= \ \prod_{\substack{i<j \\ \tau(i)<\tau(j)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \prod_{\substack{i<j \\ \tau(i)>\tau(j)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \\
&= \ \prod_{\substack{i<j \\ \tau(i)<\tau(j)}} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \prod_{\substack{j<i \\ \tau(j)>\tau(i)}} \frac{\sigma\circ\tau(i) - \sigma\circ\tau(j)}{\tau(i)-\tau(j)} \\
&= \ \prod_{\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma\circ\tau(j) - \sigma\circ\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \\
&= \ \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i}.
\end{aligned}$$

□

Definition 6.1.14. Es sei $(G,*)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G, in Zeichen $H \le G$, falls Folgendes gilt:

$$e_G \in H, \qquad h_1, h_2 \in H \ \Rightarrow\ h_1 * h_2 \in H, \qquad h \in H \ \Rightarrow\ h^{-1} \in H.$$

Bemerkung 6.1.15. Es sei $(G,*)$ eine Gruppe. Dann ist jede Untergruppe $H \le G$ zusammen mit der Verknüpfung $(h_1, h_2) \mapsto h_1 * h_2$ eine Gruppe; das neutrale Element ist dabei $e_H = e_G$.

Bemerkung 6.1.16. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist der Kern $\varphi^{-1}(e_H)$ eine Untergruppe von G.

Definition 6.1.17. Die *alternierende Gruppe* in S_n ist die Untergruppe

$$A_n \ := \ \mathrm{Kern}(\mathrm{sg}) \ = \ \{\sigma \in S_n;\ \mathrm{sg}(\sigma) = 1\} \ \le \ S_n.$$

Satz 6.1.18. *Es sei $\tau \in S_n$ eine Transposition und $A_n \circ \tau := \{\sigma \circ \tau;\ \sigma \in A_n\}$. Dann hat man eine Zerlegung*

$$S_n \ = \ A_n \cup A_n \circ \tau \quad \textit{mit} \quad A_n \cap A_n \circ \tau \ = \ \emptyset.$$

Dabei enthalten A_n und $A_n \circ \tau$ genau gleichviele Elemente; insbesondere besitzt A_n genau $n!/2$ Elemente.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ gilt. Dazu sei $\sigma \in S_n$ gegeben. Gilt $\mathrm{sg}(\sigma) = 1$, so haben wir $\sigma \in A_n$. Für den Fall $\mathrm{sg}(\sigma) = -1$ liefern Satz 6.1.12 und Beispiel 6.1.13, dass $\sigma \circ \tau \in A_n$ gilt. Es folgt

$$\sigma \;=\; \sigma \circ (\tau \circ \tau) \;=\; (\sigma \circ \tau) \circ \tau \;\in\; A_n \circ \tau.$$

Weiter ist klar, dass $A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset$ gilt, denn die Elemente von A_n besitzen Signum 1, wohingegen die aus $A_n \circ \tau$ das Signum -1 besitzen.

Es bleibt zu zeigen, dass A_n und $A_n \circ \tau$ gleichviele Elemente besitzen. Dazu betrachten wir die beiden Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} A_n & \longleftrightarrow & A_n \circ \tau \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \tau \\ \kappa \circ \tau & \leftarrow\!\shortmid & \kappa \end{array}$$

Diese sind offensichtlich invers zueinander. Folglich besitzen die Mengen A_n und $A_n \circ \tau$ gleich viele Elemente. □

Aufgaben zu Abschnitt 6.1.

Aufgabe 6.1.19. Berechne das Signum folgender Permutationen in S_9:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$,

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$,

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 6.1.20 (Kleinsche Vierergruppe)**.** Zeige, dass die folgende Teilmenge eine Untergruppe von S_4 ist:

$$V_4 \quad := \quad \{\mathrm{id}_{X_4},\, (1,2)\circ(3,4),\, (1,3)\circ(2,4),\, (1,4)\circ(2,3)\}\,.$$

Aufgabe 6.1.21. Beweise Bemerkung 6.1.15: Es sei $(G,*)$ eine Gruppe. Dann ist jede Untergruppe $H \le G$ zusammen mit der Verknüpfung $(h_1,h_2)\mapsto h_1 * h_2$ eine Gruppe; das neutrale Element ist dabei $e_H = e_G$.

Aufgabe 6.1.22. Beweise Bemerkung 6.1.16: Ist $\varphi\colon G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist der Kern $\varphi^{-1}(e_H)$ eine Untergruppe von G.

Aufgabe 6.1.23. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ die Standardbasis für $\mathbb{K}^n$ und S_n die symmetrische Gruppe. Beweise folgende Aussagen:

(i) Zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\varphi_\sigma\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit
$$\varphi_\sigma(e_i) \;=\; e_{\sigma(i)} \qquad \text{für } 1\le i\le n.$$
Für je zwei Permutationen $\sigma,\tau\in S_n$ gilt dabei
$$\varphi_{\sigma\circ\tau} \;=\; \varphi_\sigma\circ\varphi_\tau.$$

(ii) Die darstellende Matrix A_σ von φ_σ bezüglich der Standardbasis ist invertierbar und man hat
$$A_\sigma \;=\; M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi_\sigma) \;=\; (e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}).$$
Für je zwei Permutationen $\sigma,\tau\in S_n$ gilt dabei
$$A_{\sigma\circ\tau} \;=\; A_\sigma\cdot A_\tau.$$

(iii) Die Abbildung $S_n\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\sigma\mapsto A_\sigma$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 6.1.24. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zu $\sigma\in S_n$ sei $A_\sigma := (e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ die zugehörige *Permutationsmatrix*. Beweise folgende Aussagen:

(i) Jede Permutationsmatrix A_σ ist ein Produkt von Elementarmatrizen $E(n;i,j)$.
(ii) Jede Permutation $\sigma\in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 6.1.25. Zeige, dass die Gruppen A_2 und A_3 abelsch sind, und dass A_n für $n\ge 4$ nicht abelsch ist.

6.2. **Determinanten.**

Definition 6.2.1. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. Die *Determinante* von A ist definiert als

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} \;\in\; \mathbb{K}.$$

Beispiel 6.2.2. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{K})$. Zur Berechung von $\det(A)$ vermerken wir zunächst, dass $S_2 = \{\mathrm{id},(1,2)\}$ gilt. Damit erhält man

$$\det(A) \;=\; \sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Satz 6.2.3. *Die Abbildung* $\det\colon \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ *besitzt folgende Eigenschaften:*

(D1) $\det$ *ist linear in jeder Zeile, d.h., ist eine Zeile einer Matrix A eine Linearkombination zweier Vektoren, etwa $A_{i*} = b\cdot B_{i*} + c\cdot C_{i*}$, so gilt*

$$\det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ b\cdot B_{i*} + c\cdot C_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \;=\; b\det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ B_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} \;+\; c\det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i-1*} \\ C_{i*} \\ A_{i+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}.$$

(D2) $\det$ *ist alternierend, d.h., besitzt eine Matrix A zwei identische Zeilen, etwa $A_{i*} = A_{j*}$ mit $i \neq j$, so gilt* $\det(A) = 0$.

(D3) $\det$ *ist normiert, d.h., für die $(n\times n)$-Einheitsmatrix E_n gilt* $\det(E_n) = 1_{\mathbb{K}}$.

Beweis. Zu (D1). Für ein gegebenes i sei $a_{ij} = bb_{ij} + cc_{ij}$, wobei $1 \le j \le n$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(A) \;&=\; \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots(bb_{i\sigma(i)} + cc_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&=\; b\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad\; + c\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots c_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Zu (D2). Es sei $\tau := (i,j)$ die Transposition, welche i und j vertauscht. Nach Satz 6.1.18 ist S_n die disjunkte Vereinigung von A_n und $A_n \circ \tau$. Das bedeutet

$$\begin{aligned}
\det(A) \;&=\; \sum_{\sigma\in A_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in A_n} \mathrm{sg}(\sigma\circ\tau)\cdot a_{1\sigma\circ\tau(1)}\cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)} \\
&=\; \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma\circ\tau(1)}\cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Eigenschaft (D2), denn wegen $A_{i*} = A_{j*}$ gilt stets $a_{i\sigma(i)} = a_{j\sigma(i)}$ sowie $a_{j\sigma(j)} = a_{i\sigma(j)}$ und es folgt

$$\begin{aligned}
a_{1\sigma\circ\tau(1)}\cdots a_{i\sigma\circ\tau(i)}\cdots a_{j\sigma\circ\tau(j)}\cdots a_{n\sigma\circ\tau(n)} \;&=\; a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{j\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&=\; a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&=\; a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Zu (D3). Diese Eigenschaft erhält man direkt durch Einsetzen in die Definition: Es sei $E_n = (e_{ij})$. Dann gilt

$$\det(E_n) \;=\; \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sg}(\sigma)\cdot e_{1\sigma(1)}\cdots e_{n\sigma(n)} \;=\; e_{11}\cdots e_{nn} \;=\; 1_{\mathbb{K}}.$$

□

Satz 6.2.4. *Es sei* $\delta\colon \operatorname{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1) und (D2) aus Satz 6.2.3, und es sei* $A \in \operatorname{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *eine Matrix mit Zeilen* $A_{1*},\ldots,A_{n*}$.

(i) *Die Abbildung* δ *ist invariant unter Zeilenoperationen vom Typ (i), d.h., es gilt stets*

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}+\lambda\cdot A_{j*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} \;=\; \delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix}.$$

(ii) *Bei einer Zeilenoperation vom Typ (ii) ändert* δ *das Vorzeichen, d.h., es gilt stets*

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} \;=\; -\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix}.$$

(iii) *Bei einer Zeilenoperation vom Typ (iii) ändert sich* δ *um den Skalierungsfaktor, d.h., es gilt stets*

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ \lambda\cdot A_{i*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} \;=\; \lambda\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix}.$$

Diese Aussagen gelten insbesondere für die Determinante $\det\colon \operatorname{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$.

Beweis. Aussage (iii) ist eine direkte Folgerung aus Linearität in der i-ten Zeile. Zu (i). Es gilt

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}+\lambda\cdot A_{j*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} + \lambda\delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots\\ A_{i*}\\ \vdots\\ A_{j*}\\ \vdots\\ A_{n*}\end{pmatrix}.$$

Zu (ii). Unter Verwendung von (i) und (iii) erhalten wir

$$\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*}+A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*}+A_{j*} \\ \vdots \\ -A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ -A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix} = -\delta\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}.$$

□

Folgerung 6.2.5. *Die Determinanten der Elementarmatrizen sind gegeben durch*

$$\det(E(n;\lambda;j,i)) \;=\; 1, \qquad \det(E(n;i,j)) \;=\; -1, \qquad \det(E(n;\lambda;i)) \;=\; \lambda.$$

Beweis. Nach Definition entstehen die Elementarmatrizen durch elementare Zeilenoperationen aus der Einheitsmatrix:

$$E(n;\lambda;j,i) \;=\; \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i+\lambda\cdot e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad E(n;i,j) \;=\; \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad E(n;\lambda;i) \;=\; \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda\cdot e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Beachtet man nun noch, dass $\det(E_n) = 1$ gilt, so ergibt sich die Behauptung als direkte Anwendung von Satz 6.2.4 mit $\delta = \det$. □

Folgerung 6.2.6. *Es sei* $\delta\colon \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1) und (D2) aus Satz 6.2.3, und es sei* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \delta(E(n;\lambda;j,i)\cdot A) &= \delta(A) &&= \det(E(n;\lambda;j,i))\,\delta(A), \\ \delta(E(n;i,j)\cdot A) &= -\delta(A) &&= \det(E(n;i,j))\,\delta(A), \\ \delta(E(n;\lambda;i)\cdot A) &= \lambda\delta(A) &&= \det(E(n;\lambda;i))\,\delta(A). \end{aligned}$$

Satz 6.2.7. *Es sei* $\delta\colon \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1) und (D2) aus Satz 6.2.3.*

(i) *Ist* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *eine Matrix mit* $\mathrm{Rang}(A) < n$*, so gilt* $\delta(A) = 0_{\mathbb{K}}$.
(ii) *Es sei* $\alpha := \delta(E_n)$*. Dann gilt* $\delta(A) = \alpha\det(A)$ *für jede Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$

Beweis. Zu (i) Nach Satz 5.1.13 gibt es Elementarmatrizen $S_1,\ldots,S_k$, sodass die Matrix $B := S_k\cdots S_1\cdot A$ Zeilenstufenform besitzt. Mit Folgerung 6.2.6 erhalten wir

$$\delta(B) \;=\; \det(S_k)\cdots\det(S_1)\cdot\delta(A).$$

Wegen $\det(S_i) \neq 0_{\mathbb{K}}$ genügt es, $\delta(B) = 0_{\mathbb{K}}$ zu zeigen. Wegen $\mathrm{Rang}(A) < n$ liefert Folgerung 5.2.8, dass die letzte Zeile B_{n*} von B eine Nullzeile ist. Es folgt

$$\delta(B) \;=\; \delta\begin{pmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{n-1*} \\ B_{n*} \end{pmatrix} \;=\; \delta\begin{pmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{n-1*} \\ 0_{\mathbb{K}}\cdot B_{n*} \end{pmatrix} \;=\; 0_{\mathbb{K}}\cdot\delta\begin{pmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{n-1*} \\ B_{n*} \end{pmatrix} \;=\; 0_{\mathbb{K}}.$$

Zu (ii). Nach (i) ist nur für $\mathrm{Rang}(A) = n$ etwas zu zeigen. In diesem Fall gibt es Elementarmatrizen $S_1,\ldots,S_k$ mit $A = S_k\cdots S_1\cdot E_n$, siehe Satz 5.2.15. Mit 6.2.6 erhalten wir

$$\delta(A) \;=\; \det(S_k)\cdots\det(S_1)\cdot\delta(E_n) \;=\; \alpha\det(S_k)\cdots\det(S_1)\cdot\det(E_n) \;=\; \alpha\det(A).$$

□

Folgerung 6.2.8. *Es sei* $\delta\colon \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) aus Satz 6.2.3. Dann gilt* $\delta = \det$.

Folgerung 6.2.9. *Es sei* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathrm{Rang}(A) = n$.
(ii) A *ist invertierbar.*
(iii) A *ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*
(iv) *Es gilt* $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen haben wir bereits in Satz 5.2.15 gezeigt.

Zu "(iii)⇒(iv)". Es sei $A = S_1 \cdots S_k$ mit Elementarmatrizen S_i. Nach Folgerung 6.2.6 gilt dann $\det(A) = \det(S_1) \cdots \det(S_k)$. Folgerung 6.2.5 garantiert somit $\det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Zu "(iv)⇒(i)". Wäre $\mathrm{Rang}(A) < n$, so hätte man $\det(A) = 0_{\mathbb{K}}$ nach Satz 6.2.7 (i). Widerspruch zu (iv). □

Satz 6.2.10 (Determinantenmultiplikationssatz)**.** *Es seien* $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. *Dann gilt*

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis. Besitzt eine der beiden Matrizen A, B nicht vollen Rang, so gilt dies auch für $A \cdot B$, und die Aussage folgt mit Satz 6.2.7 (i).

Besitzen beide Matrizen vollen Rang, so hat man $A = S_1 \cdots S_k$ und $B = T_1 \cdots T_l$ mit Elementarmatrizen S_i und T_j. Die Aussage ergibt sich dann mit Folgerung 6.2.6: Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det(S_1 \cdots S_k \cdot T_1 \cdots T_l) \\ &= \det(S_1) \cdots \det(S_k) \cdot \det(T_1) \cdots \det(T_l) \\ &= \det(S_1 \cdots S_k) \cdot \det(T_1 \cdots T_l) \\ &= \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.2.11. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. *Dann hat man einen Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \ \to \ \mathbb{K}^*, \qquad A \ \mapsto \ \det(A).$$

Aufgaben zu Abschnitt 6.2.

Aufgabe 6.2.12. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zu $\sigma \in S_n$ sei $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeige: Man hat ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[r, "\sigma \mapsto A_\sigma"] \arrow[d, "\sigma \mapsto \mathrm{sg}(\sigma)"'] & \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \arrow[d, "A \mapsto \det(A)"] \\ \{\pm 1\} \arrow[r, "\pm 1 \mapsto \pm 1_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}^* \end{tikzcd}$$

Aufgabe 6.2.13. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und es seien Matrizen $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ gegeben, so dass je zwei davon kommutieren, d.h., man hat $AB = BA$, $AC = CA$, etc.. Zeige: Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad = \quad \det(A) \cdot \det(C) \; - \; \det(B) \cdot \det(C).$$

6.3. **Determinantenberechnung.**

Satz 6.3.1. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *eine Matrix und* $A^t \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *ihre Transponierte. Dann gilt*

$$\det(A^t) \quad = \quad \det(A).$$

Beweis. Es sei $A = (a_{ij})$. Wir verwenden die Definition 6.2.1 der Determinante. Zunächst machen wir uns klar, dass für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad = \quad a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Auf der linken Seite läuft das Produkt genau über die Indexpaare $(i, \sigma(i))$ mit $1 \leq i \leq n$. Diese sind genau die Indexpaare $(\sigma^{-1}(i), i)$ mit $1 \leq i \leq n$. Über letztere läuft das Produkt auf der rechten Seite.

Nach dieser Vorüberlegung können wir den Satz leicht beweisen. Mit $A^t = (a_{ji})$ und $\mathrm{sg}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sg}(\sigma)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \det(A^t).
\end{aligned}$$

□

Folgerung 6.3.2. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Dann besitzt die Determinante auf* $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Determinante ist linear in jeder Spalte und sie verschwindet für jede Matrix mit zwei identischen Spalten.*
(ii) *Bei einer Spaltenoperation vom Typ (i) ändert such die Determinante nicht.*
(iii) *Bei einer Spaltenoperation vom Typ (ii) ändert die Determinante ihr Vorzeichen.*
(iv) *Bei einer Spaltenoperation vom Typ (iii) ändert sich die Determinante um den entsprechenden Skalierungsfaktor.*

Satz 6.3.3. *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad = \quad a_{11} \cdots a_{nn},$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad = \quad a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix ist. Mit Linearität in jeder Zeile und Normiertheit der Determinante erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn} \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Wir kommen nun zu dem Fall, dass $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Gilt $a_{ii} \neq 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$, so können wir A durch Zeilenoperationen vom Typ (i) auf Diagonalgestalt B bringen, wobei B die Diagonaleinträge $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ besitzt. Nach Satz 6.2.4 ändert sich die Determinante dabei nicht, d.h., es gilt

$$\det(A) \ = \ \det(B) \ = \ a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Gilt $a_{ii} = 0$ für ein $1 \leq i \leq n$, so wählen wir i maximal mit dieser Eigenschaft. Durch Zeilenoperationen vom Typ (i) erreichen wir, dass über jedem a_{jj} mit $j > i$ alle Einträge zu Null werden. Nach Satz 6.2.4 ändert sich die Determinante dabei nicht. Nach dieser Operation ist A_{i*} eine Nullzeile, d.h., es gilt $A_{i*} = 0_{\mathbb{K}} \cdot A_{i*}$. Mit Linearität in jeder Zeile folgt

$$\det(A) \ = \ 0 \ = \ a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Für den Fall, dass A eine untere Dreiecksmatrix ist, betrachten wir die obere Dreiecksmatrix A^t und erhalten die gewünschte Aussage mit $\det(A^t) = \det(A)$, siehe Satz 6.3.1. □

Folgerung 6.3.4. *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper, und es seien Matrizen* $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{K})$ *und* $C \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ *gegeben. Dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \ = \ \det(A) \cdot \det(C).$$

Beweis. Wir bezeichnen die aus den Blöcken $A, B, 0$ und C zusammengesetzte Matrix mit D. Durch Zeilenoperationen vom Typ (i) und (ii) innerhalb der oberen n Zeilen an D bringen wir den Block A auf Zeilenstufenform A'; dabei bezeichnen wir mit l die Zahl der verwendeten Operationen vom Typ (ii) und mit B' den veränderten Block B.

Ebenso bringen wir den Block C durch Zeilenoperationen vom Typ (i) und (ii) innerhalb der unteren n Zeilen an D auf Zeilenstufenform C' und bezeichnen mit k die Zahl der verwendeten Operationen vom Typ (ii). Mit der aus $A', B', 0$ und C' zusammengesetzten Matrix D' gilt dann

$$\begin{aligned} \det(D') &= (-1)^{l+k} \det(D), \\ \det(A') &= (-1)^{l} \det(A), \\ \det(C') &= (-1)^{k} \det(C). \end{aligned}$$

Als quadratische Matrizen in Zeilenstufenform sind A' und C' insbesondere obere Dreiecksmatrizen, und somit ist auch D' eine obere Dreiecksmatrix. Satz 6.3.3 liefert dann $\det(D') = \det(A') \det(C')$. Zusammen mit den obigen Gleichungen ergibt sich daraus die Behauptung: Es gilt

$$\det(D) \ = \ (-1)^{l+k} \det(D') \ = \ (-1)^{l} \det(A')(-1)^{k} \det(C') \ = \ \det(A) \det(C).$$

□

Definition 6.3.5. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$, und für $1 \le i, j, \le n$ sei

$$A_{ij} \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K}).$$

Dann ist die *zu A komplementäre Matrix $A^\#$* definiert durch

$$A^\# \;:=\; \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \dots & \det(A_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(A_{n1}) & \dots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix}^t \;\in\; \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K}).$$

Satz 6.3.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine Matrix mit komplementärer Matrix $A^\# \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Dann gilt*

$$A^\# \cdot A \;=\; A \cdot A^\# \;=\; \det(A) \cdot E_n.$$

Lemma 6.3.7. *Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Für je zwei $1 \le i, j \le n$ gilt*

$$\det(A_{ij}) \;=\; \det(A_{*1}, \dots, A_{*j-1}, e_i, A_{*j+1}, \dots, A_{*n}).$$

Beweis. Man kann die Matrix auf der rechten Seite durch Addition von geeigneten Vielfachen der j-ten Spalte zu den anderen Spalten in die Matrix A_{ij} überführen. Die Determinante bleibt dabei erhalten. □

Beweis von Satz 6.3.6. Wir beginnen mit dem Nachweis von $A^\# \cdot A = \det(A) E_n$. Dazu sei $A^\# \cdot A = (c_{ik})$. Dann gilt für den Eintrag c_{ik}:

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \det(A_{ji}) \cdot a_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, e_j, A_{*i+1}, \dots, A_{*n}) \cdot a_{jk} \\ &= \det\left(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot e_j, A_{*i+1}, \dots, A_{*n}\right) \\ &= \det(A_{*1}, \dots, A_{*i-1}, A_{*k}, A_{*i+1}, \dots, A_{*n}) \\ &= \begin{cases} \det(A) & k = i, \\ 0 & k \ne i. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Gleichung $A \cdot A^\# = \det(A) \cdot E_n$ erhält man wie folgt: Wegen $(A_{ij})^t = (A^t)_{ji}$ gilt

$$(A^\#)^t \;=\; (\det(A_{ij})) \;=\; (\det((A_{ij})^t)) \;=\; (\det(A^t)_{ji})) \;=\; (\det(A^t)_{ij})) \;=\; (A^t)^\#.$$

Damit ergibt sich

$$A \cdot A^\# \;=\; \left((A^\#)^t \cdot A^t\right)^t \;=\; \left((A^t)^\# \cdot A^t\right)^t \;=\; \det(A^t) \cdot E_n \;=\; \det(A) \cdot E_n.$$

□

Folgerung 6.3.8 (Cramersche Regel)**.** *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Ist* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *invertierbar, so ist die Inverse von* A *gegeben durch*

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det(A)} A^{\#}.$$

Definition 6.3.9. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. Zu $1 \le i,j \le n$ definieren wir die (i,j)*-te Streichungsmatrix* von A als

$$A'_{ij} \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

d.h., die Matrix A'_{ij} entsteht aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Satz 6.3.10 (Entwicklungssatz von Laplace)**.** *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* $n \ge 2$ *und* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$*. Dann gilt*

(i) *Die Determinante von* A *lässt sich wie folgt nach der* i*-ten Zeile entwickeln:*

$$\det(A) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}).$$

(ii) *Die Determinante von* A *lässt sich wie folgt nach der* j*-ten Spalte entwickeln:*

$$\det(A) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}).$$

Lemma 6.3.11. *Es seien* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *und* $1 \le i,j \le n$*. Dann gilt* $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$.

Beweis. Durch $(i-1)$ Zeilenvertauschungen und $(j-1)$ Spaltenvertauschungen bringen wir die Matrix A_{ij} auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix}.$$

Beachtet man nun $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j}$ und verwendet Satz 6.3.4, so ergibt sich die Behauptung. □

Beweis von Satz 6.3.10. Zu (i). Nach Satz 6.3.6 gilt $A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot E_n$ mit der zu A komplementären Matrix $A^{\#}$. Also erhalten wir für $1 \le i \le n$:

$$\det(A) \;=\; (A \cdot A^{\#})_{ii} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a^{\#}_{ji} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}).$$

Zu (ii). Die Spaltenentwicklungsformel ergibt sich mit $\det(A) = \det(A^t)$ sofort aus der Zeilenentwicklungsformel. □

Bemerkung 6.3.12. Die in der Laplaceschen Entwicklungsformel auftauchenden Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ sind nach einem Schachbrettmuster über die Matrix verteilt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Will man nach einer Zeile (Spalte) entwickeln, so ist es günstig, eine Zeile (Spalte) mit vielen Nulleinträgen auszuwählen.

Bisweilen empfiehlt es sich, die Situation zuvor mit Zeilen- und Spaltenoperationen vom Typ (i) noch etwas zu verbessern, wie etwa im folgenden Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{SpOp}(2;3,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir jetzt nach der zweiten Spalte entwicklen, so erhalten wir für die Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = 5(1-7) = -30.$$

Aufgaben zu Abschnitt 6.3.

Aufgabe 6.3.13. Bestimme die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{Q})$:

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.3.14. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{Z})$, d.h., es gilt $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{Q})$ und alle Einträge von A sind ganze Zahlen. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{Z})$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.
(ii) Es gilt $\det(A) = \pm 1$.

7. Miscellanea

7.1. Direkte Zerlegungen.

Definition 7.1.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die *Summe* einer Familie von Untervektorräumen $V_1, \ldots, V_r \le_{\mathbb{K}} V$ ist definiert als

$$\sum_{i=1}^{r} V_i \;:=\; V_1 + \ldots + V_r \;:=\; \{v_1 + \ldots + v_r;\ v_i \in V_i\}.$$

Satz 7.1.2. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, \ldots, V_r \le_{\mathbb{K}} V$ eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist die Summe $\sum_{i=1}^{r} V_i$ der kleinste Untervektorraum von V, der jedes V_i enthält.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $V_1 + \ldots + V_r$ ein Untervektorraum ist. Wegen $0_V \in V_1 + \ldots + V_r$ ist (UV1) erfüllt. Zum Nachweis von (UV2) und (UV3) seien $v_i, v_i' \in V_i$ und $a \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann erhalten wir

$$(v_1 + \ldots + v_r) + (v_1' + \ldots + v_r') \;=\; (v_1 + v_1') + \ldots + (v_r + v_r') \;\in\; V_1 + \ldots + V_r,$$

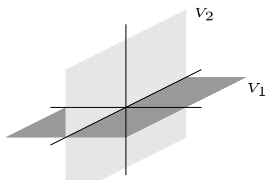
$$a\cdot(v_1 + \ldots + v_r) \;=\; a\cdot v_1 + \ldots + a\cdot v_r \;\in\; V_1 + \ldots + V_r.$$

Weiter gilt offensichtlich $V_i \subseteq V_1 + \ldots + V_r$ für alle i. Ist schließlich $U \le_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum mit $V_i \subseteq U$ für alle i, so enthält U insbesondere alle Summen $v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in V_i$. Das bedeutet

$$V_1 + \ldots + V_r \quad \subseteq \quad U.$$

$\square$

Beispiel 7.1.3. In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Untervektorräume $V_1 := \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ und $V_2 := \mathrm{Lin}(e_2, e_3)$.



Dann gilt $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, denn jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ lässt sich als Summe von Vektoren $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ schreiben, etwa

$$x \;=\; v_1 + v_2 \text{ mit } v_1 := x_1\cdot e_1 + x_2\cdot e_2 \in V_1,\ v_2 := x_3\cdot e_3 \in V_2.$$

Dabei sind $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ keineswegs durch x festgelegt. Man könnte ebensogut schreiben

$$x \;=\; v_1' + v_2' \text{ mit } v_1' := x_1\cdot e_1 \in V_1,\ v_2' := x_2\cdot e_2 + x_3\cdot e_3 \in V_2.$$

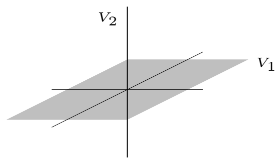
Definition 7.1.4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Unter einer *direkten Zerlegung* von V verstehen wir eine Familie $V_1, \ldots, V_r \le_{\mathbb{K}} V$ von Untervektorräumen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $V = V_1 + \ldots + V_r$.
(ii) Für jede Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ in V mit $v_i \in V_i$ gilt

$$v_1 + \ldots + v_r \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad v_1 \;=\; \ldots \;=\; v_r \;=\; 0_V.$$

Ist $V_1, \ldots, V_r \le_{\mathbb{K}} V$ eine direkte Zerlegung von V in Untervektorräume, so schreibt man auch $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ dafür und man nennt V auch die *direkte Summe* der Untervektorräume $V_1, \ldots, V_r$.

Beispiel 7.1.5. In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Untervektorräume $V_1 := \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ und $V_2 := \mathrm{Lin}(e_3)$. Dann gilt $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.



Satz 7.1.6. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, \ldots, V_r \leq_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$.*
(ii) *Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in V_i$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Wegen $V = V_1 + \ldots + V_r$ besitzt jeder Vektor $v \in V$ eine Darstellung $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in V_i$.

Um die Eindeutigkeit dieser Darstellung nachzuweisen, betrachten wir eine weitere Darstellung $v = v_1' + \ldots + v_r'$ mit $v_i' \in V_i$. Dann gilt

$$0_V \;=\; v - v \;=\; (v_1 - v_1') + \ldots + (v_r - v_r').$$

Dabei haben wir $v_i - v_i' \in V_i$. Nach Definition der direkten Zerlegung gilt $v_i - v_i' = 0_V$ und somit $v_i = v_i'$ für alle i.

Zu "(ii)⇒(i)". Da man jedes $v \in V$ als $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in v_i$ schreiben kann, gilt $V = V_1 + \ldots + V_r$. Sind weiter $v_1, \ldots, v_r \in V$ gegeben mit

$$v_1 + \ldots + v_r \;=\; 0_V,$$

so ergibt die Eindeutigkeit der Darstellung $0_V = 0_V + \ldots + 0_V$, dass $v_i = 0_V$ für alle i gelten muss. □

Definition 7.1.7. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer direkten Zerlegung in Untervektorräume

$$V \;=\; V_1 \oplus \ldots \oplus V_r.$$

Dann nennt man V_i die *i-te Komponente* von V und das $v_i \in V_i$ in der Darstellung $v = v_1 + \ldots + v_r$ aus 7.1.6 (ii) die *i-te Komponente* von $v \in V$.

Satz 7.1.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Zerlegung in Untervektorräume. Dann gibt es lineare Abbildungen*

$$P_i\colon V \;\to\; V, \qquad v \;\mapsto\; v_i, \text{ wobei } v = v_1 + \ldots + v_r \text{ mit } v_j \in V_j.$$

Für jedes i gilt $\mathrm{Bild}(P_i) = V_i$ *und* $\mathrm{Kern}(P_i) = V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r$. *Weiter hat man $P_i \circ P_i = P_i$ für jedes i.*

Beweis. Nach Satz 7.1.6 ist klar, dass die Abbildungen $P_i\colon V \to V$ wohldefiniert sind. Zur Linearität. Sind $v = v_1 + \ldots + v_r$ und $v = v_1' + \ldots + v_r'$ mit $v_j, v_j' \in V_j$ sowie $a, a' \in \mathbb{K}$ gegeben so gilt

$$a \cdot v \;+\; a' \cdot v' \;=\; a \cdot v_1 + a' \cdot v_1' \;+\; \ldots \;+\; a \cdot v_r + a' \cdot v_r',$$

d.h., wir haben damit die Komponenten von $a \cdot v + a' \cdot v'$ bestimmt. Insbesondere erhalten wir

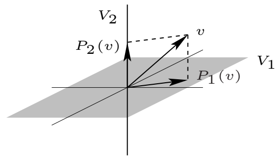
$$P_i(a \cdot v + a' \cdot v') \;=\; a \cdot v_i + a' \cdot v_i' \;=\; a \cdot P_i(v) + a' \cdot P_i(v').$$

Für jedes $v_i \in V_i$ gilt offenbar $P_i(v_i) = v_i$. Damit ergibt sich $\mathrm{Bild}(P_i) = V_i$ und $P_i \circ P_i = P_i$. Weiter hat man für jedes $v = v_1 + \ldots + v_r \in V$:

$$\begin{aligned} P_i(v) \;=\; 0_V \quad &\iff \quad v_i \;=\; 0_V \\ &\iff \quad v \;\in\; V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.1.9. Wir betrachten die direkte Zerlegung von $V := \mathbb{R}^3$ in $V = V_1 \oplus V_2$ mit $V_1 := \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ sowie $V_2 := \mathrm{Lin}(e_3)$ und die zugehörigen Projektionen



Dann haben wir die Projektionen $P_1 \colon V \to V_1$ und $P_2 \colon V \to V_2$. Für jedes $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$P_1(v) \;=\; (x_1, x_2, 0), \qquad P_2(v) \;=\; (0, 0, x_3).$$

Satz 7.1.10. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, V_2 \leq_{\mathbb{K}} V$ zwei Untervektorräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$.*
(ii) *Es gilt $V = V_1 + V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Es ist nur zu $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ etwas zu zeigen. Dazu sei $v \in V_1 \cap V_2$ gegeben. Dann gilt $v + (-v) = 0_V$ mit $v \in V_1$ und $-v \in V_2$. Das impliziert $v = 0_V$.

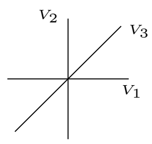
Zu "(ii)⇒(i)". Es seien $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ mit $v_1 + v_2 = 0_V$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 \;=\; 0_V \quad &\Longrightarrow \quad v_2 \;=\; -v_1 \;\in\; V_1 \\ &\Longrightarrow \quad v_2 \in V_1 \cap V_2 \\ &\Longrightarrow \quad v_2 \;=\; 0_V \\ &\Longrightarrow \quad v_1 \;=\; 0_V. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.1.11. Will man Satz 7.1.10 auf Summen von drei und mehr Untervektorräumen verallgemeinern, so genügt es nicht, mit paarweisen Durchschnitten zu arbeiten.

In $V := \mathbb{R}^2$ betrachten wir dazu die drei Geraden $V_1 := \mathbb{R}\cdot(1,0)$, $V_2 := \mathbb{R}\cdot(0,1)$ und $V_3 := \mathbb{R}\cdot(1,1)$.



Dann gilt zwar $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_i \cap V_j = \{0_V\}$ für $i \neq j$, aber es gilt nicht $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Satz 7.1.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist $P\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $P \circ P = P$, so gilt $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $V = \mathrm{Kern}(P) + \mathrm{Bild}(P)$ gilt. Für jedes $v \in V$ haben wir $v = v - P(v) + P(v)$. Wegen $P \circ P = P$ gilt

$$P(v - P(v)) \ = \ P(v) - P(P(v)) \ = \ 0_V.$$

Also erhalten wir jedes $v \in V$ als die Summe von $(v - P(v)) \in \mathrm{Kern}(P)$ und $P(v) \in \mathrm{Bild}(P)$.

Nach Satz 7.1.10 müssen wir nun nur noch $\mathrm{Kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P) = \{0_V\}$ zeigen. Dazu sei $v \in \mathrm{Kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P)$ gegeben. Dann gilt einerseits $P(v) = 0_V$ und andererseits $v = P(w)$ mit einem $w \in V$. Damit ergibt sich

$$0_V \ = \ P(v) \ = \ P(P(w)) \ = \ P(w) \ = \ v.$$

$\square$

Bemerkung 7.1.13. Ohne die Voraussetzung $P \circ P = P$ ist Satz 7.1.12 im allgemeinen nicht richtig: Für die Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}^2, \qquad (x_1, x_2) \ \mapsto \ (x_2, 0)$$

hat man $P \circ P = 0$ und es gilt $\mathrm{Kern}(P) \ = \ \mathrm{Bild}(P) \ = \ \mathbb{R}\cdot(1,0)$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^2$ nicht die direkte Summe aus $\mathrm{Kern}(P)$ und $\mathrm{Bild}(P)$.

Satz 7.1.14. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es gelte $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit Untervektorräumen $V_i \leq_{\mathbb{K}} V$. Sind $\mathcal{B}_i = (v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i)$ Basen für V_i, so ist*

$$\mathcal{B} \ := \ (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \ = \ (v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{n_r}^r)$$

eine Basis für V. Insbesondere ist die Dimension von $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ gegeben durch

$$\dim(V) \ = \ \dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_r) \ = \ \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_r).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem für V ist. Jedes $v \in V$ können wir schreiben als $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in V_i$. Jedes v_i besitzt seinerseits eine Darstellung $v_i = \sum a_j^i \cdot v_j^i$. Damit ergibt sich

$$v \ = \ v_1 + \ldots + v_r \ = \ \sum a_j^1 \cdot v_j^1 + \ldots + \sum a_j^r \cdot v_j^r \ \in \ \mathrm{Lin}(\mathcal{B}).$$

Zur linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$. Wir betrachten eine beliebige Darstellung des Nullvektors als Linearkombination über $\mathcal{B}$:

$$0_V \ = \ \sum a_j^1 \cdot v_j^1 \ + \ \ldots \ + \ \sum a_r^1 \cdot v_r^1.$$

Jeder Anteil $v_i := \sum a_j^i \cdot v_j^i$ liegt in V_i. Wegen $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ erhalten wir $v_i = 0_V$. Die lineare Unabhängigkeit der $\mathcal{B}_i$ impliziert nun $a_j^i \ = \ 0_{\mathbb{K}}$ für alle i, j. $\square$

Satz 7.1.15. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Zerlegung eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V in Untervektorräume, $\mathcal{B}_i = (v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i)$ Basen für V_i und*

$$\mathcal{B} \;:=\; (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \;=\; (v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{n_r}^r)$$

die daraus zusammengesetzte Basis für V. Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(V_i) \subseteq V_i$. Dann hat man lineare Abbildungen

$$\varphi_i\colon V_i \;\to\; V_i, \qquad v \;\mapsto\; \varphi(v)$$

und die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist von Blockdiagonalgestalt:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{\mathcal{B}_r}^{\mathcal{B}_r}(\varphi_r) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition 4.3.5 der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 7.1.

Aufgabe 7.1.16. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, \ldots, V_r \le_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Zeige: Es gilt

$$V_1 + \ldots + V_r \quad = \quad \mathrm{Lin}(V_1 \cup \ldots \cup V_r).$$

Aufgabe 7.1.17. Es sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit den punktweisen Verknüpfungen), und es seien

$$\begin{aligned} V^+ \quad &:= \quad \{f \in V;\ f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}, \\ V^- \quad &:= \quad \{f \in V;\ f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Zeige: Die Teilmengen $V^+, V^- \subseteq V$ sind Untervektorräume, und es gilt $V = V^+ \oplus V^-$.

Aufgabe 7.1.18. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $v_i \neq 0$ für $1 \le i \le n$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis für V.
(ii) Es gilt $V = \mathbb{K}{\cdot}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}{\cdot}v_n$.

Aufgabe 7.1.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k\colon V \to V$ lineare Abbildungen mit

$$\varphi_j \circ \varphi_i = 0 \text{ falls } i \neq j, \qquad \varphi_1 + \ldots + \varphi_k = \mathrm{id}_V.$$

Zeige: Es gilt

$$V \quad = \quad \varphi_1(V) \ \oplus \ \ldots \oplus \ \varphi_k(V).$$

7.2. **Quotientenvektorräume.**

Definition 7.2.1. Es sei X eine Menge. Eine *Relation* auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Man schreibt $x \sim y$, falls $(x, y) \in R$ gilt.

Beispiel 7.2.2. Es sei X eine Menge. Dann ist die Diagonale $\Delta = \{(x, x);\ x \in X\}$ eine Relation auf X. Es gilt $x \sim y \iff x = y$.

Definition 7.2.3. Es sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf X ist eine Relation $R \subseteq X \times X$ mit folgenden Eigenschaften

(i) R ist *reflexiv*, d.h., es gilt $x \sim x$ für alle $x \in X$.
(ii) R ist *symmetrisch*, d.h., es gilt $x \sim y \implies y \sim x$ für alle $x, y \in X$.
(iii) R ist *transitiv*, d.h., es gilt $x \sim y$ und $y \sim z \implies x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$.

Beispiel 7.2.4. Es sei X eine Menge. Dann ist die Gleichheit “$x = y$” eine Äquivalenzrelation auf X.

Beispiel 7.2.5. Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dann erhält man eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ durch

$$a \sim_n b \quad :\iff \quad n \text{ teilt } a - b.$$

Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, und die Transitivität erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} a \sim_n b,\ b \sim_n c \quad &\implies \quad n|(a-b),\ n|(b-c), \\ &\implies \quad n|((a-b)+(b-c)). \\ &\implies \quad n|(a-c). \end{aligned}$$

Definition 7.2.6. Es sei X eine Menge, und es sei “$\sim$” eine Äquivalenzrelation auf X. Die *Äquivalenzklasse* eines Elementes $x \in X$ ist die Menge

$$[x] \quad := \quad \{x' \in X;\ x' \sim x\}.$$

Man nennt das Element $x \in X$ auch einen *Repräsentanten* der Äquivalenzklasse $[x] \subseteq X$.

Beispiel 7.2.7. Die Äquivalenzklassen der Relation “$\sim_n$” aus Beispiel 7.2.5 sind gegeben durch

$$[0] \ = \ n\mathbb{Z}, \qquad [1] \ = \ 1 + n\mathbb{Z}, \qquad \ldots, \qquad [n-1] \ = \ (n-1) + n\mathbb{Z}.$$

Satz 7.2.8. *Es sei X eine Menge mit einer Äquivalenzrelation “$\sim$”, und es seien $x, y \in X$.*

(i) *Es gilt genau dann $[x] = [y]$ wenn $x \sim y$ gilt.*
(ii) *Es gilt entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Insbesondere erhält man die Menge X als disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen von “$\sim$”.

Beweis. Zu (i). Es gelte zunächst $[x] = [y]$. Dann hat man insbesondere $x \in [y]$. Das bedeutet $x \sim y$.

Es gelte nun $x \sim y$. Wir zeigen $[x] \subseteq [y]$. Dazu sei $z \in [x]$ gegeben. Dann haben wir $z \sim x$. Mit der Transitivität von “$\sim$” erhalten wir $z \sim y$. Das bedeutet $z \in [y]$. Das beweist $[x] \subseteq [y]$. Die Inklusion $[x] \supseteq [y]$ ergibt sich analog mit $y \sim x$.

Zu (ii). Gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Wir müssen also nur den Fall $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ behandeln. Dann gibt es ein Element $z \in [x] \cap [y]$. Das bedeutet $z \sim x$ und $z \sim y$. Mit der Symmetrie von “$\sim$” erhalten wir $x \sim z$ und $z \sim y$. Wegen der Transitivität von “$\sim$” folgt $x \sim y$. Mit (i) ergibt sich $[x] = [y]$. $\square$

Satz 7.2.9. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \le_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum. Dann definiert*

$$v \sim_U v' \quad :\iff \quad v - v' \ \in \ U$$

eine Äquivalenzrelation auf V. Die Äquivalenzklasse eines Elementes $v \in V$ ist gegeben durch

$$[v] \ = \ \{v' \in V;\ v' \sim_U v\} \ = \ v + U \ := \ \{v + u;\ u \in U\}.$$

Beweis. Zunächst müssen wir zeigen, dass durch $\sim_U$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf V definiert wird:

Zur Reflexivität. Es sei $v \in V$. Dann gilt $v - v = 0_V$. Da U ein Untervektorraum ist, haben wir $0_V \in U$. Somit ergibt sich $v \sim_U v$.

Zur Symmetrie. Es seien $v, v' \in V$ mit $v \sim_U v'$. Dann gilt $v - v' \in U$. Da U ein Untervektorraum ist, folgt $v' - v = -(v - v') \in U$. Das bedeutet $v' \sim_U v$.

Zur Transitivität. Es seien $v, v', v'' \in V$ mit $v \sim_U v'$ und $v' \sim_U v''$. Dann gilt $v - v' \in U$ und $v' - v'' \in U$. Also erhalten wir $v \sim_U v''$ mit

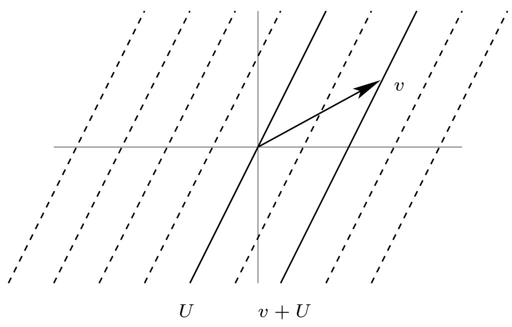
$$v - v'' \ = \ (v - v') + (v' - v'') \ \in \ U.$$

Wir zeigen nun, dass die Äquivalenzklasse eines jeden Vektors $v \in V$ durch $v + U$ gegeben ist. Es gilt

$$\begin{aligned} [v] \ &= \ \{v' \in V;\ v' - v \in U\} \\ &= \ \{v' \in V;\ v' = v + u \text{ für ein } u \in U\} \\ &= \ v + U. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.2.10. Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \mathbb{R}\cdot(1,2)$. Die Äquivalenzklassen von $\sim_U$ sind genau die Parallelen der Geraden U.



Konstruktion 7.2.11. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \le_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum und

$$V/U \ := \ V/\sim_U \ = \ \{v + U;\ v \in V\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim_U$. Dann hat man eine innere und eine äußere Verknüpfung auf V/U: Für $v + U$ und $v' + U$ sowie $a \in \mathbb{K}$ setzt man

$$(v + U) + (v' + U) \ := \ (v + v') + U, \qquad a\cdot(v + U) \ := \ (a\cdot v) + U.$$

Dadurch wird V/U zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, *dem Quotientenvektorraum* von V nach U; der Nullvektor ist $0_V + U$ und das Inverse zu $v + U$ ist $-v + U$. Weiter ist

$$\pi\colon V \ \to \ V/U, \qquad v \ \mapsto \ v + U$$

eine surjektive lineare Abbildung, und es gilt Kern$(\pi) = U$. Ist V endlichdimensional, so liefert die Dimensionsformel 4.1.11:

$$\dim(V/U) \;=\; \dim(V) - \dim(U).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Verknüpfungen auf V/U nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen, d.h., dass stets gilt

$$\begin{aligned} v+U = v_1+U,\quad v'+U = v_1'+U &\implies (v+v')+U = (v_1+v_1')+U,\\ v+U = v_1+U &\implies (a\cdot v)+U = (a\cdot v_1)+U. \end{aligned}$$

Nach Satz 7.2.8 ist dazu lediglich $(v+v') \sim_U (v_1+v_1')$ bzw. $a\cdot v \sim_U a\cdot v_1$ zu zeigen. Das folgt mit

$$(v+v')-(v_1+v_1') \;=\; (v-v_1)+(v'-v_1') \;\in\; U,$$

$$a\cdot v - a\cdot v_1 \;=\; a\cdot(v-v_1) \;\in\; U.$$

Die Vektorraumaxiome für V/U kann man leicht aus denen für V herleiten. Wir verifizieren zunächst (VR1). Zur Assoziativiät von "+": Für je drei $v, v', v'' \in V$ gilt

$$\begin{aligned} ((v+U)+(v'+U)) + (v''+U) &= ((v+v')+U) + (v''+U)\\ &= ((v+v')+v'')+U\\ &= ((v+(v'+v''))+U\\ &= (v+U) + ((v'+v'')+U)\\ &= (v+U) + ((v'+U)+(v''+U)). \end{aligned}$$

Es ist klar, dass $0_V+U \in V/U$ neutrales Element für "+" ist, und dass das Inverse zu $v+U \in V/U$ durch $(-v)+U \in V/U$ gegeben ist. Zur Kommutativität von "+": Für je zwei $v, v' \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (v+U) + (v'+U) &= (v+v')+U\\ &= (v'+v)+U\\ &= (v'+U) + (v+U). \end{aligned}$$

Wir kommen zu (VR2). Offensichtlich gilt $1_{\mathbb{K}}\cdot(v+U) = v+U$ für alle $v+U \in V/U$. Weiter haben wir für alle $v \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (a'a)\cdot(v+U) &= ((a'a)\cdot v)+U\\ &= (a'\cdot(a\cdot v))+U\\ &= a'\cdot((a\cdot v)+U)\\ &= a'\cdot(a\cdot(v+U)). \end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch die Gesetze aus (VR3) überprüfen. Für alle $v, v' \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} (a+a')\cdot(v+U) &= ((a+a')\cdot v)+U\\ &= (a\cdot v + a'\cdot v)+U\\ &= (a\cdot v+U) + (a'\cdot v+U)\\ &= a\cdot(v+U) + a'\cdot(v+U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\cdot((v+U)+(v'+U)) &= a\cdot((v+v')+U)\\ &= (a\cdot(v+v'))+U\\ &= (a\cdot v + a\cdot v')+U\\ &= (a\cdot v+U) + (a\cdot v'+U)\\ &= a\cdot(v+U) + a\cdot(v'+U). \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass die Abbildung $\pi\colon V \to V/U$ linear ist, ergibt sich direkt aus den Definitionen: Für alle $v, v' \in V$ und alle $a, a' \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \pi(a\cdot v + a'\cdot v') & = & (a\cdot v + a'\cdot v') + U \\ & = & (a\cdot v + U) + (a'\cdot v' + U) \\ & = & a\cdot(v+U) + a'\cdot(v'+U) \\ & = & a\cdot\pi(v) + a'\cdot\pi(v'). \end{array}$$

Es bleibt noch zu verifizieren, dass $\mathrm{Kern}(\pi) = U$ gilt. Das ergibt sich jedoch sofort mit

$$\begin{array}{rcl} \pi(v) \;=\; 0_{V/U} & \Longleftrightarrow & v + U \;=\; 0_V + U \\ & \Longleftrightarrow & v - 0_V \;\in\; U \\ & \Longleftrightarrow & v \;\in\; U. \end{array}$$

□

Satz 7.2.12 (Homomorphiesatz)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, und $U \leq_R V$ ein Unterverktorraum mit $U \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi\colon v\mapsto\varphi(v)"] \arrow[dr, "\pi\colon v\mapsto v+U"'] & & W \\ & V/U \arrow[ur, "\overline{\varphi}\colon v+U\mapsto\varphi(v)"'] & \end{tikzcd}$$

von wohldefinierten linearen Abbildungen. Dabei ist die Abbildung $\overline{\varphi}\colon V/U \to W$ durch $\varphi\colon V \to W$ und das obige Diagramm eindeutig bestimmt. Es gilt weiter

(i) *$\overline{\varphi}$ ist injektiv $\Leftrightarrow U = \mathrm{Kern}(\varphi)$;*
(ii) *$\overline{\varphi}$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \varphi$ ist surjektiv.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\varphi}\colon v + U \mapsto \varphi(v)$ wohldefiniert ist, d.h., nicht von der Wahl des Repräsentanten v der Klasse $v+U$ abhängt. Dazu sei $v' \in V$ mit $v' + U = v + U$. Dann gilt $v' = v + u$ mit einem $u \in U$. Wegen $U \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$ gilt $\varphi(u) = 0_W$, und es folgt

$$\varphi(v') \;=\; \varphi(v+u) \;=\; \varphi(v) + \varphi(u) \;=\; \varphi(v).$$

Nachdem wir die Wohldefiniertheit nachgewiesen haben, ist klar, dass das obige Diagramm mit diesem Ansatz für $\overline{\varphi}$ kommutativ ist. Weiter ist $\overline{\varphi}$ ein Homomorphismus: Für $v + U, v' + U \in V/U$ und $a \in \mathbb{K}$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi}((v+U)+(v'+U)) & = & \overline{\varphi}((v+v')+U) \\ & = & \varphi(v+v') \\ & = & \varphi(v)+\varphi(v') \\ & = & \overline{\varphi}(v+U)+\overline{\varphi}(v'+U), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi}(a\cdot(v+U)) & = & \varphi(a\cdot v) \\ & = & a\cdot\varphi(v) \\ & = & a\cdot\overline{\varphi}(v+U). \end{array}$$

Die Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$ ist eine Folge der Kommutativität des Diagramms: Für jede Klasse $v + U \in V/U$ haben wir $\overline{\varphi}(v+U) = \varphi(v)$, was den Homomorphismus $\overline{\varphi}$ bereits festlegt.

Wir kommen zur Charakterisierung der Injektivität. Der Homomorphismus $\overline{\varphi}$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(\overline{\varphi}) = \{0_V + U\}$ gilt. Wir müssen also zeigen:

$$\mathrm{Kern}(\overline{\varphi}) = \{0_V + U\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Kern}(\varphi) = U.$$

Zu "$\Rightarrow$". Aufgrund der Kommutativität des Diagramms erhalten wir:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) \;=\; \varphi^{-1}(0_W) \;=\; \pi^{-1}(\overline{\varphi}^{-1}(0_W)) \;=\; \pi^{-1}(\mathrm{Kern}(\overline{\varphi})) \;=\; \pi^{-1}(0_V + U) \;=\; U.$$

Zu "$\Leftarrow$". Wir erhalten $\mathrm{Kern}(\overline{\varphi}) = \{0_V + U\}$ mit

$$\overline{\varphi}(v + U) = 0_W \;\Leftrightarrow\; \varphi(v) = 0_W \quad\Longleftrightarrow\quad v \in U \quad\Longleftrightarrow\quad v + U = 0_V + U.$$

Die Charakterisierung der Surjektivität ergibt sich aus $\mathrm{Bild}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Bild}(\varphi)$. $\square$

Folgerung 7.2.13. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W \le_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen:*

$$U/(U \cap W) \;\to\; (U+W)/W, \qquad u + (U \cap W) \;\mapsto\; u + W$$

Beweis. Der Homomorphiesatz 7.2.12 liefert uns ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
 & U+W \arrow[dr, "v \mapsto v+W"] & \\
U \arrow[ur, "u \mapsto u"] \arrow[rr, "\varphi\colon u \mapsto u+W"] \arrow[dr, "\pi\colon u \mapsto u+(U\cap W)"'] & & (U+W)/W \\
 & U/(U\cap W) \arrow[ur, "\overline{\varphi}\colon u+(U\cap W) \mapsto u+W"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt offenbar $\mathrm{Kern}(\varphi) = U \cap W$. Somit ist $\overline{\varphi}$ injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{\varphi}$ surjektiv ist. Das ergibt sich aus

$$\mathrm{Bild}(\varphi) \;=\; \{u + W;\; u \in U\} \;=\; \{v + W;\; v \in U + W\} \;=\; (U+W)/W.$$

$\square$

Folgerung 7.2.14 (Dimensionsformel)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W \le_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Dann gilt*

$$\dim(U+W) \;=\; \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Beweis. Nach Folgerung 7.2.13 gilt $(U+W)/W \cong U/(U \cap W)$. Ein Vergleich der Dimensionen liefert die Behauptung: Man erhält

$$\dim(U+W) - \dim(W) \;=\; \dim(U) - \dim(U \cap W).$$

$\square$

Folgerung 7.2.15. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, V_2 \le_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$.*
(ii) *Es gilt $V = V_1 + V_2$ und $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.*

Beweis. Die Implikation "(i)$\Rightarrow$(ii)" ist ein Spezialfall von Satz 7.1.14. Zur Implikation "(ii)$\Rightarrow$(i)". Die Dimensionsformel liefert

$$\dim(V_1 \cap V_2) \;=\; \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V) \;=\; 0.$$

Das bedeutet $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Satz 7.1.10 garantiert somit eine direkte Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 7.2.

Aufgabe 7.2.16. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq_{\mathbb{K}} (V)$ ein Untervektorraum. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V mit $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap U = \{0_V\}$ und $v_{k+1}, \ldots, v_n \in U$. Zeige, dass $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ eine Basis für V/U ist.

Aufgabe 7.2.17. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen und $V_0 \leq_{\mathbb{K}} V$ sowie $W_0 \leq_{\mathbb{K}} W$ Untervektorräume. Zeige: Gilt $\varphi(V_0) \subseteq W_0$, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\psi\colon V/V_0 \to W/W_0$ mit der das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v \mapsto v + V_0"'] & W \arrow[d, "w \mapsto w + W_0"] \\ V/V_0 \arrow[r, "\psi"'] & W/W_0 \end{tikzcd}$$

Aufgabe 7.2.18. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige: Für jede Schachtelung $W \leq_{\mathbb{K}} U \leq_{\mathbb{K}} V$ von Untervektorräumen hat man einen Isomorphismus

$$V/W \Big/ U/W \;\to\; V/U, \qquad (v + W) + (U/W) \;\mapsto\; v + U$$

Aufgabe 7.2.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_1, \ldots, V_r \leq_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$.
(ii) Es gilt $V = V_1 + \ldots + V_r$ und $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0_V\}$ für jedes $1 \leq i \leq r$.
(iii) Es gilt $V = V_1 + \ldots + V_r$ und $\dim(V) = \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_r)$.

Aufgabe 7.2.20 (Ein alternativer Beweis für 7.2.14)**.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U, W \leq_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume und $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis für $U \cap W$.

(i) Zeige: Es gibt Basen $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n)$ für U und $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m)$ für W.
(ii) Zeige: Die Familie $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m)$ ist eine Basis für die Summe $U + W$,

7.3. **Basiswechsel.**

Erinnerung 7.3.1 (Koordinaten)**.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v \quad = \quad x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$$

mit dem Koordinatenvektor $x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Der Übergang zum Koordinatenvektor definiert einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen:

$$V \;\to\; \mathbb{K}^n, \qquad v \;\mapsto\; x_{\mathcal{B}}(v).$$

Satz 7.3.2 (Koordinatenberechnung)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für $\mathbb{K}^n$. Fasst man $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten einer Matrix auf, so gilt für jedes $v \in \mathbb{K}^n$:*

$$x_{\mathcal{B}}(v) \quad = \quad (v_1, \ldots, v_n)^{-1} \cdot v$$

Beweis. Nach Satz 5.2.15 ist die Matrix $(v_1, \ldots, v_n)$ invertierbar. Mit $x_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ haben wir weiter

$$v \;=\; x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n \;=\; (v_1, \ldots, v_n) \cdot x_{\mathcal{B}}(v).$$

Die Behauptung ergibt sich dann durch Anwenden der Inversen $(v_1, \ldots, v_n)^{-1}$ auf diese Gleichung. □

Erinnerung 7.3.3. Es seien $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis für W. Die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \;:=\; \big(\; x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_1)), \quad \ldots, \quad x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_n)) \;\big) \;\in\; \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$$

Die Spalten der Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ sind also die Koordinatenvektoren $x_{\mathcal{C}}(\varphi(v_j)) \in \mathbb{K}^m$ der Bilder $\varphi(v_j)$ der Basisvektoren v_j, wobei $j = 1, \ldots, n$. Weiter hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "v \,\mapsto\, x_{\mathcal{B}}(v)"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "w \,\mapsto\, x_{\mathcal{C}}(w)"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \,\mapsto\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\cdot x"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Definition 7.3.4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{B}'$ Basen für V. Dann nennt man $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ die zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ gehörige *Transformationsmatrix*.

Satz 7.3.5 (Transformationsformel für Koordinaten)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ sowie $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ Basen für V. Dann gilt für jedes $v \in V$:*

$$x_{\mathcal{B}'}(v) \quad = \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot x_{\mathcal{B}}(v).$$

Beweis. Da die Identität ein Isomorphismus ist, muss die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ invertierbar sein. Die Transformationsformel ergibt sich sofort aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "v \,\mapsto\, x_{\mathcal{B}}(v)"', "\cong"] & V \arrow[d, "\cong"', "v \,\mapsto\, x_{\mathcal{B}'}(v)"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "x \,\mapsto\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)\cdot x"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

□

Satz 7.3.6 (Transformationsmatrizenberechnung)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sowie $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Basen für $V := \mathbb{K}^n$. Dann gilt*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \quad = \quad (v'_1, \dots, v'_n)^{-1} \cdot (v_1, \dots, v_n).$$

Beweis. Nach Satz 7.3.2 ist die i-te Spalte der Transformationsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ gegeben durch

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot e_i \ = \ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \cdot x_{\mathcal{B}}(v_i) \ = \ x_{\mathcal{B}'}(v_i) \ = \ (v'_1, \dots, v'_n)^{-1} \cdot v_i.$$

Folglich haben die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ und $(v'_1, \dots, v'_n)^{-1} \cdot (v_1, \dots, v_n)$ die gleichen Spalten und stimmen somit überein. □

Satz 7.3.7 (Transformationsformel für Matrizen)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und W ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\varphi) \quad = \quad M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)^{-1}.$$

Beweis. Die Transformationsformel für die darstellenden Matrizen ergibt sich sofort aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rr, "x \mapsto M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\varphi)\cdot x"] & & \mathbb{K}^m \\
V \arrow[u, "v \mapsto x_{\mathcal{B}'}(v)"'] \arrow[d, "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"'] \arrow[rr, "\varphi"] & & W \arrow[u, "w \mapsto x_{\mathcal{C}'}(w)"] \arrow[d, "w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, bend left=60, "x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)\cdot x"] \arrow[rr, "x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\cdot x"'] & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, bend right=60, "x \mapsto M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)\cdot x"']
\end{tikzcd}$$

Man beachte, dabei, dass die Kommutativität des linken und des rechten Teils gerade die Aussage von Satz 7.3.5 ist. □

Folgerung 7.3.8. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \quad = \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)^{-1}.$$

Beweis. Die Aussage ist ein Spezialfall von Satz 7.3.7. Der besseren Übersicht halber fassen wir die Situation nochmals in ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rr, "x \mapsto M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\cdot x"] & & \mathbb{K}^n \\
V \arrow[u, "v \mapsto x_{\mathcal{C}}(v)"'] \arrow[d, "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"'] \arrow[rr, "\varphi"] & & V \arrow[u, "v \mapsto x_{\mathcal{C}}(v)"] \arrow[d, "v \mapsto x_{\mathcal{B}}(v)"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, bend left=60, "x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)\cdot x"] \arrow[rr, "x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\cdot x"'] & & \mathbb{K}^n \arrow[uu, bend right=60, "x \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)\cdot x"']
\end{tikzcd}$$

□

Folgerung 7.3.9. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\det\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)\right) \quad = \quad \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right).$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich direkt aus Folgerung 7.3.8 und dem Determinantenmultiplikationssatz 6.2.10: Es gilt

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)\right) &= \det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)^{-1}\right)\\ &= \det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\right)\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\right)\det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)^{-1}\right)\\ &= \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\right).\end{aligned}$$

□

Definition 7.3.10. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Die *Determinante* von φ ist $\det(\varphi) := \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\right)$, wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis für V ist.

Satz 7.3.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist injektiv.*
(ii) *φ ist surjektiv.*
(iii) *φ ist bijektiv.*
(iv) *φ ist ein Isomorphismus.*
(v) *Es gilt* $\det(\varphi) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Beweis. Die Äquivalenz der drei ersten Aussagen haben wir in Folgerung 4.1.12 bewiesen; die Äquivalenz von (iii) und (iv) ist die Aussage von Satz 4.1.14.

Zum Nachweis der Äquivalenz von (iv) und (v) wähle man eine Basis $\mathcal{B}$ für V. Mit Satz 4.3.14 und 6.2.9 erhält man dann:

$$\begin{aligned}\varphi \text{ ist Isomorphismus} &\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ ist invertierbar}\\ &\iff \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\right) \neq 0_{\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

Nach Definition der Determinante von $\varphi\colon V \to V$ ist die letzte Aussage äquivalent zu (v). □

Satz 7.3.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine beliebige Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Basis $\mathcal{C}$ von V mit $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$.*
(ii) *Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.*

Beweis. Die Implikation "(i)⇒(ii)" ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 7.3.8. Zur Implikation "(ii)⇒(i)". Es sei $w_j \in V$ der Vektor mit den Koordinaten $x_{\mathcal{B}}(w_j) = (S^{-1})_{*j}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{C} := (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis für V mit Transformationsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = S$ und Folgerung 7.3.8 liefert $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$. □

Bemerkung 7.3.13. In vielen Situationen der linearen Algebra tauchen die folgenden Fragestellungen auf:

- Gegeben ein Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$, finde eine Basis $\mathcal{B}$ für V, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine möglichst einfache Gestalt besitzt.
- Gegeben eine Matrix A, finde eine invertierbare Matrix S, sodass die "Konjugierte" $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine möglichst einfache Gestalt besitzt.

Satz 7.3.12 zeigt, dass die beiden Fragestellungen äquivalent sind. Die zweite Fragestellung nennt man auch das *Normalformenproblem* für Matrizen.

Ein wichtige Frage im Rahmen des Normalformenproblems ist die Frage nach der Diagonalisierbarkeit, d.h., die Frage, ob man eine gegebene Matrix durch Konjugation auf Diagonalgestalt bringen kann, wie etwa im folgenden Beispiel:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Satz 7.3.14. *Es seien V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $r := \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ für V und $\mathcal{C}$ für W mit*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir wählen eine Basis $(w_1, \dots, w_r)$ für $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Nach dem Basisergänzungssatz 3.4.3 können wir diese zu einer Basis

$$\mathcal{C} \quad = \quad (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$$

für W ergänzen. Weiter wählen wir Elemente $v_i \in \varphi^{-1}(w_i)$ für $1 \leq i \leq r$ und eine Basis $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ für $\mathrm{Kern}(\varphi)$ Nach Satz 4.1.10 ist

$$\mathcal{B} \quad = \quad (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$$

eine Basis für V. Nach Konstruktion gilt $\varphi(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $\varphi(v_i) = 0$ für $r + 1 \leq i \leq n$. Folglich hat $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gewünschte Gestalt. □

Folgerung 7.3.15 (Vgl. Satz 5.2.7)**.** *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ eine Matrix vom Rang r. Dann gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit*

$$S \cdot A \cdot T \quad = \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto A \cdot v$ und wählen Basen $\mathcal{B}$ für $\mathbb{K}^n$ sowie $\mathcal{C}$ für $\mathbb{K}^m$ wie in Satz 7.3.14. Bezeichnen $\mathcal{E}$ sowie $\mathcal{E}'$ die Standardbasen in $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$, so liefert die Transformationsformel 7.3.7 das gewünschte Ergebnis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \; = \; M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}'}(\mathrm{id}) \cdot A \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id})^{-1}.$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 7.3.

Aufgabe 7.3.16. Zeige, dass die folgenden Familien Basen des $\mathbb{R}^3$ sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &:= ((1,-1,-1),\,(-1,2,1),\,(1,-1,0)),\\ \mathcal{C} &= ((2,-3,0),\,(-1,2,0),\,(-1,2,1)).\end{aligned}$$

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A{\cdot}x$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und bestimme die darstellenden Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ sowie $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$.

Aufgabe 7.3.17. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Zeige: Es gilt

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)\cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V), \qquad M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V).$$

Aufgabe 7.3.18. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ ist:

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad B = S\cdot A\cdot S^{-1} \quad \text{für ein } S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}).$$

8. Diagonalisierbarkeit

8.1. **Eigenwerte und Eigenvektoren.**

Definition 8.1.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

(i) Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von φ, falls es ein $v \in V$ gibt mit

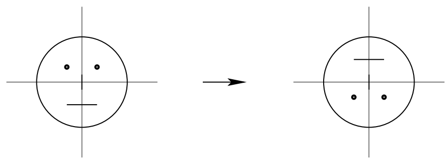
$$v \neq 0, \qquad \varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von φ, so nennt man $v \in V$ einen *Eigenvektor* zum Eigenwert λ, falls

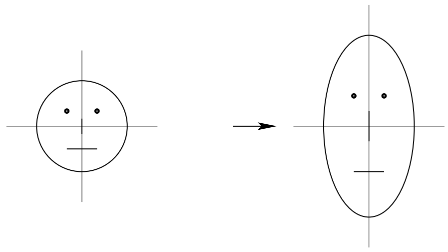
$$v \neq 0, \qquad \varphi(v) = \lambda \cdot v.$$

Beispiel 8.1.2. Eigenwerte und Eigenvektoren einiger linearer Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

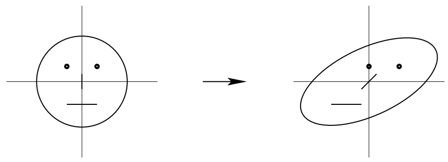
(i) Die Spiegelung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ an der x_1-Achse besitzt die Eigenwerte
- $\lambda = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $(a, 0)$, $a \in \mathbb{K}^*$,
- $\lambda = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $(0, a)$, $a \in \mathbb{K}^*$.



(ii) Die Achsenstreckung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2)$ in x_2-Richtung besitzt die Eigenwerte
- $\lambda = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $(a, 0)$, $a \in \mathbb{K}^*$,
- $\lambda = 2$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $(0, a)$, $a \in \mathbb{K}^*$.



(iii) Die Scherung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$ längs der x_1-Achse besitzt den Eigenwert 1; die zugehörigen Eigenvektoren sind $(a, 0)$, $a \in \mathbb{K}^*$.



Beispiel 8.1.3. Es sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist der Ableitungsoperator

$$D\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad f \mapsto \frac{df}{dx}$$

eine lineare Abbildung. Die Exponentialfunktion $\exp\colon x \mapsto e^x$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 in $C^\infty(\mathbb{R})$, denn es gilt $D(\exp) = \exp$.

Satz 8.1.4. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ. Sind Eigenvektoren $v_i \in V$ zu λ_i gegeben für $1 \le i \le r$, so ist $(v_1, \dots, v_r)$ eine linear unabhängige Familie.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über r. Für $r = 1$ haben wir zu zeigen, dass (v_1) eine linear unabhängige Familie ist. Das gilt jedoch, da v_1 als Eigenvektor nicht der Nullvektor ist.

Wir kommen zum Induktionsschritt; die Aussage sei also für $r - 1$ richtig. Dann ist insbesondere $(v_1, \dots, v_{r-1})$ linear unabhängig. Nach Lemma 3.4.2 ist zu zeigen, dass $v_r \notin \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{r-1})$ gilt. Andernfalls hätten wir eine Darstellung

$$v_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \cdot v_i. \tag{8.1.4.1}$$

Wegen $v_r \neq 0_V$ muss dabei $a_i \neq 0$ für mindestens ein i gelten. Wendet man φ auf diese Darstellung an, so erhält man

$$\lambda_r \cdot v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i a_i \cdot v_i. \tag{8.1.4.2}$$

Zieht man nun das λ_r-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung ab, so erhält man eine Darstellung des Nullvektors

$$0_V = \sum_{i=1}^{r-1} ((\lambda_r - \lambda_i) a_i) \cdot v_i.$$

Da $(v_1, \dots, v_{r-1})$ eine linear unabhängige Familie in V ist, schließen wir aus dieser Gleichung

$$(\lambda_r - \lambda_1) a_1 = \dots = (\lambda_r - \lambda_{r-1}) a_{r-1} = 0.$$

Wie vorhin vermerkt, gibt es ein i mit $1 \le i \le r - 1$, sodass $a_i \neq 0$ gilt. Für dieses i gilt dann $\lambda_r = \lambda_i$. Das steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden sind. □

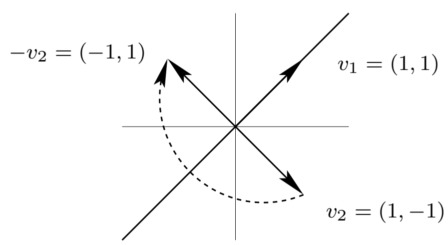
Folgerung 8.1.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann besitzt φ höchstens* $\dim(V)$ *viele Eigenwerte. Gilt* $\dim(V) < \infty$, *so besitzt φ höchstens endlich viele Eigenwerte.*

Definition 8.1.6. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *diagonalisierbar*, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

Beispiel 8.1.7. Wir betrachten die Spiegelung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Geraden $\mathbb{R}\cdot(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$; explizit ist sie gegeben durch

$$\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$$

Dann ist $v_1 := (1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von σ, und $v_2 := (1,-1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von σ.



Die Familie $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ ist eine Basis für $\mathbb{R}^2$. Also ist die Spiegelung σ eine diagonalisierbare lineare Abbildung.

Bemerkung 8.1.8. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren v_i von φ zu Eigenwerten λ_i, so ist die zugehörige darstellende Matrix gegeben durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis $\mathcal{B}$ besitzt, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 8.1.9. Wir betrachten nochmals die Spiegelung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Geraden $\mathbb{R}\cdot(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\sigma\colon \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}^2, \qquad (x_1, x_2) \ \mapsto \ (x_2, x_1)$$

Die Matrix dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ ist gegeben durch

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der eben diskutierten Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ aus den Vektoren $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (1,-1)$ besitzt σ die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 8.1.10. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ eine Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent, siehe Satz 7.3.12:

(i) Die lineare Abbildung $\mu_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto A\cdot v$ ist diagonalisierbar.
(ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A)$ eine Diagonalmatrix ist.
(iii) Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, sodass $S\cdot A\cdot S^{-1}$ Diagonalgestalt besitzt.

Definition 8.1.11. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Die *Eigenwerte* bzw. *Eigenvektoren* von A sind die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von μ_A. Man nennt A *diagonalisierbar*, auch *diagonalähnlich*, falls eine der Aussagen aus Bemerkung 8.1.10 gilt.

Lemma 8.1.12. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in \mathbb{K}$ sei*

$$V_\lambda \ := \ \{v \in V;\ \varphi(v) = \lambda\cdot v\} \ \subseteq \ V.$$

(i) *Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist V_λ ein Untervektorraum von V.*
(ii) *Es gilt genau dann $V_\lambda \neq \{0_V\}$ wenn λ ein Eigenwert von φ ist.*
(iii) *V_λ besteht aus 0_V und ggf. den Eigenvektoren von φ zum Eigenwert λ.*

Beweis. Zu (i). Wir müssen die Axiome eines Untervektorraumes für V_λ nachweisen. Wegen $0_V \in V_\lambda$ ist (UV1) erfüllt.

Zu (UV2): Es seien zwei Vektoren $v, v' \in V_\lambda$ gegeben. Wir müssen $v + v' \in V_\lambda$ nachweisen. Das ergibt sich mit

$$\varphi(v + v') \ = \ \varphi(v) + \varphi(v) \ = \ \lambda\cdot v + \lambda\cdot v' \ = \ \lambda\cdot(v + v').$$

Zu (UV3): Es seien ein Vektor $v \in V_\lambda$ und ein Element $a \in \mathbb{K}$ gegeben. Wir müssen $a \cdot v \in V_\lambda$ nachweisen. Das ergibt sich mit

$$\varphi(a \cdot v) \;=\; a \cdot \varphi(v) \;=\; a \cdot (\lambda \cdot v) \;=\; \lambda \cdot (a \cdot v).$$

Die verbleibenden Aussagen (ii) und (iii) ergeben sich direkt aus der Definition des Eigenwertes. □

Definition 8.1.13. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Den zu $\lambda \in \mathbb{K}$ gehörigen *Eigenraum* definiert man als

$$V_\lambda \;=\; \{v \in V;\ \varphi(v) = \lambda \cdot v\} \;\leq_{\mathbb{K}}\; V.$$

Beispiel 8.1.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein nichttrivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Die Nullabildung $V \to V$, $v \mapsto 0_V$ besitzt $0_{\mathbb{K}}$ als Eigenwert und der zugehörige Eigenraum ist V.
(ii) Die Identität $V \to V$, $v \mapsto v$ besitzt $1_{\mathbb{K}}$ als Eigenwert und der zugehörige Eigenraum ist V.

Bemerkung 8.1.15. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$V_\lambda \;=\; \operatorname{Kern}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi).$$

Satz 8.1.16. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ. Dann hat man eine direkte Zerlegung*

$$V_{\lambda_1} \;+\; \ldots \;+\; V_{\lambda_r} \;=\; V_{\lambda_1} \;\oplus\; \ldots \;\oplus\; V_{\lambda_r}.$$

Beweis. Nach Definition der direkten Summe müssen wir zeigen, dass für jede Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ mit $v_i \in V_{\lambda_i}$ gilt

$$v_1 + \ldots + v_r \;=\; 0_V \quad\Longrightarrow\quad v_1 = \ldots = v_r = 0_V.$$

Nehmen wir an, nicht alle v_i würden verschwinden. Sind $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ die nichtverschwindenden unter $v_1, \ldots, v_r$, so gilt

$$1_{\mathbb{K}} \cdot v_{i_1} + \ldots + 1_{\mathbb{K}} \cdot v_{i_k} \;=\; 0_V.$$

Das ist widerspricht der durch Satz 8.1.4 garantierten linearen Unabhängigkeit der Familie $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$. □

Satz 8.1.17. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ die Eigenwerte von φ, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gelte. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) *Die Abbildung φ ist diagonalisierbar.*
(ii) *Es gilt $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Ist φ ist diagonalisierbar, so ist V offensichtlich die Summe der zugehörigen Eigenräume. Nach Satz 8.1.16 ist diese Summe direkt.

Zu "(ii)⇒(i)". Zu jedem i wählen wir eine Basis für V_{λ_i}. Die aus diesen Basen zusammengesetzte Familie ist eine Basis aus Eigenvektoren für V. □

Aufgaben zu Abschnitt 8.1.

Aufgabe 8.1.18. Es sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktion

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto e^{nx}.$$

Zeige, dass $(f_1, \ldots, f_{999})$ eine linear unabhängige Familie in dem Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 8.1.19. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^n := \varphi \circ \ldots \circ \varphi = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige: φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\varphi = 0$ gilt.

Aufgabe 8.1.20. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass φ diagonalisierbar ist und ± 1 die einzig möglichen Eigenwerte von φ sind.

8.2. **Polynomring und Körper der rationalen Funktionen.**

Bemerkung 8.2.1. In Konstruktion 3.3.12 hatten wir den Vektorraum der Polynome über einem Körper kennengelernt; insbesondere haben wir dort Summen und skalare Vielfache von Polynomen definiert. Polynome kann man auch multiplizieren:

$$\begin{aligned}\left(T^2+T+1\right)\cdot\left(T^2-2T-1\right) &= T^4-2T^3-T^2+T^3-2T^2-T+T^2-2T-1\\ &= T^4-T^3-2T^2-3T-1.\end{aligned}$$

Konstruktion 8.2.2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es bezeichne $\mathbb{K}[T]$ die Menge aller Polynome in der Veränderlichen T über $\mathbb{K}$. Dann definieren wir eine *Addition* und eine *Multiplikation* auf $\mathbb{K}[T]$ durch

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right) + \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) &:= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}(a_\nu+b_\nu)T^\nu,\\ \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) &:= \sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu, \qquad \text{wobei } c_\nu := \sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa.\end{aligned}$$

Zusammen mit diesen Verknüpfungen wird $\mathbb{K}[T]$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement, dem *Polynomring* über $\mathbb{K}$ in der Veränderlichen T; das Nullelement in $\mathbb{K}[T]$ ist $0_\mathbb{K}T^0$ und das Einselement in $\mathbb{K}[T]$ ist $1_\mathbb{K}T^0$.

Beweis. Wir müssen die Axiome eines K1-Ringes für $(\mathbb{K}[T],+,\cdot)$ nachweisen. Aus Konstruktion 3.3.12 wissen wir bereits, dass $(\mathbb{K}[T],+)$ eine abelsche Gruppe ist.

Zur Kommutativität der Multiplikation:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa\right)T^\nu\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} b_\mu a_\kappa\right)T^\nu\\ &= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right)\end{aligned}$$

Zur Assoziativität der Multiplikation:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right)\right) &= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} b_\mu c_\kappa\right)T^\nu\right)\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\nu'+\nu''} a_{\nu'}\left(\sum_{\nu''=\mu+\kappa} b_\mu c_\kappa\right)\right)T^\nu\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\nu'+\nu''+\nu'''} a_{\nu'}b_{\nu''}c_{\nu'''}\right)T^\nu\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\nu'+\nu''}\left(\sum_{\nu'=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa\right)c_{\nu''}\right)T^\nu\\ &= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa\right)T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right)\\ &= \left(\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right)\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right).\end{aligned}$$

Zur Distributivität von Multiplikation und Addition:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right)+\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right)\right) &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu(b_\kappa+c_\kappa)\right)T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa + a_\mu c_\kappa\right)T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa + \sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu c_\kappa\right)T^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu b_\kappa\right)T^\nu + \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\nu=\mu+\kappa} a_\mu c_\kappa\right)T^\nu \\
&= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu T^\nu\right) \\
&\quad + \left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu T^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}} c_\nu T^\nu\right).
\end{aligned}
$$

Die Tatsache, dass $1_{\mathbb{K}}T^0$ neutrales Element bezüglich der Multiplikation ist, ergibt sich direkt aus der Definition der Multiplikation. □

Definition 8.2.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $f = \sum a_\nu T^\nu \in \mathbb{K}[T]$. Der *Grad* von f ist definiert als

$$
\deg(f) \;:=\; \begin{cases} \max(\nu\in\mathbb{N};\ a_\nu \neq 0_{\mathbb{K}}) & \text{falls } f \neq 0_{\mathbb{K}[T]}, \\ -\infty & \text{falls } f = 0_{\mathbb{K}[T]}. \end{cases}
$$

Gilt $\deg(f) = n \geq 0$, so nennt man $a_n \in \mathbb{K}^*$ den *Leitkoeffizienten* des Polynoms f. Besitzt f den Leitkoeffizienten $1_{\mathbb{K}}$, so heißt f *normiert.*

Beispiel 8.2.4. Das Polynom $5T^3 - T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ besitzt den Grad 3 und den Leitkoeffizienten 5.

Satz 8.2.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $f, g \in \mathbb{K}[T]$ Polynome mit $\deg(g) \geq 0$. Dann besitzt f eine Darstellung*

$$
f \;=\; qg + r, \quad \textit{mit } q, r \in \mathbb{K}[T],\ \textit{wobei } \deg(r) < \deg(g).
$$

Beweis. Es seien $m := \deg(f)$ und $n := \deg(g)$. Wir beweisen die Existenz der Darstellung durch Induktion über m. Es gilt

$$
f \;=\; \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu T^\mu, \qquad g \;=\; \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu T^\nu.
$$

Der Fall $m \leq 0$ ist einfach: Falls $n \geq 1$ gilt, kommt man mit $q := 0_{\mathbb{K}[T]}$ und $r := f$ durch; falls $\deg(g) = 0$ gilt, kommt man mit $q := f/g$ und $r := 0_{\mathbb{K}[T]}$ durch.

Kommen wir zum Induktionsschritt. Im Fall $m < n$ ist $f = 0_{\mathbb{K}[T]} \cdot g + f$ die gewünschte Darstellung. Für den Fall $m \geq n$ betrachten wir das Polynom

$$
f' \;:=\; f - \frac{a_m}{b_n}T^{m-n}g.
$$

Darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, und erhalten eine Darstellung

$$
f - \frac{a_m}{b_n}T^{m-n}g \;=\; f' \;=\; q'g + r'
$$

mit $\deg(r') < \deg(g)$. Indem man $a_m/b_n T^{m-n} g$ auf die rechte Seite bringt, erhält man die gewünschte Darstellung:

$$
f \;=\; \left(\frac{a_m}{b_n}T^{m-n} + q'\right)g + r'.
$$

□

Definition 8.2.6. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $f = a_n T^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[T]$ ein Polynom. Der *Wert* von f in $\lambda \in \mathbb{K}$ ist definiert als

$$f(\lambda) \ := \ a_n \lambda^n + \ldots + a_0 \ \in \ \mathbb{K}.$$

Wir nennen ein Körperelement $\lambda \in \mathbb{K}$ eine *Nullstelle* des Polynoms $f \in \mathbb{K}[T]$, falls $f(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ gilt.

Satz 8.2.7. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $f \in \mathbb{K}[T]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Gilt $f(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$, so hat man $f = q \cdot (T - \lambda)$ mit einem Polynom $q \in \mathbb{K}[T]$.*

Beweis. Nach Satz 8.2.5 hat man eine Darstellung $f = q \cdot (T - \lambda) + r$ mit $r \in \mathbb{K}$. Wegen $f(\lambda) = 0$ muss $r = 0_{\mathbb{K}}$ gelten. □

Definition 8.2.8. Ein *Integritätsring* ist ein kommutativer Ring R mit $1_R \neq 0_R$, sodass für je zwei Elemente $a, b \in R$ gilt:

$$a \cdot b \ = \ 0_R \quad \Longrightarrow \quad a \ = \ 0_R \quad \text{oder} \quad b \ = \ 0_R.$$

Beispiel 8.2.9.
(i) Der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Integritätsring.
(ii) Jeder Körper ist ein Integritätsring.
(iii) Der Ring $(C_4, +, \cdot)$ ist kein Integritätsring; es gilt dort $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$.

Lemma 8.2.10. *In jedem Integritätsring R hat man folgende* Kürzungsregel*: Sind $a, b, c \in R$ mit $ab = ac$ und $a \neq 0$, so gilt $b = c$.*

Beweis. Es seien $a, b, c \in R$ mit $ab = ac$ und $a \neq 0$. Durch einfache Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} ab \ = \ ac \quad & \Longleftrightarrow \quad ab - ac \ = \ 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad a(b - c) \ = \ 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung impliziert $a = 0$ oder $b - c = 0$. Ersteres ist nach Voraussetzung ausgeschlossen. Also gilt $b - c = 0$. Das impliziert $b = c$. □

Satz 8.2.11. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist der Polynomring $\mathbb{K}[T]$ ein Integritätsring.*

Beweis. Es seien nichttriviale Polynome $f, g \in \mathbb{K}[T]$ gegeben. Dann gilt $n := \deg(f) \geq 0$ und $m := \deg(g) \geq 0$. Es folgt

$$f \cdot g \ = \ a_n b_m T^{m+n} \ + \ \sum_{\nu=1}^{n+m-1} c_\nu T^\nu,$$

wobei $a_n \in \mathbb{K}^*$ bzw. $b_m \in \mathbb{K}^*$ die Leitkoeffizienten von f bzw. g bezeichnen. Wegen $a_n b_m \neq 0_{\mathbb{K}}$ erhalten wir $f \cdot g \neq 0$. □

Bemerkung 8.2.12 (Bruchrechnen)**.** Wir betrachten die Ringe $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Die Elemente von $\mathbb{Q}$ sind Brüche a/b mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Man hat

$$\frac{a_1}{a_2} \ = \ \frac{b_1}{b_2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 \ = \ a_2 b_1.$$

Konstruktion 8.2.13 (Quotientenkörper)**.** Es sei R ein Integritätsring. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(a_1, a_2) \ \sim \ (b_1, b_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 \ = \ a_2 b_1.$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $Q(R)$, und Äquivalenzklasse eines Elementes (a, b) mit a/b. Wir definieren Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \text{add}\colon\ Q(R) \times Q(R) &\to Q(R), & \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} &:= \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2 b_2} \\ \text{mult}\colon\ Q(R) \times Q(R) &\to Q(R), & \frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2} &:= \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit diesen Verknüpfungen bildet die Menge $Q(R)$ einen Körper, den *Quotientenkörper* von R. Die neutralen Elemente sind

$$0_{Q(R)} = \frac{0_R}{1_R}, \qquad 1_{Q(R)} = \frac{1_R}{1_R}.$$

Weiter ist das multiplikative Inverse zu einem Element $0_{Q(R)} \neq a_1/a_2 \in Q(R)$ gegeben durch a_2/a_1.

Beweis. Die Relation "$\sim$" ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv. Zur Transitivität. Wir schreiben $a = (a_1, a_2)$, etc.. Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ ergibt sich

$$a_1 b_2 = a_2 b_1, \qquad b_1 c_2 = b_2 c_1.$$

Gilt $b_1 = 0_R$, so erhalten wir $a_1 = c_1 = 0_R$ und somit $a \sim c$. Gilt $b_1 \neq 0_R$, so multiplizieren wir die beiden obigen Gleichungen miteinander und erhalten

$$a_1 b_2 b_1 c_2 = a_2 b_1 b_2 c_1.$$

Wegen $b_1 b_2 \neq 0_R$ können wir die Kürzungsregel anwenden. Das ergibt $a_1 c_2 = a_2 c_1$. Wir erhalten also $a \sim c$.

Der nächste Schritt ist es, die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen auf $Q(R)$ nachzuweisen. Zur Addition: Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2 b_2} = \frac{a_1' b_2' + a_2' b_1'}{a_2' b_2'}$$

gilt, sobald $a \sim a'$ und $b \sim b'$ gelten, wobei wie üblich $a = (a_1, a_2)$, etc.. Schreiben wir letztere Äquivalenzen aus, so erhalten wir

$$a_1 a_2' = a_2 a_1', \qquad b_1 b_2' = b_2 b_1'.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $b_2 b_2'$ und die zweite mit $a_2 a_2'$, so ergibt sich nach Umsortieren

$$a_2' b_2' a_1 b_2 = a_2 b_2 a_1' b_2', \qquad a_2' b_2' a_2 b_1 = a_2 b_2 a_2' b_1'.$$

Addition dieser beiden Gleichungen und anschließendes Ausklammern von $a_2' b_2'$ bzw. $a_2 b_2$ ergibt die gewünschte Äquivalenz:

$$a_2' b_2' (a_1 b_2 + a_2 b_1) = a_2 b_2 (a_1' b_2' + a_2' b_1').$$

Zur Multiplikation. Es seien $a \sim a'$ und $b \sim b'$ gelten, wobei wieder $a = (a_1, a_2)$, etc.. Dann haben wir

$$a_1 a_2' = a_2 a_1', \qquad b_1 b_2' = b_2 b_1'.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich die gewünschte Äquivalenz

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{a_1' b_1'}{a_2' b_2'}.$$

Es sind nun die Körperaxiome für $Q(R)$ nachzuweisen. Die jeweiligen Kommutativ- und Assoziativgesetze sowie das Distributivgesetz erhält man durch einfache Rechnungen. Wir verzichten hier auf die explizite Durchführung.

Die Tatsache, dass $0_R/1_R$ bzw. $1_R/1_R$ die neutralen Elemente von Addition und Multiplikation sind, folgt unmittelbar aus der Definition der Verknüpfungen:

$$\frac{0_R}{1_R} + \frac{a_1}{a_2} \;=\; \frac{0_R a_2 + 1_R a_1}{1_R a_2} \;=\; \frac{a_1}{a_2}, \qquad \frac{1_R}{1_R} \cdot \frac{a_1}{a_2} \;=\; \frac{1_R a_1}{1_R a_2} \;=\; \frac{a_1}{a_2}.$$

Die multiplikative Inversenbildung in $Q(R) \setminus \{0_R/1_R\}$ geht wie folgt: Für $a_1, a_2 \in R$ mit $a_2 \neq 0_R$ hat man

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \;=\; \frac{a_1 a_2}{a_2 a_1} \;=\; \frac{1_R}{1_R}.$$

□

Bemerkung 8.2.14. Es seien R ein Integritätsring und $Q(R)$ sein Quotientenkörper. Dann hat man einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\imath\colon\; R \;\to\; Q(R), \qquad a \;\mapsto\; \frac{a}{1_R}.$$

Darüber kann man den Ring R als Teilmenge seines Quotientenkörpers auffassen: Man identifiziert $a \in R$ mit $a/1_R \in Q(R)$.

Definition 8.2.15. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der *Körper der rationalen Funktionen* in der Veränderlichen T über $\mathbb{K}$ ist

$$\mathbb{K}(T) \;:=\; Q(\mathbb{K}[T]).$$

Bemerkung 8.2.16. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist der Körper der rationalen Funktionen in der Veränderlichen T über $\mathbb{K}$ gegeben durch

$$\mathbb{K}(T) \;=\; \left\{\frac{f}{g};\ f, g \in \mathbb{K}[T],\ g \neq 0_{\mathbb{K}[T]}\right\}.$$

Vermöge $f \to f/1$ können wir jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[T]$ als rationale Funktion in $\mathbb{K}(T)$ auffassen.

Umgekehrt kann man auf diese Weise sagen, wann eine rationale Funktion ein Polynom ist; z.B. gilt dies in $\mathbb{Q}(T)$ für

$$\frac{T^2+1}{T-1} \;=\; \frac{T+1}{1}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 8.2.

Aufgabe 8.2.17. Zeige: Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

Aufgabe 8.2.18. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige: Die Menge der Einheiten des Polynomrings $\mathbb{K}[T]$ ist gegeben durch $\mathbb{K}[T]^* = \{aT^0;\ a \in \mathbb{K}^*\}$.

Aufgabe 8.2.19. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und f ein Polynom vom Grad $n \geq 0$. Zeige: f besitzt höchstens n Nullstellen.

Aufgabe 8.2.20. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für ein Polynom $f = \sum a_\nu T^\nu$ über $\mathbb{K}$ und $b \in \mathbb{K}$ definiert man den Wert von f in b als

$$f(b) \ := \ \sum a_\nu b^\nu \ \in \ \mathbb{K}.$$

Zeige, dass die folgende Abbildung ein Homomorphismus von K1-Ringen ist (auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ legt man dabei die punktweisen Verknüpfungen zu Grunde):

$$\Phi\colon \mathbb{K}[T] \ \to \ \mathrm{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), \qquad f \ \mapsto \ [a \mapsto f(a)].$$

Zeige weiter: Die Abbildung Φ ist genau dann injektiv, wenn der Körper $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente besitzt.

8.3. **Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit.**

Definition 8.3.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine Matrix. Das *charakteristische Polynom* von A ist

$$P_A \ := \ \det(T\cdot E_n - A) \ \in \ \mathbb{K}[T].$$

Bemerkung 8.3.2. In 8.3.1 wird mit der Matrix $B := T\cdot E_n - A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}(T))$ gearbeitet. Somit ist $P_A = \det(B)$ zunächst eine rationale Funktion. Nach Definition der Determinante hat man

$$P_A \ = \ \det(B) \ = \ \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}.$$

Für die Einträge $b_{i\sigma(i)}$ von B gilt $b_{i\sigma(i)} = T - a_{ii}$, falls $\sigma(i) = i$ und $b_{i\sigma(i)} = -a_{i\sigma(i)}$, falls $\sigma(i) \neq i$. Damit sehen wir, dass die rationale Funktion P_A tatsächlich ein Polynom ist.

Beispiel 8.3.3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{K})$. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$\begin{aligned} P_A \ &= \ \det\begin{pmatrix} T - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & T - a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \ (T - a_{11})(T - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \ T^2 - (a_{11} + a_{22})T + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Definition 8.3.4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. Die *Spur* von A ist $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Satz 8.3.5. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$. Dann ist das charakteristische Polynom von A von der Form*

$$P_A \ = \ T^n \ - \ \mathrm{Spur}(A)T^{n-1} \ + \ \alpha_{n-2}T^{n-2} \ + \ \ldots \ + \ \alpha_1 T \ + \ (-1)^n \det(A)$$

mit Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$. Insbesondere ist das P_A normiert, d.h., es besitzt den Leitkoeffizienten $1_{\mathbb{K}}$, und es gilt $\deg(P_A) = n$.

Beweis. Wir folgern die Aussage direkt aus der Definition der Determinante: Mit $B := T\cdot E_n - A$ erhält man

$$\begin{aligned} P_A \ = \ \det(B) \ &= \ \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \ b_{11}\cdots b_{nn} + \sum_{\sigma\neq \mathrm{id}} \mathrm{sg}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \ (T - a_{11})\cdots(T - a_{nn}) + c_{n-2}T^{n-2} + \ldots + c_1 T + c_0. \end{aligned}$$

Dabei ist für jedes $\sigma \neq \mathrm{id}$ der Term $b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}$ ein Polynom vom Grad höchstens $n-2$, da es mindestens zwei Indizes i gibt mit $\sigma(i) \neq i$.

Ausmultiplizieren von $(T - a_{11})\cdots(T - a_{nn})$ liefert die Terme von P_A in den Graden n und $n-1$. Weiter erhalten wir den konstanten Term von P_A als den Wert

$$P_A(0) \ = \ \det(-A) \ = \ (-1)^n \det(A).$$

$\square$

Satz 8.3.6. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *eine Matrix. Ist* $S \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ *eine invertierbare Matrix, so besitzen* $S \cdot A \cdot S^{-1}$ *und* A *dasselbe charakteristische Polynom, d.h., es gilt* $P_{S\cdot A\cdot S^{-1}} = P_A$.

Beweis. Für die Matrix $T \cdot E_n - S \cdot A \cdot S^{-1} \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K}(T))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T \cdot E_n - S \cdot A \cdot S^{-1} &= S \cdot T \cdot E_n \cdot S^{-1} - S \cdot A \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot (T \cdot E_n - A) \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz 6.2.10 ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} P_{S\cdot A\cdot S^{-1}} &= \det(T\cdot E_n - S \cdot A \cdot S^{-1}) \\ &= \det\big(S \cdot (T\cdot E_n - A) \cdot S^{-1}\big) \\ &= \det(S)\det(T\cdot E_n - A)\det(S^{-1}) \\ &= \det(T\cdot E_n - A) \\ &= P_A. \end{aligned}$$

□

Folgerung 8.3.7. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *ein endlichdimensionaler Vektorraum und* $\mathcal{B}$ *sowie* $\mathcal{C}$ *Basen für* V. *Ist* $\varphi\colon V \to V$ *eine lineare Abbildung, so besitzen die darstellenden Matrizen* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ *und* $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ *dasselbe charakteristische Polynom.*

Beweis. Nach Satz 7.3.8 gilt $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = S \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot S^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix S. □

Definition 8.3.8. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Das *charakteristische Polynom* von φ ist $P_\varphi := P_A \in \mathbb{K}[T]$, wobei $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die darstellende Matrix von φ bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ von V ist.

Satz 8.3.9. *Es seien* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $\varphi\colon V \to V$ *eine lineare Abbildung. Dann ist* P_φ *ein normiertes Polynom vom Grad* $\deg(P_\varphi) = \dim(V)$. *Weiter sind für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(i) λ *ist ein Eigenwert von* φ.
(ii) *Es gilt* $\mathrm{Kern}(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi) \neq \{0_V\}$.
(iii) *Es gilt* $\det(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi) = 0_{\mathbb{K}}$.
(iv) λ *ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms* P_φ.

Beweis. Nach Satz 8.3.5 ist P_φ normiert, und es gilt $\deg(P_\varphi) = \dim(V)$. Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) ergibt sich mit Bemerkung 8.1.15. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz 7.3.11.

Um die Äquivalenz von (iii) und (iv) einzusehen, wählen wir eine Basis $\mathcal{B}$ für V. Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\lambda\cdot E_n - M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)) = \det(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi).$$

Insbesondere ergibt sich damit, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann Nullstelle von P_φ ist, wenn $\det(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi) = 0_{\mathbb{K}}$ gilt. □

Definition 8.3.10. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[T]$ ein Polynom über $\mathbb{K}$.

(i) Die *Ordnung* $\mathrm{ord}_\lambda(f)$ einer Nullstelle λ von f ist das Maximum über alle $\nu \in \mathbb{N}$, sodass es eine Zerlegung $f = (T-\lambda)^\nu g$ mit einem $g \in \mathbb{K}[T]$ gibt.

(ii) Wir sagen, dass das Polynom f in *Linearfaktoren zerfällt*, falls es von folgender Gestalt ist

$$f \;=\; a \cdot (T-\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (T-\lambda_r)^{\nu_r}$$

mit Körperelementen $a \in \mathbb{K}^*$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sowie positiven Exponenten $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Lemma 8.3.11. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und es sei ein Polynom*

$$f \;=\; (T-\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (T-\lambda_r)^{\nu_r} \;\in\; \mathbb{K}[T]$$

mit $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben. Dann sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ genau die Nullstellen von f, es gilt $\deg(f) = \nu_1 + \ldots + \nu_r$, und man hat $\nu_i = \mathrm{ord}_{\lambda_i}(f)$.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen und $\nu_i \leq \mathrm{ord}_{\lambda_i}(f)$ sind klar. Mit $\nu_i < \mathrm{ord}_{\lambda_i}(f)$ könnte man einen Faktor $T - \lambda_i$ von $g := f/(T-\lambda_i)^{\nu_i}$ abspalten und erhielte

$$0_{\mathbb{K}} \;=\; g(\lambda_i) \;=\; \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{\nu_j} \;\neq\; 0_{\mathbb{K}},$$

wobei letztere Ungleichheit auf $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ zurückgeht. Damit haben wir $\nu_i < \mathrm{ord}_{\lambda_i}(f)$ ausgeschlossen, und es folgt $\nu_i = \mathrm{ord}_{\lambda_i}(f)$. □

Definition 8.3.12. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ.

(i) Die *algebraische Vielfachheit* von λ ist die Ordnung $\mathrm{ord}_\lambda(P_\varphi)$ der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms P_φ.

(ii) Die *geometrische Vielfachheit* von λ ist die Dimension $\dim(V_\lambda)$ des zugehörigen Eigenraumes V_λ.

Satz 8.3.13. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ. Dann gilt*

$$1 \;\leq\; \dim(V_\lambda) \;\leq\; \mathrm{ord}_\lambda(P_\varphi).$$

Beweis. Da λ ein Eigenwert von φ ist, gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0_V$ zu λ. Folglich gilt $1 \leq \dim(V_\lambda)$.

Zum Nachweis der zweiten Ungleichung wählen wir eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ für den Eigenraum V_λ. Nach Satz 3.4.3 können wir diese Basis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzen. Die zugehörige Matrix für φ besitzt Blockgestalt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_k & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit nicht näher bekannten Matrizen A und B. Nach Folgerung 6.3.4 ist das charakteristische Polynom P_φ somit von der Gestalt

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \det(T \cdot E_n - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)) \\ &= \det((T-\lambda) \cdot E_k) \cdot \det(T \cdot E_{n-k} - B) \\ &= (T-\lambda)^{\dim(V_\lambda)} \cdot Q. \end{aligned}$$

mit einem Polynom $Q \in \mathbb{K}[T]$. Insbesondere sieht man, dass die Nullstelle λ von P_φ mindestens die Ordnung $\dim(V_\lambda)$ besitzt. □

Bemerkung 8.3.14. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

(i) Der Vektorraum V ist die direkte Summe der zu λ_i gehörigen Eigenräume: $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.

(ii) Sind $\mathcal{B}_i$ Basen der Eigenräume V_{λ_i}, so gilt mit der daraus zusammengesetzten Basis $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

(iii) Das charakteristische Polynom P_φ der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist gegeben durch

$$P_\varphi \quad = \quad (T - \lambda_1)^{\dim(V_{\lambda_1})} \cdots (T - \lambda_r)^{\dim(V_{\lambda_r})}.$$

Insbesondere zerfällt P_φ in Linearfaktoren und mit Lemma 8.3.11 ergibt sich $\dim(V_{\lambda_i}) = \operatorname{ord}_{\lambda_i}(P_\varphi)$ für $1 \leq i \leq r$.

Satz 8.3.15. *Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist diagonalisierbar.*

(ii) *Das charakteristische Polynom P_φ zerfällt in Linearfaktoren und es gilt $\dim(V_\lambda) = \operatorname{ord}_\lambda(P_\varphi)$ für jeden Eigenwert λ von φ.*

Beweis. Bemerkung 8.3.14 liefert "(i)⇒(ii)". Zu "(ii)⇒(i)". Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von φ, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gelte. Nach Satz 8.1.16 hat man

$$V' \ := \ V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_r} \ = \ V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Das charakteristische Polynom P_φ besitzt genau die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Da es in Linearfaktoren zerfällt ist es nach Lemma 8.3.11 von der Gestalt

$$P_\varphi \quad = \quad (T - \lambda_1)^{\operatorname{ord}_{\lambda_1}(P_\varphi)} \cdots (T - \lambda_r)^{\operatorname{ord}_{\lambda_r}(P_\varphi)}.$$

Weiter gilt nach Voraussetzung $\dim(V_i) = \operatorname{ord}_{\lambda_i}(P_\varphi)$ für $1 \leq i \leq r$. Damit erhalten wir

$$\dim(V') \ = \ \sum_{i=1}^{r} \dim(V_{\lambda_i}) \ = \ \sum_{i=1}^{r} \operatorname{ord}_{\lambda_i}(P_\varphi) \ = \ \deg(P_\varphi) \ = \ \dim(V).$$

Es folgt $V' = V$. Nach Satz 8.1.17 ist φ diagonalisierbar. □

Aufgaben zu Abschnitt 8.3.

Aufgabe 8.3.16. Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ und $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$. Zeige, dass $\mathrm{Spur}(B) = \mathrm{Spur}(A)$ gilt.

Aufgabe 8.3.17. Untersuche die Abbildung $\mu_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$ auf Diagonalisierbarkeit für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. **Beispiele.**

Bemerkung 8.4.1. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ und $\mu_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto A \cdot v$ die zugehörige lineare Abbildung.

(i) Das charakteristische Polynom der linearen Abbildung μ_A (bzw. der Matrix A) ist definiert als

$$P_{\mu_A} \;=\; P_A \;=\; \det(TE_n - A) \;\in\; \mathbb{K}[T].$$

(ii) Die Eigenwerte von μ_A (bzw. von A) sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_{\mu_A} = P_A$, siehe Satz 8.3.9.

(iii) Der Eigenraum $V_\lambda \leq \mathbb{K}^n$ zu einem Eigenwert λ von μ_A (bzw. von A) ist nach Bemerkung 8.1.15 gegeben durch

$$V_\lambda \;=\; \mathrm{Kern}(\lambda\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} - \mu_A) \;=\; \{x \in \mathbb{K}^n;\ (\lambda\cdot E_n - A)\cdot x = 0_{\mathbb{K}^n}\}\,.$$

Die letzte Darstellung beschreibt den Eigenraum V_λ als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems.

(iv) Nach Satz 8.3.15 ist die lineare Abbildung μ_A (bzw. die Matrix A) genau dann diagonalisierbar, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:
   (a) Das charakteristische Polynom $P_{\mu_A} = P_A$ zerfällt in Linearfaktoren.
   (b) für jeden Eigenwert λ von μ_A (bzw. A) gilt $\dim(V_\lambda) = \mathrm{ord}_\lambda(P_A)$.

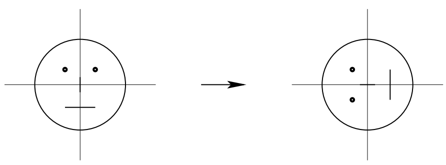
(v) Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von μ_A (bzw. von A), so gilt

$$S \cdot A \cdot S^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei S die zur kanonischen Basis $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ gehörige Transformationsmatrix bezeichnet, siehe Folgerung 7.3.8. Nach Satz 7.3.6 gilt

$$S \;:=\; M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \;=\; (v_1, \ldots, v_n)^{-1}.$$

Beispiel 8.4.2. Wir betrachten die Drehung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$ um $90°$.



Die darstellende Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

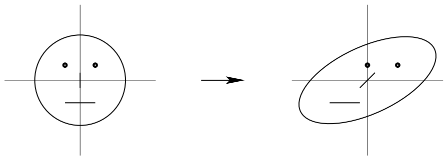
$$A \;:=\; M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h., wir haben $\varphi = \mu_A$. Das charakteristische Polynom P_φ von φ ist gegeben durch

$$P_\varphi \;=\; P_A \;=\; \det(T\cdot E_2 - A) \;=\; \det\begin{pmatrix} T & 1 \\ -1 & T \end{pmatrix} \;=\; T^2 + 1.$$

Offenbar zerfällt $P_\varphi \in \mathbb{R}[T]$ nicht in Linearfaktoren. Folglich ist die Drehung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um $90°$ nicht diagonalisierbar.

Beispiel 8.4.3. Wir betrachten die Scherung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2)$ längs der x_1-Achse.



Die darstellende Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$A \;:=\; M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h., wir haben $\varphi = \mu_A$. Das charakteristische Polynom P_φ von φ zerfällt in Linearfaktoren; es ist gegeben durch

$$P_\varphi \;=\; P_A \;=\; \det(T\cdot E_2 - A) \;=\; \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 \\ 0 & T-1 \end{pmatrix} \;=\; (T-1)^2.$$

Der einzige Eigenwert ist 1, und es gilt $\operatorname{ord}_1(P_\varphi) = 2$. Der Eigenraum V_1 ist der Lösungsraum des Gleichungssystems $A\cdot x = x$; konkret ist dies gegeben als

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \;&=\; x_1, \\ x_2 \;&=\; x_2. \end{aligned}$$

Man erhält $V_1 = \mathbb{R}\cdot(1,0)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist daher $\dim(V_1) = 1 < \operatorname{ord}_1(P_\varphi)$. Insbesondere ist φ nicht diagonalisierbar.

Bemerkung 8.4.4. Die Nullstellen z_1, z_2 eines Polynomes $f = aT^2 + bT + c \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad zwei sind gegeben durch die allgemeine Lösungsformel

$$z_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Für Polynome dritten und vierten Grades gibt es ebenfalls (komplizierte) allgemeine Lösungsformeln, in höheren Graden jedoch nicht mehr.

Bemerkung 8.4.5. Es sei $f \in \mathbb{K}[T]$ ein Polynom vom Grad mindestens zwei. Ist eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{K}[T]$ gegeben, so kann man den entsprechenden Linearfaktor abspalten, d.h., man findet eine Darstellung

$$f \;=\; g\cdot(T-\lambda), \qquad \text{wobei } g \in \mathbb{K}[T].$$

Die weiteren Nullstellen von f sind dann genau die Nullstellen von g. In der Praxis kann man g durch Polynomdivision berechnen. Wir demonstrieren dies an folgendem Beispiel:

$$f \;:=\; T^3 + T^2 - T - 1 \;\in\; \mathbb{Q}[T].$$

Die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ sei uns zugefallen, z.B. durch ausprobieren. Wir gewinnen das gesuchte $g = f/(T-1)$, indem wir sukzessive den Grad von f verringern durch Subtraktion geeigneter Vielfacher q_i von $T-1$:

$$\begin{array}{ll} q_1 := T^2, & f_1 := f - q_1\cdot(T-1) = 2T^2 - T - 1, \\ q_2 := 2T, & f_2 := f_1 - q_2\cdot(T-1) = T - 1, \\ q_3 := 1, & f_3 := f_2 - q_3\cdot(T-1) = 0. \end{array}$$

Mit $g := q_1 + q_2 + q_3 = T^2 + 2T + 1$ gilt dann $f = g\cdot(T-1)$. Es gilt $g = (T+1)^2$ und somit ist $\lambda_2 = -1$ eine Nullstelle der Odnung 2 von f. Insbesondere sehen wir, dass $f = (T+1)^2\cdot(T-1)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Beispiel 8.4.6. Wir betrachten die lineare Abbildung $\mu_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto A\cdot v$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $P_A = \det(T\cdot E_3 - A)$ berechnen wir durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} P_A &= \det \begin{pmatrix} T+5 & -4 & -4 \\ 2 & T-1 & -2 \\ 4 & -4 & T-3 \end{pmatrix} \\ &= (T+5)\cdot((T-1)\cdot(T-3) - (-2)\cdot(-4)) \\ &\quad -(-4)\cdot(2\cdot(T-3)(-2)\cdot 4) \\ &\quad +(-4)\cdot(2\cdot(-4) - 4\cdot(T-1)) \\ &= T^3 + T^2 - T - 1 \\ &= (T+1)^2 \cdot (T-1), \end{aligned}$$

wobei die Zerlegung in Linearfaktoren bereits in Bemerkung 8.4.5 diskutiert wurde. Die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten sind

$$\lambda_1 = -1, \quad \mathrm{ord}_{-1}(P_A) = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \quad \mathrm{ord}_1(P_A) = 1.$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume. Der Eigenraum V_{-1} ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssytems $(-E_3 - A)\cdot x = 0$, wobei

$$-E_3 - A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Normieren der ersten Zeile und anschließendes Subtrahieren des zweifachen der ersten Zeile von der zweiten sowie Subtrahieren des vierfachen der ersten Zeile von der dritten bringt die Matrix auf normierte Zeilenstufenform

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge V_{-1} von $(-E_3 - A)\cdot x = 0$ stimmt mit der Lösungsmenge von $B_{-1}\cdot x = 0$ überein und wir erhalten

$$V_{-1} = \mathbb{R}\cdot v_1 + \mathbb{R}\cdot v_2, \qquad \text{mit} \quad v_1 := (1,1,0), \quad v_2 := (1,0,1).$$

Insbesondere haben wir $\dim(V_{-1}) = \mathrm{ord}_{-1}(P_A) = 2$. Der Eigenraum V_1 ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssytems $(E_3 - A)\cdot x = 0$ mit

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen der beiden oberen Zeilen, Subtrahieren der ersten von der zweiten, Subtrahieren der zweiten von der dritten, zweifaches Subtrahieren der ersten von der zweiten und anschließendes Multiplizieren der Zeilen mit $1/2$ bringt die Matrix auf Zeilenstufenform

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge V_1 von $(E_3 - A)\cdot x = 0$ stimmt mit der Lösungsmenge von $B_1\cdot x = 0$ überein und wir erhalten

$$V_1 \;=\; \mathbb{R}\cdot v_3 \qquad \text{mit} \quad v_3 \;:=\; (2,1,2).$$

Mit $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ haben wir also eine Basis aus Eigenvektoren von μ_A für $\mathbb{R}^3$ gefunden. Die zur kanonischen Basis $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ gehörige Transformationsmatrix ist

$$S \;=\; M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \;=\; (v_1, v_2, v_3)^{-1}.$$

Zur konkreten Berechnung von S führen wir das Verfahren aus 5.2.16 zur Bestimmung der Inversen von (v_1, v_2, v_3) durch:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad & \xrightarrow{\text{ZOp}(-1;1,2)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(1;2,3)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(1;2,1)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(-1;3,1)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(1;3,2)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \xrightarrow{\text{ZOp}(-1;2)} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist $S = (v_1, v_2, v_3)^{-1}$ die Matrix unten rechts. Zusammenfassend können wir festhalten:

$$S\cdot A\cdot S^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad S \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 8.4.7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ diagonalisierbar und es sei $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ gegeben, sodass $D := S\cdot A\cdot S^{-1}$ Diagonalgestalt besitzt. Dann kann man Potenzen A^n bequem berechnen: Es gilt

$$A^n \;=\; S^{-1}\cdot D^n\cdot S.$$

Dabei ist D^n die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen d_{ii}^n, wobei d_{ii} den i-ten Diagonaleintrag von D bezeichnet.

Aufgaben zu Abschnitt 8.4.

Aufgabe 8.4.8. Bestimme eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ Diagonalgestalt besitzt, wobei

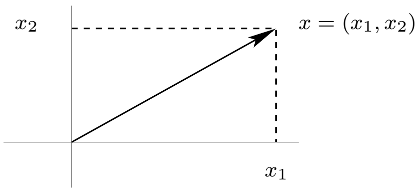
$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{C}).$$

9. Euklidische und unitäre Vektorräume

9.1. **Euklidische Vektorräume.**

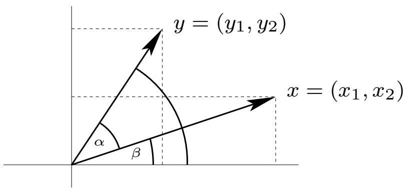
Bemerkung 9.1.1. Die Länge $\|x\|$ eines Vektors $x = (x_1, x_2)$ in $\mathbb{R}^2$ berechnet man nach dem Satz von Pythagoras: Es gilt

$$\|x\| \quad = \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$



Bemerkung 9.1.2. Es seien Vektoren $x = (x_1, x_2)$ mit $x_1, x_2 > 0$ und $y = (y_1, y_2)$ mit $y_1, y_2 > 0$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben. Wir betrachten die Winkel

$$\alpha \;:=\; \angle(x, y), \qquad \beta \;:=\; \angle(e_1, x), \qquad \gamma \;:=\; \angle(e_1, y).$$



Unser Ziel ist es, den Winkel α zu bestimmen. Zunächst erhalten wir für die Winkel β und γ:

$$\cos(\beta) \;=\; \frac{x_1}{\|x\|}, \quad \sin(\beta) \;=\; \frac{x_2}{\|x\|}, \qquad \cos(\gamma) \;=\; \frac{y_1}{\|y\|}, \quad \sin(\gamma) \;=\; \frac{y_2}{\|y\|}.$$

Weiter gilt $\alpha = \gamma - \beta$. Unter Verwendung des Additionstheorems für den Cosinus erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\gamma - \beta) \\
&= \cos(\gamma)\cos(-\beta) \;-\; \sin(\gamma)\sin(-\beta) \\
&= \cos(\gamma)\cos(\beta) \;+\; \sin(\gamma)\sin(\beta) \\
&= \frac{x_1}{\|x\|} \cdot \frac{y_1}{\|y\|} \;+\; \frac{x_2}{\|x\|} \cdot \frac{y_2}{\|y\|} \\
&= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|x\| \cdot \|y\|}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.1.3. Für je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ definieren wir ihr *Standardskalarprodukt* als

$$\langle x, y \rangle \quad := \quad x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

In der Situation von Bemerkung 9.1.1 und 9.1.2 kann man dann Länge und Winkel berechnen gemäss

$$\|x\| \;=\; \sqrt{\langle x, x \rangle}, \qquad\qquad \angle(x, y) \;=\; \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right).$$

Definition 9.1.4. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \ \to\ \mathbb{R}, \qquad (v,w)\ \mapsto\ \langle v,w\rangle$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *bilinear*, d.h., es gilt stets

$$\begin{aligned}\langle a\cdot v + a'\cdot v', w\rangle &= a\langle v,w\rangle + a'\langle v',w\rangle,\\ \langle v, b\cdot w + b'\cdot w'\rangle &= b\langle v,w\rangle + b'\langle v,w'\rangle,\end{aligned}$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *symmetrisch*, d.h., es gilt stets

$$\langle v,w\rangle \ =\ \langle w,v\rangle,$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *positiv definit*, d.h., es gilt stets

$$\begin{aligned}\langle v,v\rangle \quad &\geq \quad 0,\\ \langle v,v\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad v = 0_V.\end{aligned}$$

Einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ nennt man einen *euklidischen* Vektorrraum.

Beispiel 9.1.5. Das *Standardskalarprodukt* macht $\mathbb{R}^n$ zu einem euklidischen Vektorraum; es ist definiert als

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to\ \mathbb{R}, \qquad (x,y)\ \mapsto\ x\cdot y\ =\ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Beispiel 9.1.6. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktinen auf dem Intervall $[0,1]$

$$C[0,1]\ \ :=\ \ \{f\colon [0,1]\to\mathbb{R};\ f \text{ ist stetig }\},$$

wobei, wie üblich, die punktweisen Verknüpfungen zu Grunde gelegt werden. Man erhält ein Skalarprodukt auf $C[0,1]$ durch

$$\langle f,g\rangle \ \ :=\ \ \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Bemerkung 9.1.7. Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Ist $U \leq_{\mathbb{R}} V$ ein Untervektorraum, so ist U ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$U\times U\ \to\ \mathbb{R}, \qquad (v,w)\ \mapsto\ \langle v,w\rangle.$$

Definition 9.1.8. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Die zugehörige *Norm* ist die Abbildung

$$V\ \to\ \mathbb{R}, \qquad v\ \mapsto\ \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Beispiel 9.1.9. Die zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ gehörige euklidische Norm ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}, \qquad x\ \mapsto\ \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Satz 9.1.10 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und zugehöriger Norm $\|\ \|$. Dann gilt*

$$\langle v,w\rangle^2 \ \ \leq\ \ \|v\|^2\cdot\|w\|^2$$

für alle $v,w\in V$. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn die Familie (v,w) linear abhängig ist.

Beweis. Fall 1. Es gilt $\|v\| = 0$. Dann liefert die positive Definitheit $v = 0_V$. Man hat

$$\langle 0_V, w\rangle^2 \;=\; \langle 0\cdot 0_V, w\rangle^2 \;=\; 0 \;=\; \|v\|^2\cdot\|w\|^2.$$

Somit gilt die Ungleichung im vorliegenden Fall und die Zusatzaussage ist ebenfalls richtig.

Fall 2. Es gilt $\|v\| \neq 0$. Wir führen zunächst eine Vorüberlegung durch. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ erhält man

$$\begin{aligned}
\langle a\cdot v + b\cdot w, a\cdot v + b\cdot w\rangle &= a\langle v, a\cdot v + b\cdot w\rangle + b\langle w, a\cdot v + b\cdot w\rangle \\
&= a^2\langle v, v\rangle + ab\langle v, w\rangle + ba\langle w, v\rangle + b^2\langle w, w\rangle. \\
&= a^2\langle v, v\rangle + 2ab\langle v, w\rangle + b^2\langle w, w\rangle.
\end{aligned}$$

Setzt man in dieser allgemeinen Gleichung $a := -\langle v, w\rangle$ und $b := \langle v, v\rangle$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle a\cdot v + b\cdot w, a\cdot v + b\cdot w\rangle &= \langle v, w\rangle^2\langle v, v\rangle - 2\langle v, w\rangle\langle v, v\rangle\langle v, w\rangle + \langle v, v\rangle^2\langle w, w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle\left(-\langle v, w\rangle^2 + \|v\|^2\cdot\|w\|^2\right).
\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aufgrund der positiven Definitheit stets nichtnegativ. Damit erhält man bereits die gewünschte Ungleichung.

Ist die Familie (v, w) linear abhängig, so gilt $w = c\cdot v$, denn wegen $\langle v, v\rangle \neq 0$ hat man $v \neq 0_V$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle^2 &= \langle v, c\cdot v\rangle^2 \\
&= c^2\langle v, v\rangle\langle v, v\rangle \\
&= \langle v, v\rangle\langle c\cdot v, c\cdot v\rangle \\
&= \|v\|^2\cdot\|w\|^2
\end{aligned}$$

Gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, so erhalten wir mit $a := -\langle v, w\rangle$ und $b := \langle v, v\rangle$ gemäß unserer Vorüberlegung die Bedingung

$$\begin{aligned}
\langle a\cdot v + b\cdot w, a\cdot v + b\cdot w\rangle &= \langle v, v\rangle\left(-\langle v, w\rangle^2 + \|v\|^2\cdot\|w\|^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die positive Definitheit liefert $a\cdot v + b\cdot w = 0_V$. Wegen $b = \langle v, v\rangle \neq 0$ ist dies eine nichttriviale Linearkombination, d.h., (v, w) ist linear abhängig. □

Folgerung 9.1.11. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann besitzt die zugehörige Norm $\|\ \|$ folgende Eigenschaften:*

(i) *Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \implies v = 0_V$.*
(ii) *Für alle $v \in V$ gilt $\|c\cdot v\| = |c|\|v\|$.*
(iii) *Für alle $v, w \in V$ gilt die* Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beweis. Die beiden ersten Aussagen ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarproduktes. Die Dreiecksungleichung verifiziert man mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung: Es gilt

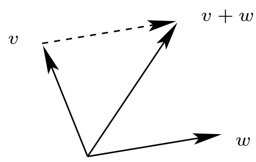
$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Definition 9.1.12. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und zugehöriger Norm $\|\ \|$. Die *Länge* eines Vektors $v \in V$ definiert man als $\|v\|$, und den *Winkel* zwischen zwei Vektoren $0_V \neq v, w \in V$ definiert man als

$$\angle(v, w) \quad := \quad \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right).$$

Bemerkung 9.1.13. Für den in Definition 9.1.12 eingeführten Längenbegriff besagt die Dreicksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, dass der "direkte Weg von 0_V zu $v + w$ höchstens so lang ist, wie der Umweg über v".



Der in Definition 9.1.12 eingeführte Winkelbegriff ist wohldefiniert; die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung garantiert, dass das Argument der Arcuscosinusfunktion betragsmäßig durch Eins beschränkt ist.

Definition 9.1.14. Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

(i) Wir nennen zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander, in Zeichen $v \perp w$, falls $\langle v, w\rangle = 0$ gilt.
(ii) Es sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Das *orthogonale Komplement* von U in V ist die Teilmenge

$$U^{\perp} \ := \ \{v \in V;\ v \perp u \text{ für alle } u \in U\} \ \subseteq \ V.$$

Satz 9.1.15. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und es sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist $U^{\perp}$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Wegen $0_V \in U^{\perp}$ ist das Axiom (UV1) erfüllt. Für den Nachweis von (UV2) seien $v, v' \in U^{\perp}$ gegeben. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$\langle v + v', u\rangle \ = \ \langle v, u\rangle + \langle v', u\rangle \ = \ 0.$$

Für den Nachweis von (UV3) seien $v \in U^{\perp}$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt für alle $u \in U$:

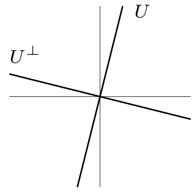
$$\langle a\cdot v', u\rangle \ = \ a\langle v, u\rangle \ = \ 0.$$

□

Beispiel 9.1.16. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Dann gilt für je zwei nichttriviale Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} v \perp w \quad &\Longleftrightarrow \quad v_1w_1 + v_2w_2 \ = \ 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (w_1, w_2) \ = \ c\cdot(v_2, -v_1) \text{ mit einem } c \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Damit erhält man beispielsweise, dass das orthogonale Komplement der Geraden $U := \mathbb{R}\cdot(1, 2)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist als $U^{\perp} = \mathbb{R}\cdot(-2, 1)$.



Aufgaben zu Abschnitt 9.1.

Aufgabe 9.1.17. Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zeige: Man hat einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen:

$$V \;\to\; \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}), \qquad u \;\mapsto\; [v \mapsto \langle u, v\rangle].$$

Aufgabe 9.1.18. Zeige, dass in Beispiel 9.1.6 tatsächlich ein Skalarprodukt definiert wird. Zeige weiter, dass für je zwei stetige Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

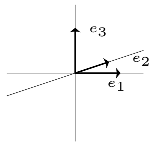
$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \leq \quad \sqrt{\left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 g(x)^2\,dx\right)}.$$

9.2. **Orthonormalbasen.**

Definition 9.2.1. Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ für V nennt man *Orthonormalbasis*, falls für je zwei i, j gilt

$$\langle v_i, v_j \rangle \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Beispiel 9.2.2. Versieht man $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt, so ist die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis.



Satz 9.2.3. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für V. Dann gilt:*

(i) *Die Entwicklung eines beliebigen $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$ ist gegeben durch*
$$v \;=\; \langle v, v_1\rangle \cdot v_1 \;+\; \ldots \;+\; \langle v, v_n\rangle \cdot v_n.$$

(ii) *Für je zwei Vektoren $v = \sum a_i \cdot v_i$ und $w = \sum b_i \cdot v_i$ aus V gilt*
$$\langle v, w\rangle \;=\; x_{\mathcal{B}}(v) \cdot x_{\mathcal{B}}(w) \;=\; a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Beweis. Zu (i). Es sei $x_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann ist zu zeigen, dass $\langle v, v_i\rangle = a_i$ gilt. Das folgt mit

$$\langle v, v_i\rangle \;=\; \langle a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n, v_i\rangle \;=\; a_1\langle v_1, v_i\rangle + \ldots + a_n\langle v_n, v_i\rangle \;=\; a_i.$$

Zu (ii). Die Aussage erhält man ohne Schwierigkeiten durch "bilineares Ausmultiplizieren". Es gilt

$$\langle v, w\rangle \;=\; \left\langle \sum_i a_i \cdot v_i, \sum_j b_j \cdot v_j \right\rangle \;=\; \sum_{i,j} a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle \;=\; a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

□

Satz 9.2.4 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Weiter seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V und*

$$\begin{aligned}
u_1 &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_1\|} \cdot \widetilde{u}_1, & \textit{wobei}\quad \widetilde{u}_1 &:= v_1, \\
u_2 &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_2\|} \cdot \widetilde{u}_2, & \textit{wobei}\quad \widetilde{u}_2 &:= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle \cdot u_1, \\
&\ \vdots \\
u_n &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_n\|} \cdot \widetilde{u}_n, & \textit{wobei}\quad \widetilde{u}_n &:= v_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i\rangle \cdot u_i.
\end{aligned}$$

Dann ist die Familie $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis für $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. *Insbesondere ist $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis für V, falls $\mathcal{B}$ eine Basis für V ist.*

Lemma 9.2.5. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und es seien Vektoren $u_1, \ldots, u_k$ mit $u_i \neq 0_V$ und $u_i \perp u_j$ für $i \neq j$ gegeben. Dann ist die Familie $(u_1, \ldots, u_k)$ linear unabhängig.*

Beweis. Es sei eine Linearkombination $a_1 \cdot u_1 + \ldots + a_k \cdot u_k = 0_V$ gegeben. Dann erhalten wir für jedes i:

$$0 \;=\; \langle a_1 \cdot u_1 + \ldots + a_k \cdot u_k, u_i \rangle \;=\; a_i \langle u_i, u_i \rangle$$

Wegen $u_i \neq 0_V$ gilt $\langle u_i, u_i \rangle \neq 0$, und es folgt $a_i = 0$ für jedes $1 \leq i \leq k$. Das beweist die lineare Unabhängigkeit. □

Beweis von Satz 9.2.4. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist einfach; es gilt

$$\langle u_1, u_1 \rangle \;=\; \left\langle \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1,\; \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 \right\rangle \;=\; \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_1 \rangle \;=\; 1.$$

Wir kommen zum Induktionsschritt. Nach Induktionsannahme ist $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ eine Orthonormalbasis für $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Wir zeigen zunächst, dass $\widetilde{u}_n \neq 0_V$ gilt. Andernfalls hätten wir $\widetilde{u}_n = 0_V$ und somit

$$v_n \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \cdot u_i \;\in\; \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{n-1});$$

Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_n)$. Mit $\widetilde{u}_n \neq 0_V$ erhalten wir wie vorhin

$$\langle u_n, u_n \rangle \;=\; \left\langle \frac{1}{\|\widetilde{u}_n\|} \cdot \widetilde{u}_n,\; \frac{1}{\|\widetilde{u}_n\|} \cdot \widetilde{u}_n \right\rangle \;=\; \frac{1}{\|\widetilde{u}_n\|^2} \langle \widetilde{u}_n, \widetilde{u}_n \rangle \;=\; 1.$$

Für den Nachweis der verbleibenden Orthogonalitätsrelationen genügt es zu zeigen, dass $\langle u_n, u_j \rangle = 0$ für alle $1 \leq j < n$ gilt. Zunächst vermerken wir

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{u}_n, u_j \rangle \;&=\; \left\langle v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \cdot u_i, u_j \right\rangle \\
&=\; \langle v_n, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle \\
&=\; \langle v_n, u_j \rangle - \langle v_n, u_j \rangle \\
&=\; 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $1 \leq j < n$:

$$\langle u_n, u_j \rangle \;=\; \left\langle \frac{1}{\|\widetilde{u}_n\|} \cdot \widetilde{u}_n,\; u_j \right\rangle \;=\; \frac{1}{\|\widetilde{u}_n\|} \langle \widetilde{u}_n, u_j \rangle \;=\; 0.$$

Nach Lemma 9.2.5 ist die Familie $(u_1, \ldots, u_n)$ linear unabhängig. Weiter gilt $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$ und somit $\mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. Wegen $\dim(\mathrm{Lin}(\mathcal{B})) = n$ muss $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis für $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$ sein, siehe Satz 3.4.9. □

Satz 9.2.6. *Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $U \leq_{\mathbb{R}} V$ ein Untervektorraum. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_n)$ mit*

$$U \;=\; \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_k), \qquad U^{\perp} \;=\; \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

für ein $1 \leq k \leq n$. Weiter hat man eine direkte Zerlegung $V = U \oplus U^{\perp}$. Die zugehörigen Projektionen auf die Komponenten U bzw. $U^{\perp}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_U \colon V \;&\to\; U, \qquad v \;\mapsto\; \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \ldots + \langle v, u_k \rangle \cdot u_k, \\
P_{U^{\perp}} \colon V \;&\to\; U^{\perp}, \qquad v \;\mapsto\; \langle v, u_{k+1} \rangle \cdot u_{k+1} + \ldots + \langle v, u_n \rangle \cdot u_n.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir wählen eine Basis $(v_1, \dots, v_k)$ für V und ergänzen sie mit Satz 3.4.3 zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Das Gram-Schmidt-Verfahren 9.2.4 macht daraus eine Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_n)$ mit $U = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_k)$.

Es gilt $U \cap U^\perp = \{0_V\}$, denn für jedes $u \in U \cap U^\perp$ gilt $u \perp u$, d.h., man hat $\langle u, u \rangle = 0$ und somit $u = 0_V$. Mit der Dimensionsformel 7.2.14 erhalten wir

$$\dim(U^\perp) \;=\; \dim(U + U^\perp) - \dim(U) \;\le\; n - k.$$

Wegen $u_{k+1}, \dots, u_n \in U^\perp$ gilt sogar Gleichheit. Es folgt $U^\perp = \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \dots, u_n)$ und $V = U \oplus U^\perp$. Die Aussage über die Projektionen folgt aus Satz 9.2.3 (i). $\square$

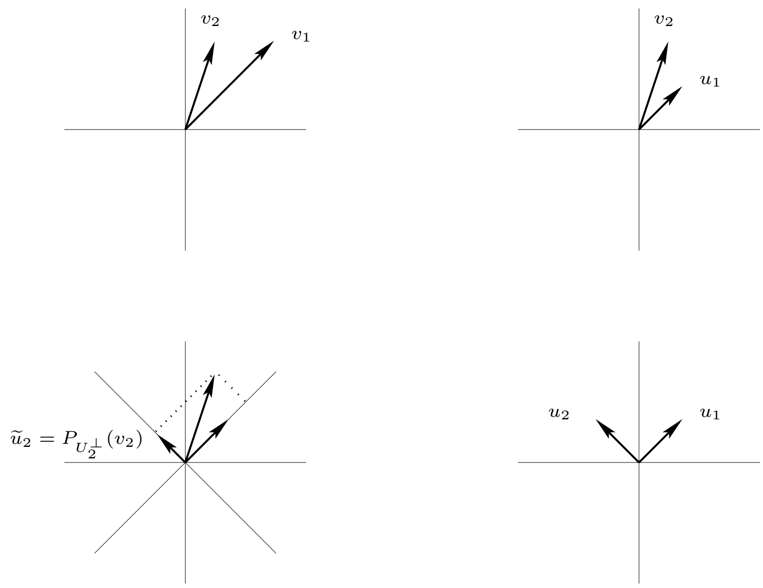
Bemerkung 9.2.7. In der Situation von Satz 9.2.6 nennt man $P_U \colon V \to U$ bzw. $P_{U^\perp} \colon V \to U^\perp$ auch die *Orthogonalprojektionen* auf U bzw. $U^\perp$. Es gilt stets

$$P_U \;+\; P_{U^\perp} \;\;=\;\; \mathrm{id}_V.$$

Orthogonalprojektionen tauchen im Gram-Schmidt-Verfahren auf: Man gewinnt den Vektor $\widetilde{u}_k$ als

$$\widetilde{u}_k \;=\; v_k - P_{U_k}(v_k) \;=\; P_{U_k^\perp}(v_k)$$

mit den beiden Orthogonalprojektionen $P_{U_k} \colon V \to U_k := \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{k-1})$ bzw. $P_{U_k^\perp} \colon V \to U_k^\perp$. Hier das Verfahren nocheinmal im Bild:



Definition 9.2.8. Es seien V, W euklidische Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\ ,\ \rangle_V$ bzw. $\langle\ ,\ \rangle_W$. Eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ heißt *Isometrie*, falls

$$\langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle_W \;=\; \langle v, v' \rangle_V \quad \text{für alle } v, v' \in V.$$

Bemerkung 9.2.9. Es seien V und W euklidische Vektorräume. Ist $\varphi \colon V \to W$ eine Isometrie, so ist φ injektiv, denn es gilt

$$\varphi(v) = 0_W \implies 0 = \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, v \rangle \implies v = 0_V.$$

Insbesondere ist jede Isometrie $\varphi \colon V \to V$ eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes V ein Isomorphismus.

Definition 9.2.10. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls sie invertierbar ist und $A^{-1} = A^t$ gilt.

Satz 9.2.11. *Wir versehen* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standardskalarprodukt. Dann sind für* $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist orthogonal.*
(ii) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.*
(iii) *Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Die i-te Zeile von A^t ist die i-te Spalte von A. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich daher aus

$$A^t \cdot A \;=\; E_n \quad \Longleftrightarrow \quad A_{*i} \cdot A_{*j} \;=\; \delta_{ij}.$$

Weiter ist die j-te Spalte von A^t die j-te Zeile von A. Die Äquivalenz von (i) und (iii) ergibt sich somit aus

$$A \cdot A^t \;=\; E_n \quad \Longleftrightarrow \quad A_{i*} \cdot A_{j*} \;=\; \delta_{ij}.$$

□

Beispiel 9.2.12. Für jeden Winkel $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ erhält man orthogonale (2×2)-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Satz 9.2.13. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist eine Isometrie.*
(ii) *$\mathcal{C} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ist eine Orthonormalbasis für V.*
(iii) *Die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist orthogonal.*

Beweis. Die Implikation "(i)$\Rightarrow$(ii)" ist klar. Zum Nachweis von "(ii)$\Rightarrow$(i)" seien $v, v' \in V$ gegeben. Sind $v = \sum a_i \cdot v_i$ und $v' = \sum b_j \cdot v_j$ die Entwicklungen bezüglich $\mathcal{B}$, so erhalten wir mit Satz 9.2.3 (ii)

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle &= \left\langle \varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right), \varphi\left(\sum b_j \cdot v_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \sum a_i \cdot \varphi(v_i), \sum b_j \cdot \varphi(v_j) \right\rangle \\ &= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \\ &= \langle v, v' \rangle. \end{aligned}$$

Zu "(ii)$\Rightarrow$(iii)". Nach Satz 9.2.11 genügt es zu zeigen, dass die Spalten von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Das ergibt sich mit Satz 9.2.3: Es gilt

$$\delta_{ij} \;=\; \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle \;=\; x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j)).$$

Zu "(iii)$\Rightarrow$(ii)". Ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ orthogonal, so bilden ihre Spalten nach Satz 9.2.11 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Mit Satz 9.2.3 folgt

$$\delta_{ij} \;=\; x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j)) \;=\; \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j) \rangle.$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 9.2.

Aufgabe 9.2.14. Wende das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungverfahren an auf die Basis (v_1, v_2, v_3) des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$v_1 \ := \ (1,1,1), \qquad v_2 \ := \ (1,1,0), \qquad v_3 \ := \ (1,0,0).$$

Aufgabe 9.2.15. Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \ , \ \rangle$ und es sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Zeige: Es gilt

$$(U^\perp)^\perp \ = \ \mathrm{Lin}(U).$$

Aufgabe 9.2.16. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeige: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt $\lambda = \pm 1$.

Aufgabe 9.2.17. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeige: Es gibt ein $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ mit

$$A \ = \ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A \ = \ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.2.18. Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Zeige: Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie, so gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \ = \ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } A \ \in \ \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R}) \text{ orthogonal.}$$

Hinweis: Das charakteristische Polynom von φ ist ein reelles Polynom dritten Grades und besitzt somit (mindestens) eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 9.2.19. Zeige: Die orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

9.3. **Unitäre Vektorräume.**

Erinnerung 9.3.1 (Komplexe Zahlen)**.** Jede komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ kann man schreiben als

$$z \quad = \quad x + Iy,$$

wobei $I = (0, 1) \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist. Man nennt $\Re(z) := x$ den *Realteil* von z und $\Im(z) := y$ den *Imaginärteil* von z. Die Konjugation

$$\mathbb{C} \ \to \ \mathbb{C}, \qquad z = x + Iy \ \mapsto \ \overline{z} := x - Iy$$

ist ein bijektiver Homomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gelten folgende Aussagen

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $z + \overline{z} = 2 \cdot \Re(z)$,
- $z - \overline{z} = 2I \cdot \Im(z)$,
- z ist reell $\iff$ $\Im(z) = 0$ $\iff$ $z = \overline{z}$.

Der *Absolutbetrag* einer komplexen Zahl $z = x + Iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist die nichtnegative reelle Zahl

$$|z| \ := \ \sqrt{x^2 + y^2} \ = \ \sqrt{z\overline{z}}.$$

Definition 9.3.2. Ein *hermitesches Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle\ ,\ \rangle \colon V \times V \ \to \ \mathbb{C}, \qquad (v, w) \ \mapsto \ \langle v, w \rangle.$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle\ ,\ \rangle$ ist linear in der ersten Komponente, d.h., es gilt stets

$$\langle a \cdot v + b \cdot v', w \rangle \quad = \quad a\langle v, w \rangle + b\langle v', w \rangle.$$

(ii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *antilinear* in der zweiten Komponente, d.h., es gilt stets

$$\langle v, a \cdot w + b \cdot w' \rangle \quad = \quad \overline{a}\langle v, w \rangle + \overline{b}\langle v, w' \rangle.$$

(iii) $\langle\ ,\ \rangle$ ist *hermitesch*, d.h., es gilt stets

$$\langle v, w \rangle \quad = \quad \overline{\langle w, v \rangle}.$$

(iv) $\langle\ ,\ \rangle$ ist positiv definit, d.h., es gilt stets

$$\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \langle v, v \rangle = 0 \implies v = 0_V.$$

Einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem hermiteschen Skalarprodukt nennt man einen *unitären* Vektorraum.

Beispiel 9.3.3. Das *hermitesche Standardskalarprodukt* macht $\mathbb{C}^n$ zu einem unitären Vektorraum; es ist definiert als

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \ \mathbb{C}, \qquad (z, w) \ \mapsto \ z \cdot \overline{w} \ = \ z_1\overline{w_1} + \ldots + z_n\overline{w_n}.$$

Definition 9.3.4. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem hermiteschen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Die zugehörige *Norm* ist die Abbildung

$$V \ \to \ \mathbb{R}, \qquad v \ \mapsto \ \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Satz 9.3.5 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und zugehöriger Norm $\|\ \|$. Dann gilt*

$$\langle v, w \rangle\overline{\langle v, w \rangle} \quad \leq \quad \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

für alle $v, w \in V$. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn die Familie (v, w) linear abhängig ist.

Beweis. Fall 1. Es gilt $\|v\| = 0$. Dann liefert die positive Definitheit $v = 0_V$. Es folgt, dass beide Seiten der Ungleichung verschwinden und die Zusatzaussage ist ebenfalls richtig.

Fall 2. Es gilt $\|v\| \neq 0$. Wir führen zunächst eine Vorüberlegung durch. Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $v, w \in V$ erhält man:

$$\begin{aligned}\langle a{\cdot}v + b{\cdot}w, a{\cdot}v + b{\cdot}w\rangle &= a\langle v, a{\cdot}v + b{\cdot}w\rangle + b\langle w, a{\cdot}v + b{\cdot}w\rangle \\ &= a\overline{a}\langle v,v\rangle + a\overline{b}\langle v,w\rangle + b\overline{a}\langle w,v\rangle + b\overline{b}\langle w,w\rangle. \\ &= a\overline{a}\langle v,v\rangle + a\overline{b}\langle v,w\rangle + b\overline{a}\overline{\langle v,w\rangle} + b\overline{b}\langle w,w\rangle. \\ &= a\overline{a}\langle v,v\rangle + a\overline{b}\langle v,w\rangle + \overline{a\overline{b}\langle v,w\rangle} + b\overline{b}\langle w,w\rangle. \\ &= a\overline{a}\langle v,v\rangle + 2\Re(a\overline{b}\langle v,w\rangle) + b\overline{b}\langle w,w\rangle.\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a = -\overline{\langle v,w\rangle}$ und $b = \langle v,v\rangle$, so erhält man für den Vektor $u := a{\cdot}v + b{\cdot}w$

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= \overline{\langle v,w\rangle}\langle v,w\rangle\langle v,v\rangle - 2\Re(\overline{\langle v,w\rangle}\langle v,v\rangle\langle v,w\rangle) + \langle v,v\rangle\overline{\langle v,v\rangle}\langle w,w\rangle \\ &= -\langle v,v\rangle\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,v\rangle\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle.\end{aligned}$$

Dabei gilt $0 \leq \langle u,u\rangle$ und $\langle v,v\rangle > 0$. Daraus ergibt sich bereits die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Ist die Familie (v,w) linear abhängig, so gilt $w = c{\cdot}v$, denn wegen $\langle v,v\rangle \neq 0$ hat man $v \neq 0_V$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle} &= \langle v, c{\cdot}v\rangle\overline{\langle v, c{\cdot}v\rangle} \\ &= \overline{c}c\langle v,v\rangle\overline{\langle v,v\rangle} \\ &= c\overline{c}\langle v,v\rangle\langle v,v\rangle \\ &= \langle v,v\rangle\langle c{\cdot}v, c{\cdot}v\rangle \\ &= \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2{\cdot}\|w\|^2.\end{aligned}$$

Gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, so erhalten wir mit $a = -\overline{\langle v,w\rangle}$ und $b = \langle v,v\rangle$ nach unserer Vorüberlegung

$$\begin{aligned}\langle a{\cdot}v + b{\cdot}w, a{\cdot}v + b{\cdot}w\rangle &= a\overline{a}\langle v,v\rangle + 2\Re(a\overline{b}\langle v,w\rangle) + b\overline{b}\langle w,w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle\left(\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die positive Definitheit liefert $a{\cdot}v + b{\cdot}w = 0_V$. Wegen $b = \langle v,v\rangle \neq 0$ ist dies eine nichttriviale Linearkombination, d.h., (v,w) ist linear abhängig. □

Folgerung 9.3.6. *Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann besitzt die zugehörige Norm $\|\ \|$ folgende Eigenschaften:*

(i) *Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \implies v = 0_V$.*
(ii) *Für alle $v \in V$ gilt $\|c{\cdot}v\| = |c|\|v\|$.*
(iii) *Für alle $v, w \in V$ gilt die* Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beweis. Die beiden ersten Eigenschaften ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des hermiteschen Skalarproduktes. Die Dreiecksungleichung verifiziert man mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung: Es gilt

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\Re(\langle v,w\rangle) + \|w\|^2 \\ &\le \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}} + \|w\|^2 \\ &\le \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

□

Definition 9.3.7. Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

(i) Wir nennen zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* zueinander, in Zeichen $v \perp w$, falls $\langle v, w\rangle = 0$ gilt.

(ii) Es sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Das *orthogonale Komplement* von U in V ist die Teilmenge

$$U^\perp \ := \ \{v \in V;\ v \perp u \text{ für alle } u \in U\} \ \subseteq \ V.$$

Satz 9.3.8. *Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und es sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Satz 9.1.15 lieferte die entsprechende Aussage für euklidische Vektorräume; der Beweis lässt sich wörtlich übernehmen. □

Definition 9.3.9. Es sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ für V nennt man *Orthonormalbasis*, falls für je zwei i, j gilt

$$\langle v_i, v_j\rangle \ = \ \delta_{ij} \ = \ \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Beispiel 9.3.10. Versieht man $\mathbb{C}^n$ mit dem hermiteschen Standardskalarprodukt, so ist die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis.

Satz 9.3.11. *Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für V. Dann gilt:*

(i) *Die Entwicklung eines beliebigen $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch*

$$v \ = \ \langle v, v_1\rangle \cdot v_1 \ + \ \ldots \ + \ \langle v, v_n\rangle \cdot v_n.$$

(ii) *Für je zwei Vektoren $v = \sum a_i \cdot v_i$ und $w = \sum b_i \cdot v_i$ aus V gilt*

$$\langle v, w\rangle \ = \ x_{\mathcal{B}}(v) \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(w)} \ = \ a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}.$$

Beweis. Zu (i). Es sei $x_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann ist zu zeigen, dass $\langle v, v_i\rangle = a_i$ gilt. Das folgt mit

$$\langle v, v_i\rangle \ = \ \langle a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n, v_i\rangle \ = \ a_1\langle v_1, v_i\rangle + \ldots + a_n\langle v_n, v_i\rangle \ = \ a_i.$$

Zu (ii). Die Aussage erhält man ohne Schwierigkeiten durch "sesquilineares Ausmultiplizieren". Es gilt

$$\langle v, w\rangle \ = \ \left\langle \sum_i a_i \cdot v_i, \sum_j b_j \cdot v_j \right\rangle \ = \ \sum_{i,j} a_i\overline{b_j}\langle v_i, v_j\rangle \ = \ a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}.$$

□

Satz 9.3.12 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Weiter seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V und*

$$\begin{aligned}
u_1 &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_1\|}\cdot\widetilde{u}_1, \quad \textit{wobei} \quad \widetilde{u}_1 := v_1,\\
u_2 &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_2\|}\cdot\widetilde{u}_2, \quad \textit{wobei} \quad \widetilde{u}_2 := v_2 - \langle v_2, u_1\rangle\cdot u_1,\\
&\ \ \vdots\\
u_n &:= \tfrac{1}{\|\widetilde{u}_n\|}\cdot\widetilde{u}_n, \quad \textit{wobei} \quad \widetilde{u}_n := v_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i\rangle\cdot u_i.
\end{aligned}$$

Dann ist die Familie $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis für $\mathrm{Lin}(\mathcal{B})$. Insbesondere ist $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis für V, falls $\mathcal{B}$ eine Basis für V ist.

Beweis. Der Beweis des euklidischen Analogons 9.2.4 verwendet nur Linearität in der ersten Komponente und positive Definitheit; man kann ihn wörtlich übernehmen. □

Satz 9.3.13. *Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $U \leq_{\mathbb{R}} V$ ein Untervektorraum. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_n)$ mit*

$$U = \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_k), \qquad U^\perp = \mathrm{Lin}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

für ein $1 \leq k \leq n$. Weiter hat man eine direkte Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$. Die zugehörigen Projektionen auf die Komponenten U bzw. $U^\perp$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_U\colon V &\to U, & v &\mapsto \langle v, u_1\rangle\cdot u_1 + \ldots + \langle v, u_k\rangle\cdot u_k,\\
P_{U^\perp}\colon V &\to U^\perp, & v &\mapsto \langle v, u_{k+1}\rangle\cdot u_{k+1} + \ldots + \langle v, u_n\rangle\cdot u_n.
\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Beweis von Satz 9.2.6. □

Definition 9.3.14. Es seien V, W unitäre Vektorräume mit hermiteschen Skalarprodukten $\langle\ ,\ \rangle_V$ bzw. $\langle\ ,\ \rangle_W$. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt *Isometrie*, falls

$$\langle\varphi(v), \varphi(v')\rangle_W = \langle v, v'\rangle_V \quad \text{für alle } v, v' \in V.$$

Definition 9.3.15. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls sie invertierbar ist und $A^{-1} = \overline{A}^t$ gilt mit $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})$.

Satz 9.3.16. *Wir versehen $\mathbb{C}^n$ mit dem hermiteschen Standardskalarprodukt. Dann sind für $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist unitär.*
(ii) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.*
(iii) *Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.*

Beweis. Die i-te Zeile von $\overline{A}^t$ ist die i-te Spalte von $\overline{A}$. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich daher aus

$$\begin{aligned}
\overline{A}^t \cdot A = E_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{A}_{*i} \cdot A_{*j} = \delta_{ij}\\
&\Longleftrightarrow \quad A_{*i} \cdot \overline{A}_{*j} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Weiter ist die j-te Spalte von $\overline{A}^t$ die j-te Zeile von $\overline{A}$. Die Äquivalenz von (i) und (iii) ergibt sich somit aus

$$A \cdot \overline{A}^t = E_n \quad \Longleftrightarrow \quad A_{i*} \cdot \overline{A}_{j*} = \delta_{ij}.$$

□

Satz 9.3.17. *Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist eine Isometrie.*
(ii) *$(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ist eine Orthonormalbasis für V.*
(iii) *Die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist unitär.*

Beweis. Die Implikation "(i)⇒(ii)" ist offensichtlich. Zum Nachweis der Umkehrung "(ii)⇒(i)" seien $v, v' \in V$ gegeben. Wir betrachten die Entwicklungen $v = \sum a_i \cdot v_i$ und $v' = \sum b_j v_j$ bezüglich $\mathcal{B}$. Nach Satz 9.3.11 (ii) gilt dann

$$\begin{aligned} \langle\varphi(v), \varphi(v')\rangle &= \left\langle \varphi\left(\sum a_i \cdot v_i\right), \varphi\left(\sum b_j \cdot v_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \sum a_i \cdot \varphi(v_i), \sum b_j \cdot \varphi(v_j)\right\rangle \\ &= a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n} \\ &= \langle v, v'\rangle. \end{aligned}$$

Zu "(ii)⇒(iii)". Nach Satz 9.3.16 genügt es zu zeigen, dass die Spalten von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden. Das ergibt sich mit Satz 9.3.11: Es gilt

$$\delta_{ij} = \langle\varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle = x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j))}.$$

Zu "(iii)⇒(ii)". Ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ unitär, so bilden ihre Spalten nach Satz 9.3.16 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$. Mit Satz 9.3.11 folgt

$$\delta_{ij} = x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_i)) \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j))} = \langle\varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle.$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 9.3.

Aufgabe 9.3.18. Zeige: Die unitären $(n \times n)$-Matrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Aufgabe 9.3.19. Es seien V ein unitärer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine Isometrie. Zeige: Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von φ gilt $|\lambda| = 1$.

9.4. **Selbstadjungierte Endomorphismen.**

Definition 9.4.1. Es sei V ein unitärer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Ein Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ heißt *selbstadjungiert*, falls für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle \varphi(v), w\rangle \quad = \quad \langle v, \varphi(w)\rangle.$$

Definition 9.4.2. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, falls $A = \overline{A}^t$ gilt, d.h., falls $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

Satz 9.4.3. *Es seien V ein unitärer Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für V. Für jeden Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\varphi\colon V \to V$ ist selbstadjungiert.*
(ii) *$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist hermitesch.*

Bemerkung 9.4.4. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ kann man auch als $(n \times 1)$-Matrix über $\mathbb{K}$ auffassen:

$$x \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise kann man die Anwendung von $x \in \mathbb{K}^n$ auf $y \in \mathbb{K}^n$ als Matrizenprodukt $x^t \cdot y$ und Matrix-Vektor-Produkte $A \cdot x$ als Matrizenprodukte auffassen.

Beweis von Satz 9.4.3. Wir setzen $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis für V ist, erhalten wir mit Satz 9.3.11 für beliebige $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), w\rangle &= x_{\mathcal{B}}(\varphi(v))^t \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(w)} \\ &= (A \cdot x_{\mathcal{B}}(v))^t \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(w)} \\ &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A^t \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(w)} \\ &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot \overline{\overline{A}^t \cdot x_{\mathcal{B}}(w)}, \\ \\ \langle v, \varphi(w)\rangle &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot \overline{A \cdot x_{\mathcal{B}}(w)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Implikation "(ii)⇒(i)". Die Implikation "(i)⇒(ii)" erhält man durch Einsetzen von $v = v_j$ und $w = v_i$: Mit $x_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$ und $x_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ folgt

$$a_{ij} \;=\; (A \cdot x_{\mathcal{B}}(v_j))^t \cdot \overline{x_{\mathcal{B}}(v_i)} \;=\; x_{\mathcal{B}}(v_j)^t \cdot \overline{A \cdot x_{\mathcal{B}}(v_i)} \;=\; \overline{a_{ji}}.$$

□

Satz 9.4.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, und es sei $\varphi\colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt:*

(i) *Jeder Eigenwert von φ ist reell.*
(ii) *V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ.*

Satz 9.4.6 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ zerfällt in Linearfaktoren.*

Beweis von Satz 9.4.5. Zu (i). Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ, und es sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda\langle v, v\rangle \;=\; \langle \lambda\cdot v, v\rangle \;=\; \langle \varphi(v), v\rangle \;=\; \langle v, \varphi(v)\rangle \;=\; \langle v, \lambda\cdot v\rangle \;=\; \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Wegen $\langle v, v\rangle \neq 0$ können wir daraus $\lambda = \overline{\lambda}$ schliessen. Folglich ist der Eigenwert λ reell.

Zu (ii). Wir beweisen die Aussage durch Induktion über $n := \dim(V)$. Im Fall $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Zum Induktionsschritt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das charakteristische Polynom P_φ in Linearfaktoren. Insbesondere besitzt φ einen Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Wir wählen einen zu λ_1 gehörigen Eigenvektor $v_1 \in V$. Durch Normieren erreichen wir $\|v_1\| = 1$. Wir betrachten die orthogonale Zerlegung

$$V \;=\; \mathbb{C}\cdot v_1 \;\oplus\; (\mathbb{C}\cdot v_1)^\perp.$$

Für das orthogonale Komplement $V_1 := (\mathbb{C}\cdot v_1)^\perp$ gilt $\varphi(V_1) \subseteq V_1$, denn für jedes $w \in V_1$ hat man

$$\langle v_1, \varphi(w)\rangle \;=\; \langle \varphi(v_1), w\rangle \;=\; \langle \lambda\cdot v_1, w\rangle \;=\; \lambda\cdot\langle v_1, w\rangle \;=\; 0.$$

Auf $V_1 \to V_1$, $w \mapsto \varphi(w)$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten so eine Orthonormalbasis $(v_2, \ldots, v_n)$ für V_1 aus Eigenvektoren von φ. Damit ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ wie gewünscht. $\square$

Folgerung 9.4.7. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Dann gibt es eine unitäre Matrix S, sodass $\overline{S}^t \cdot A \cdot S$ eine reelle Diagonalmatrix ist.*

Beweis. Wir betrachten $\mathbb{C}^n$ mit dem hermiteschen Standardskalarprodukt. Dann ist die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^n$.

Nach Satz 9.4.3 ist der zu A gehörige Endomorphismus $\mu_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto A\cdot v$ selbstadjungiert. Satz 9.4.5 liefert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von φ. Die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A)$ ist eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen.

Wir betrachten nun die Matrix $S := (v_1, \ldots, v_n)$. Nach Satz 9.3.16 ist S unitär. Weiter erhalten wir mit Satz 7.3.6:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \;=\; (v_1, \ldots, v_n)^{-1} \cdot (e_1, \ldots, e_n) \;=\; S^{-1} \;=\; \overline{S}^t.$$

Die Behauptung erhalten wir nun, indem wir die darstellende Matrix von μ_A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ über die Transformationsformel 7.3.7 ausdrücken

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A) \;=\; M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mu_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{-1} \;=\; \overline{S}^t \cdot A \cdot S.$$

$\square$

Definition 9.4.8. Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Ein Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ heißt *selbstadjungiert*, falls für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\langle \varphi(v), v'\rangle \;=\; \langle v, \varphi(v')\rangle.$$

Definition 9.4.9. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ heißt symmetrisch, falls $A = A^t$ gilt, d.h., falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le n$ gilt.

Bemerkung 9.4.10. Jede symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ ist insbesondere eine hermitesche Matrix in $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$. Nach Folgerung 9.4.7 besitzt A deshalb (mindestens) einen reellen Eigenwert.

Satz 9.4.11. *Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für V. Für jeden Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ sind äquivalent:*

(i) *$\varphi\colon V \to V$ ist selbstadjungiert.*
(ii) *$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist symmetrisch.*

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Satz 9.4.3 vor. Es sei $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis für V ist, erhalten wir mit Satz 9.2.3 für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), w \rangle &= x_{\mathcal{B}}(\varphi(v))^t \cdot x_{\mathcal{B}}(w) \\ &= (A \cdot x_{\mathcal{B}}(v))^t \cdot x_{\mathcal{B}}(w) \\ &= (x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot A^t) \cdot x_{\mathcal{B}}(w) \\ &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot (A^t \cdot x_{\mathcal{B}}(w)), \\ \\ \langle v, \varphi(w) \rangle &= x_{\mathcal{B}}(v)^t \cdot (A \cdot x_{\mathcal{B}}(w)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Implikation "(ii)$\Rightarrow$(i)". Die Implikation "(i)$\Rightarrow$(ii)" erhält man durch Einsetzen von $v = v_j$ und $w = v_i$: Mit $x_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$ und $x_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ folgt

$$a_{ij} \;=\; (A \cdot x_{\mathcal{B}}(v_j))^t \cdot x_{\mathcal{B}}(v_i) \;=\; x_{\mathcal{B}}(v_j)^t \cdot (A^t \cdot x_{\mathcal{B}}(v_i)) \;=\; a_{ji}.$$

□

Satz 9.4.12. *Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 9.4.5 verwenden wir Induktion über $n := \dim(V)$. Im Fall $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Zum Induktionsschritt. Nach Folgerung 9.4.7 besitzt jede symmetrische relle Matrix einen reellen Eigenwert. Folglich besitzt auch φ einen Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Wir wählen einen zu λ_1 gehörigen Eigenvektor $v_1 \in V$. Durch Normieren erreichen wir $\|v_1\| = 1$. Wir betrachten die orthogonale Zerlegung

$$V \;=\; \mathbb{R}{\cdot}v_1 \;\oplus\; (\mathbb{R}{\cdot}v_1)^{\perp}.$$

Für das orthogonale Komplement $V_1 := (\mathbb{R}{\cdot}v_1)^{\perp}$ gilt $\varphi(V_1) \subseteq V_1$, denn für jedes $w \in V_1$ hat man

$$\langle v_1, \varphi(w) \rangle \;=\; \langle \varphi(v_1), w \rangle \;=\; \langle \lambda{\cdot}v_1, w \rangle \;=\; \lambda{\cdot}\langle v_1, w \rangle \;=\; 0.$$

Auf $V_1 \to V_1$, $w \mapsto \varphi(w)$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten so eine Orthonormalbasis $(v_2, \ldots, v_n)$ für V_1 aus Eigenvektoren von φ. Damit ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ wie gewünscht. □

Folgerung 9.4.13. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix S, sodass $S^t \cdot A \cdot S$ eine (reelle) Diagonalmatrix ist.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von Folgerung 9.4.7. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Dann ist die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^n$.

Nach Satz 9.4.11 ist der zu A gehörige Endomorphismus $\mu_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto A{\cdot}v$ selbstadjungiert. Satz 9.4.12 liefert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von φ. Die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A)$ ist eine Diagonalmatrix.

Wir betrachten nun die Matrix $S := (v_1, \ldots, v_n)$. Nach Satz 9.2.11 ist S orthogonal. Weiter erhalten wir mit Satz 7.3.6:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \;=\; (v_1, \ldots, v_n)^{-1} \cdot (e_1, \ldots, e_n) \;=\; S^{-1} \;=\; S^t.$$

Die Behauptung erhalten wir nun, indem wir die darstellende Matrix von μ_A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ über die Transformationsformel 7.3.7 ausdrücken: Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mu_A) \;=\; M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mu_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{-1} \;=\; S^t \cdot A \cdot S.$$

□

Anwendung 9.4.14 (Hauptachsentransformation)**.** Ein *homogenes quadratisches Polynom* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Ausdruck der Form

$$f(x) \quad = \sum_{1 \le i \le j \le n} f_{ij} x_i x_j$$

Man interessiert sich für die zugehörige *Quadrik* $Q := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 1\}$. Das Polynom f definiert eine symmetrische Matrix

$$a_{ij} \quad = \quad \begin{cases} f_{ij}/2 & i < j, \\ f_{ii} & i = j, \\ f_{ji}/2 & i > j. \end{cases}$$

Mit dieser Matrix erhält man $f(x) = x^t A x$. Man definiert den *Rang* der Quadrik dann als $\mathrm{Rang}(Q) := \mathrm{Rang}(A)$.

Die Theorie selbstadjungierter Endomorphismen emöglicht es, Q auf eine einfache Gestalt zu bringen. Nach Folgerung 9.4.13 gibt es eine orthogonale Matrix S, sodass $S^t \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix mit reellen Eigenwerten ist.

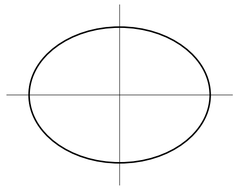
Die Spalten von S bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A, man nennt sie die *Hauptachsen* der Quadrik Q. Der Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto S^{-1} \cdot v$ überführt die Hauptachsen in die Standardeinheitsvektoren, und es gilt

$$\begin{aligned} S^{-1} \cdot Q \quad &= \quad \{y \in \mathbb{R}^n;\ f(S \cdot y) = 1\} \\ &= \quad \{y \in \mathbb{R}^n;\ (S \cdot y)^t \cdot A \cdot S \cdot y = 1\} \\ &= \quad \{y \in \mathbb{R}^n;\ y^t \cdot (S^t \cdot A \cdot S) \cdot y = 1\}. \end{aligned}$$

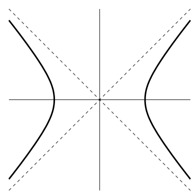
Die transformierte Quadrik $S^{-1} \cdot Q$ besitzt also eine besonders einfache Gestalt; mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A gilt

$$S^{-1} \cdot Q \quad = \quad \{y \in \mathbb{R}^n;\ \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = 1\}.$$

Man unterscheidet nun nach den Anzahlen positiver und negativer Eigenwerte und erhält verschiedene Fälle. An möglichen Quadriken vom Rang 2 in $\mathbb{R}^n$ erhält man man Ellipsen und Hyperbeln:



$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$



$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

Aufgaben zu Abschnitt 9.4.

Aufgabe 9.4.15. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums V. Zeige: Gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ und sind alle Eigenwerte von φ reell, so ist φ selbstadjungiert.

Aufgabe 9.4.16. Es seien V ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine Isometrie. Zeige: V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ.

Index